Časopis pro pěstování matematiky

Norbert Brunner
Relative Differenzeneigenschaft

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 107 (1982), No. 3, 241--243

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/118130

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 107 (1982), Praha

RELATIVE DIFFERENZENEIGENSCHAFT

NORBERT BRUNNER, Baden

(Eingegangen 2. Juli 1980)

In dieser Arbeit charakterisieren wir die Steinhausmengen ([7]) mit Methoden aus der Theorie der Cauchy'schen Funktionalgleichung:

Definition 1. Sei K eine Menge reeller Funktionen und sei A eine lineare Menge (i.e.: $A \subseteq \boldsymbol{R}$): K hat die *Differenzeneigenschaft relativ zu A* (eingeschränkt auf A, bzgl. A), wenn sich jede Funktion f, für die für alle h in A $D_h f$ in K ist ($D_h f(x) = f(x + h) - f(x)$), darstellen läßt als $f = k + l$, wobei k in K ist und l die Cauchy'sche Funktionalgleichung ($l(x + y) = l(x) + l(y)$) erfüllt (d. h.: l ist additiv).

Für $A = \boldsymbol{R}$ ist das die klassische Differenzeneigenschaft, die von de Bruijn [1] untersucht wurde (vgl. auch [4], [2], [5]). Hat K die Differenzeneigenschaft – im folgenden kurz DE genannt – relativ zu A und ist $B \supseteq A$, so hat K die Differenzeneigenschaft eingeschränkt auf B und daher speziell: K hat die klassische Differenzeneigenschaft. Die Klasse aller reellen Funktionen hat die Differenzeneigenschaft bzgl. $\emptyset$.

Im folgenden Theorem werden wir das Problem lösen, diejenigen Mengen A zu charakterisieren, für die die Menge C aller stetigen Funktionen die Differenzeneigens schaft bzgl. A hat. Wie wir zeigen werden, sind das die Steinhausemengen; i.e.: diejenigen Mengen $A \subseteq \boldsymbol{R}$, für die jede reelle Zahl ganzzahlige Linearkombination von Elementen aus A ist.

Satz 1. *Ist $K \neq \emptyset$ eine translationsinvariante additive Gruppe stetiger reeller Funktionen mit der Differenzeneigenschaft, so ist eine lineare Menge A genau dann eine Steinhausmenge, wenn K die Differenzeneigenschaft relativ zu A hat.*

Beweis. Wir bemerken, daß gemäß unserer Voraussetzung für K gilt:

(i) Mit f und g sind auch $f + g$ und $-g$ in K.
(ii) Ist $f \in K$ und $h \in \boldsymbol{R}$, so ist $D_h f \in K$.
(iii) $K \subseteq C$.
(iv) K hat die DE.

"$\Rightarrow$": Sei A eine Steinhausmenge, f eine Funktion für die für alle $h \in A$ $D_h f \in K$ ist und sei $r \in \boldsymbol{R}$ beliebig: Dann gibt es $z_i \in Z$, der Menge der ganzen Zahlen, und

$a_i \in A$, $1 \leqq i \leqq n$, $n \in N$, der Menge der natürlichen Zahlen, sodaß $r = z_1 a_1 + \ldots$ $\ldots + z_n a_n$. Mit den Formeln $D_{x+y}f = D_y(D_x f) + D_y f$ und $D_{-x}f = D_{-x}(-D_x f) -$ $- D_x f$ erhält man aus (ii) und (i): $D_r f \in K$ und daher wegen (iv): K hat die DE bzgl. A.

"$\Leftarrow$": K habe die DE eingeschränkt auf A: Wir sehen $\boldsymbol{R}$ als Vektorraum über $\boldsymbol{Q}$ an, der Menge der rationalen Zahlen, und bezeichnen mit A_Q die lineare Hülle von A in diesem Vektorraum.

