Časopis pro pěstování matematiky

František Machala

Fastgeordnete und geordnete lokale Ringe und ihre geometrische Anwendung

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 106 (1981), No. 3, 269--278

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/118100`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 106 (1981), Praha

FASTGEORDNETE UND GEORDNETE LOKALE RINGE UND IHRE GEOMETRISCHE ANWENDUNG

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc

(Eingegangen am 28. Marz 1979)

In [4] definiert man fastgeordnete und geordnete affine Klingenbergsche Ebenen (AK-Ebenen) und in [1] wird gezeigt, daß jede über einem geordneten kommutativen lokalen Ring R konstruierte AK-Ebene $\mathscr{A}_R$ geordnet ist. Ist umgekehrt $\mathscr{A}_R$ geordnet, so ist der zugehörige lokale Ring R geordnet.

In vorliegender Arbeit werden fastgeordnete (nicht notwendig kommutative) lokale Ringe definiert und es wird gezeigt, daß jede mit Hilfe des lokalen Ringes R konstruierte AK-Ebene $\mathscr{A}_R$ genau dann fastgeordnet ist, wenn R fastgeordnet ist. Im weiteren konstruiert man lokale Ringe, die fastgeordnet, jedoch nicht geordnet sind. Dadurch werden fastgeordnete AK-Ebenen, die nicht geordnet sind, gefunden.

Definition 1. Ein assoziativer (nicht notwendig kommutativer) Ring mit Eins mit genau einem maximalen Rechtsideal heißt *lokal.*

Bemerkung 1. Das maximale Rechtsideal I eines lokalen Ringes R ist zugleich ein zweiseitiges Ideal von R und stellt die Menge aller nichtinvertierbarer Elemente von R dar. Der Restklassenring $\bar{R} = R/I$ ist ein Körper.

Definition 2. Ein Ring $R = (M, +, \cdot)$ heißt *geordnet,* falls $(M, \leqq)$ eine geordnete Menge ([1], S. 23) folgender Eigenschaften ist:

(1) $a, b, c \in M,\ a \leqq b \Rightarrow a + c \leqq b + c,$

(2) $a, b \in M,\ 0 \leqq a,\ 0 \leqq b \Rightarrow 0 \leqq ba.$

Definition 3. Es sei $R = (M, +, \cdot)$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal I und sei auf M eine Anordnung $\leqq$ erklärt. R heißt *fastgeordnet,* falls gilt:

(R1) $a, b, c \in M,\ a \leqq b \Rightarrow a + c \leqq b + c,$

(R2) $a \in M,\ b \in M \setminus I,\ 0 \leqq a,\ 0 \leqq b \Rightarrow 0 \leqq ba.$

Folgerungen der Definition 3

1. a) $a < b,\ c \in M \Rightarrow a + c < b + c$: Nach (R1) gilt $a < b,\ c \in M \Rightarrow a + c \leqq \leqq b + c$. Aus $a + c = b + c$ folgt $a = b$, was $a < b$ widerspricht.

b) $a \leqq b \wedge c \leqq d \Rightarrow a + c \leqq b + d$. Nach (R1) ergibt sich $a \leqq b \Rightarrow a + c \leqq \leqq b + c$ und zugleich $c \leqq d \Rightarrow c + b \leqq d + b$, also $a + c \leqq b + d$. Speziell ist $0 \leqq a \wedge 0 \leqq b \Rightarrow 0 \leqq a + b$.

c) Aus (R1) folgt $a \leqq b \Rightarrow 0 \leqq b - a \Rightarrow -b \leqq -a$ und speziell $0 \leqq a \Rightarrow -a \leqq \leqq 0$, $a \leqq 0 \Rightarrow 0 \leqq -a$.

2. R enthält mindestens drei Elemente: Da R ein maximales Ideal enthält, gilt $0 \neq 1$ und folglich $0 < 1$ oder $1 < 0$. Wegen $0 < 1$ ist nach Folgerung 1 a) $1 < 1 + + 1$, also $0 < 1 < 1 + 1$ und $0, 1 \neq 1 + 1$. Analog gilt $1 < 0 \Rightarrow 1 + 1 < 1 < 0$. Unter weiterer Anwendung dieses Verfahrens läßt sich zeigen, daß R sogar unendlich viele Elemente enthält.