Es gilt: $A_Q = \boldsymbol{R}$. Denn sonst gibt es ein Komplement $B_Q \neq \{0\}$ von A_Q ([3]); d. h. $\boldsymbol{R} = A_Q \oplus B_Q$, jedes $r \in \boldsymbol{R}$ ist eindeutig darstellbar als $r = a + b$, $a \in A_Q$, $b \in B_Q$. Wir definieren eine reelle Funktion f durch: $f(r) = (b + 1) . b$. Da für alle $a \in A$ $D_a f =$ $= 0 \in K$ ist, gibt es wegen der DE bzgl. A $k \in K$ und l, l ist additiv, mit $f = k + l$. Da wir o.B.d.A. annehmen können, daß $A \neq \emptyset$ und $A \neq \{0\}$ ist — sonst betrachten wir $A \cup \{1\}$ statt A — ist A_Q dicht. Da für alle $a \in A_Q$ gilt: $k(a) = f(a) - l(a) =$ $= -l(a)$, ist $k \mid A_Q^-$ additiv und daher auch f; ein Widerspruch zu $B_Q \neq \{0\}$.

Wir fassen $\boldsymbol{R}$ nunmehr als Vektorraum über Z auf: A_Z bezeichne die lineare Hülle von A in diesem Vektorraum.

Aus $A_Q = \boldsymbol{R}$ folgt, daß $\boldsymbol{R}$ die Vereinigung der Mengen $(1/n)\, A_Z$, $n \in N$ ist. Aus dem Baire'schen Kategoriesatz ergibt sich, daß eine der Mengen $(1/n)\, A_Z$ nicht nirgends dicht ist, und mithin ist auch A_Z nicht nirgends dicht.

A_Z ist sogar dicht: Sei nämlich $r \in \boldsymbol{R}$ beliebig und sei a im Kern des Abschlusses A_Z^- von A_Z: Dann gibt es $n \in N$, sodaß auch $b = a + r/n$ im Kern von A_Z^- liegt und folglich ist $r = nb - na$ in $(A_Z^-)_Z = A_Z^-$.

Daraus folgt: $A_Z = \boldsymbol{R}$. Sonst gibt es nämlich ein Komplement $B_Z \neq \{0\}$ von A_Z ([3]: Z ist nullteilerfrei) und man kann definieren: $f(a + b) = (b + 1) . b$, $a \in A_Z$, $b \in B_Z$. Da für alle $a \in A$ $D_a f \in K$ ist, gibt es ein additives l und ein $k \in K \subseteq C$ mit $f = k + l$ und $k = k \mid A_Z^-$ ist additiv. Daher ist auch f additiv, was wegen $B_Z \neq \{0\}$ unmöglich ist. Daher ist $A_Z = \boldsymbol{R}$, d. h.: A ist eine Steinhausmenge.

Dieser Satz läßt sich auf eine Reihe wichtiger Funktionenklassen anwenden, wie z. B. auf C_k, $0 \leqq k \leqq \infty$ — die k mal stetig differenzierbaren Funktionen. AC — die absolutstetigen Funktionen, auf die analytischen Funktionen und auf die Klassen der gewöhnlichen Polynome und der trigonometrischen Polynome. Das Cantor'sche Diskontinuum ist ein Beispiel für eine nicht-triviale Steinhausmenge ([7]). Eine Anwendung der Steinhausmengen auf trigonometrische Reihen findet man in [6].

Literatur

[1] *N. G. de Bruijn:* Functions whose differences belong to a given class. Niew Archiev voor Wiskunde *23* (1951), 194—218.

[2] *A. J. E. M. Janssen:* Note on a paper by M. Laczkovich ..., Memorandum 1978—14, ETH Eindhoven.

[3] *N. Jacobson:* Lectures in Abstract Algebra II. Springer Verlag, Grad. Texts ... *31* (1976).

[4] *J. H. B. Kempermann:* A general functional equation. Trans. A.M.S. *86* (1957), 28–56.
[5] *M. Lasczkovich:* Functions with measurable differences. Acta M. Acad. S. Hung. *36* (1980).
[6] *V. Niemytzki:* Sur quelques classes .... Math. Sb. *33* (1926), 5–32.
[7] *H. Steinhaus:* A new property of G. Cantor's set. Wektor *7* (1917).

Anschrift des Verfassers: A 2500 Baden, Kaiser Franz Ring 22, Österreich.