3. $a \leqq b,\ 0 \leqq c,\ c \notin I \Rightarrow ca \leqq cb$: Nach (R1) und (R2) erhält man $a \leqq b \Rightarrow \Rightarrow 0 \leqq b - a \Rightarrow 0 \leqq c(b - a) \Rightarrow ca \leqq cb$. Analog zeigt man die Gültigkeit von $a \leqq b,\ c \leqq 0,\ c \notin I \Rightarrow cb \leqq ca$.

4. $0 < 1$: Sei $1 \leqq 0$. Nach Folgerung 2 gibt es ein $a \in R$ mit $a \neq 0, 1$. Aus $0 < a$ folgt nach Folgerung 3 $0 \leqq a,\ 1 \leqq 0,\ 1 \notin I \Rightarrow a \leqq 0$, also ein Widerspruch. Analog führt auch $a < 0$ zu einem Widerspruch. Somit ist $0 < 1$.

5. $0 \leqq a,\ a \notin I \Rightarrow 0 \leqq a^{-1}$: Aus $a^{-1} < 0$ erhält man nach Folgerung 3 $a^{-1} < 0$, $0 \leqq a,\ a \notin I \Rightarrow aa^{-1} = 1 \leqq 0$, also einen Widerspruch. Ähnlich ergibt sich $a \leqq 0$, $a \notin I \Rightarrow a^{-1} \leqq 0$.

Satz 1. *Sei $R = (M, +, \cdot)$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal I.*

1. *Ist R fastgeordnet und definiert man durch die Anordnung $\leqq$ von M eine Zwischenrelation $(* \,.\, * \,.\, *)$ nach* [1], S. 25, *dann gilt*

$(+)$ $(a \,.\, b \,.\, c) \Rightarrow (a + d \,.\, b + d \,.\, c + d)\ \forall a, b, c, d \in M$,

$(\cdot)$ $(a \,.\, b \,.\, c) \Rightarrow (da \,.\, db \,.\, dc)\ \forall a, b, c \in M\ \forall d \in M \setminus I$.

2. *Ist $(* \,.\, * \,.\, *)$ eine Zwischenrelation auf M mit den Eigenschaften $(+)$, $(\cdot)$ und definiert man nach* [1], S. 24 *durch $(* \,.\, * \,.\, *)$ eine Anordung $\geqq$ von M mit $0 \leqq 1$, dann ist R ein fastgeordneter Ring.*

Beweis. 1. Es sei R fastgeordnet. Dann gilt $(a \,.\, b \,.\, c){:} \Leftrightarrow a \leqq b \leqq c \vee c \leqq b \leqq a$.

Ad $(+)$ Nach (R1) erhält man $(a \,.\, b \,.\, c) \Rightarrow a \leqq b \leqq c \vee c \leqq b \leqq a \Rightarrow a + d \leqq \leqq b + d \leqq c + d \vee c + d \leqq b + d \leqq a + d \Rightarrow (a + d \,.\, b + d \,.\, c + d)$.

Ad $(\cdot)$ Es sei $(a \,.\, b \,.\, c)$ und $d \in M \setminus I$.

a) Gilt $0 \leqq d$, dann ergibt sich nach Folgerung 3 $(a \,.\, b \,.\, c) \Rightarrow a \leqq b \leqq c \vee c \leqq \leqq b \leqq a \Rightarrow da \leqq db \leqq dc \vee dc \leqq db \leqq da \Rightarrow (da \,.\, db \,.\, dc)$.

b) Unter Anwendung der Folgerung 3 erhält man $(da \,.\, db \,.\, dc)$ auch für $d \leqq 0$.

Der Beweis des Teiles 2 läßt sich analog dem Beweis von Satz (3.1), S. 33 [1] durchführen.

Definition 4. Ein fastgeordneter lokaler Ring R mit maximalem Ideal I heißt *konvex*, wenn $(a \,.\, c \,.\, b) \Rightarrow c \in I$ für $a, b \in I$ gilt.

Satz 2. *Ein fastgeordneter lokaler Ring R mit maximalem Ideal I ist genau dann konvex, wenn* $m < 1$ *für alle* $m \in I$ *gilt.*

Beweis. 1. Es sei R konvex. Wir nehmen dabei an, daß $m \in I$ mit $1 \leqq m$ existiert. Wegen $0 \leqq 1$ gilt dann $0 \leqq 1 \leqq m$ und folglich $(0 \,.\, 1 \,.\, m)$. Wegen $0, m \in I$ folgt daraus $1 \in I$, was ein Widerspruch ist.

2. Es sei $m < 1$ für alle $m \in I$. Wir nehmen an, daß $(m_1 \,.\, a \,.\, m_2)$ für $m_1, m_2 \in I$ und $a \notin I$ gilt. Dann ist entweder $m_1 \leqq a \leqq m_2 < 1$ oder $m_2 \leqq a \leqq m_1 < 1$. Sei $0 \leqq a$. Nach Folgerung 5 der Definition 3 ergibt sich dann $0 \leqq a^{-1}$ und wegen $a^{-1}m_1, a^{-1}m_2 \in I$ folgt aus Folgerung 3 $a^{-1}m_1 \leqq 1 \leqq a^{-1}m_2 < 1 \vee a^{-1}m_2 \leqq$ $\leqq 1 \leqq a^{-1}m_1 < 1$, was ein Widerspruch ist. Analog geht man im Falle $a \leqq 0$ vor.

Es sei $R = (M, +, \cdot)$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal I. Wir konstruieren eine Inzidenzstruktur $\mathscr{A}_R = (\mathscr{P}, \mathscr{L}, \in)$ folgendermaßen: $\mathscr{P} = \{[a_1, a_2] \mid a_1, a_2 \in M\}$, $\mathscr{L} = \{\langle c, b\rangle \mid c, b \in M\} \cup \{\langle\!\langle m, b\rangle\!\rangle \mid m \in I, b \in M\}$, $[a_1, a_2] \in \langle c, b\rangle \Leftrightarrow a_2 = ca_1 +$ $+ b$, $[a_1, a_2] \in \langle\!\langle m, b\rangle\!\rangle \Leftrightarrow a_1 = ma_2 + b$. Sei $\bar{R} = R/I$ der zu R gehörige Körper mit Elementen $\bar{a} = a + I$ für $a \in M$. Konstruieren wir mit oben beschriebenem Verfahren eine Inzidenzstruktur $\mathscr{A}_{\bar{R}} = (\mathscr{P}', \mathscr{L}', \in)$, dann ist $\mathscr{A}_{\bar{R}}$ eine affine Ebene. Die Abbildung $\varkappa : [a_1, a_2] \to [\bar{a}_1, \bar{a}_2]$ $\forall a_1, a_2 \in M$,

$$\langle c, b\rangle \to \langle \bar{c}, \bar{b}\rangle \;\; \forall c, b \in M\,,$$

$$\langle\!\langle m, c\rangle\!\rangle \to \langle\!\langle \bar{0}, \bar{b}\rangle\!\rangle \;\; \forall m \in I \;\; \forall b \in M$$

ist ein Epimorphismus der Inzidenzstruktur $\mathscr{A}_R$ auf $\mathscr{A}_{\bar{R}}$ und daher ist $\mathscr{A}_R$ eine Klingenbergsche Ebene (kurz AK-Ebene) [4], Def. 3. Punkte $[a_1, a_2]$ und $[c_1, c_2]$ von $\mathscr{A}_R$ sind genau dann benachbart, wenn $a_1 - c_1 \in I \wedge a_2 - c_2 \in I$. Anderenfalls sind $[a_1, a_2]$ und $[c_1, c_2]$ fern. Die Geraden $\langle c_1, b_1\rangle$ und $\langle c_2, b_2\rangle$ sind genau dann benachbart, wenn $c_1 - c_2 \in I \wedge b_1 - b_2 \in I$ gilt; anderenfalls sind sie fern. Die Geraden $\langle\!\langle m_1, b_1\rangle\!\rangle$ und $\langle\!\langle m_2, b_2\rangle\!\rangle$ sind genau dann benachbart, wenn $b_1 - b_2 \in I$ ist. Im Falle $b_1 - b_2 \notin I$ sind sie fern. Die Geraden $\langle c, b\rangle$ und $\langle\!\langle m, k\rangle\!\rangle$ sind setts fern [1], S. 52. Weiter gilt $\langle c_1, b_1\rangle \parallel \langle c_2, b_2\rangle \Leftrightarrow c_1 = c_2$, $\langle\!\langle m_1, b_1\rangle\!\rangle \parallel \langle\!\langle m_2, b_2\rangle\!\rangle \Leftrightarrow m_1 =$ $= m_2$ und $\langle c, b\rangle \nparallel \langle\!\langle m, k\rangle\!\rangle$ für alle $b, c, k \in M$ und $m \in I$ [1], S. 58.

Bemerkung 2. Vergleichen wir unsere Definition 4 eines konvex geordneten lokalen Ringes mit der Definition 3, [3], dann stellen wir wegen des Satzes 2 fest, daß sich diese Definitionen durch (R2) unterscheiden. Dies ist dadurch verursacht, daß in

[3] die Inzidenz in der AK-Ebene $\mathscr{A}_R$ durch $[x, y] \in \langle c, b\rangle \Leftrightarrow y = xc + b$ zum Unterschied von unserer Vorschrift $[x, y] \in \langle c, b\rangle \Leftrightarrow y = cx + b$ erklärt wird.

Satz 3. *Es sei $R = (M, +, \cdot)$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal I und $\mathscr{A}_R$ die durch R erklärte AK-Ebene. Der Ring R ist genau dann fastgeordnet, wenn $\mathscr{A}_R$ im Sinne der Definition* 5, [4] *fastgeordnet ist.*

Beweis. 1. Es sei R fastgeordnet. Wir wollen beweisen, daß auf allen Geraden von $\mathscr{A}_R$ die Zwischenrelationen zu erklären sind, die sich mit Parallelprojektionen ([4], Def. 4) reproduzieren: Durch die Anordnung $\leqq$ von M definieren wir nach vorangehendem die Zwischenrelation $(* \,.\, * \,.\, *)$ von M. Es seien $A_i = [a_i, d_i]$ Punkte von $\mathscr{A}_R$ für $i \in \{1, 2, 3\}$. Sind A_i in einer Geraden $\langle c, b\rangle$ bzw. $\langle\!\langle m, b\rangle\!\rangle$ enthalten, dann setzen wir $(A_1 \,.\, A_2 \,.\, A_3) \Leftrightarrow (a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3)$ bzw. $(A_1 \,.\, A_2 \,.\, A_3) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (d_1 \,.\, d_2 \,.\, d_3)$. Es ist leicht nachzuprüfen, daß damit auf jeder Geraden von $\mathscr{A}_R$ eine Zwischenrelation definiert ist. Es bleibt zu beweisen, daß diese Zwischenrelationen durch alle Parallelprojektionen reproduziert werden. Es sei also $\varphi\,(g, g', \Pi(h))$ eine Parallelprojektion. Dann gilt $\bar{g} \not\parallel \bar{h}$ und $\bar{g}' \not\parallel \bar{h}$. Es seien $A_i = [a_i, d_i] \in g$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ mit $(A_1 \,.\, A_2 \,.\, A_3)$. Dann ist $A_i' = \varphi(A_i) = [a_i', d_i'] \in g'$ mit $A_i', A_i \in h_i$, wo $h_i \in \Pi(h)$. Wir werden die einzelnen Fälle untersuchen.

a) Es seien $g = \langle c, b\rangle$, $g' = \langle c', b'\rangle$ und $h = \langle m, k\rangle$. Wegen $\bar{g} \not\parallel \bar{h}$ und $\bar{g}' \not\parallel \bar{h}$ ist $\bar{c} \neq \bar{m}$ und $\bar{c}' \neq \bar{m}$, also $c - m \notin I$ und $c' - m \notin I$. Ferner setzen wir $h_i =$ $= \langle m, k_i\rangle$. Aus $A_i \in g, h_i$ folgt $d_i = ca_i + b = ma_i + k_i$ und $A_i' \in g', h_i \Rightarrow d_i' =$ $= c'a_i' + b' = ma_i' + k_i$. Wegen $(A_1 \,.\, A_2 \,.\, A_3)$ gilt weiter $(a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3)$. Wir erhalten $k_i = (c - m)\, a_i + b = (c' - m)\, a_i' + b'$ und nach $c - m \notin I$ gilt gemäß $(\cdot)$ und $(+)$: $(a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3) \Rightarrow ((c - m)\, a_1 + b \,.\, (c - m)\, a_2 + b \,.\, (c - m)\, a_3 + b) \Rightarrow (k_1 \,.\, k_2 \,.$ $.\, k_3) \Rightarrow ((c' - m)\, a_1' + b' \,.\, (c' - m)\, a_2' + b' \,.\, (c' - m)\, a_3' + b')$. Wegen $c' - m \notin$ $\notin I$ gibt es ein zu $c' - m$ inverses Element x mit $x \notin I$. Der letzten Beziehung nach ergibt sich dann gemäß $(+)$, $(\cdot)$: $(a_1' \,.\, a_2' \,.\, a_3')$ und folglich $(A_1' \,.\, A_2' \,.\, A_3')$.

b) Es seien $g = \langle c, b\rangle$, $g' = \langle c', b'\rangle$, $h = \langle\!\langle m, k\rangle\!\rangle$ und folglich $h_i = \langle\!\langle m, k_i\rangle\!\rangle$. Wegen $A_i \in g, h_i$ und $A_i' \in g', h_i$ erhält man $d_i = ca_i + b$, $a_i = md_i + k_i$, $d_i' =$ $= c'a_i' + b'$, $a_i' = md_i' + k_i$, woraus $a_i = m(ca_i + b) + k_i = mca_i + mb + k_i$ und zugleich $a_i' = m(c'a_i' + b') + k_i = mc'a_i' + mb' + k_i$ folgt. Hieraus ergibt sich $k_i = (1 - mc)\, a_i - mb = (1 - mc')\, a_i' - mb'$. Wegen $m \in I$ ist $mc \in I$, $mc' \in I$ und $1 - mc \notin I$, $1 - mc' \notin I$. Da zu $1 - mc'$ ein inverses Element in R existiert, erhalten wir nach $(+)$ und $(\cdot)$: $(A_1 \,.\, A_2 \,.\, A_3) \Rightarrow (a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3) \Rightarrow ((1 - mc)\, a_1 - mb \,.$ $.\, (1 - mc)\, a_2 - mb \,.\, (1 - mc)\, a_3 - mb) \Rightarrow (k_1 \,.\, k_2 \,.\, k_3) \Rightarrow ((1 - mc')\, a_1' - mb' \,.$ $.\, (1 - mc')\, a_2' - mb' \,.\, (1 - mc')\, a_3' - mb') \Rightarrow (a_1' \,.\, a_2' \,.\, a_3') \Rightarrow (A_1' \,.\, A_2' \,.\, A_3')$.

c) Es seien $g = \langle c, b\rangle$, $g' = \langle\!\langle c', b'\rangle\!\rangle$ und $h_i = \langle m, k_i\rangle$. Wegen $\bar{g} \not\parallel \bar{h}$ ist $\bar{c} \neq \bar{m}$, also $c - m \notin I$. Aus $A_i \in g, h_i$ und $A_i' \in g', h_i$ folgt dann $d_i = ca_i + b = ma_i + k_i$, $a_i' = c'd_i' + b'$, $d_i' = ma_i' + k_i$ und folglich $k_i = (c - m)\, a_i + b$, $d_i' = m(c'd_i' +$ $+ b') + k_i$, also $k_i = (1 - mc')\, d_i' - mb'$. Wegen $c - m \notin I$ und $1 - mc' \notin I$ erhält man nach $(+)$ und $(\cdot)$: $(A_1 \,.\, A_2 \,.\, A_3) \Rightarrow (a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3) \Rightarrow ((c - m)\, a_1 + b \,.\, (c - m)\,.$

$. a_2 + b . (c - m) a_3 + b) \Rightarrow (k_1 . k_2 . k_3) \Rightarrow ((1 - mc') d_1' - mb' . (1 - mc') d_2' - - mb' . (1 - mc') d_3 - mb') \Rightarrow (d_1' . d_2' . d_3') \Rightarrow (A_1' . A_2' . A_3')$.

d) Es seien $g = \langle\langle c, b\rangle\rangle$, $g' = \langle c', b'\rangle$ und $h_i = \langle m, k_i\rangle$. Wegen $\bar{g}' \not\parallel \bar{h}$ ist $\bar{c}' \neq \bar{m}$, also $c' - m \notin I$. Aus $A_i \in g, h_i$ und $A_i' \in g', h_i$ folgt dann $a_i = cd_i + b$, $d_i = ma_i + k_i$, $d_i' = c'a_i' + b' = ma_i' + k_i$ und folglich $d_i = mcd_i + mb + k_i$, $k_i = (1 - mc) d_i - mb$, $k_i = (c' - m) a_i' + b'$. Wegen $1 - mc \notin I$ und $c' - m \notin I$ erhält man nach $(+)$, $(\cdot)$: $(A_1 . A_2 . A_3) \Rightarrow (d_1 . d_2 . d_3) \Rightarrow ((1 - mc) d_1 - mb . (1 - mc) d_2 - mb . (1 - mc) d_3 - mb) \Rightarrow (k_1 . k_2 . k_3) \Rightarrow ((c' - m) a_1' + b' . (c' - m) a_2' + b' . (c' - m) a_3' + b') \Rightarrow (a_1' . a_2' . a_3') \Rightarrow (A_1' . A_2' . A_3')$.

e) Es seien $g = \langle\langle c, b\rangle\rangle$, $g' = \langle\langle c', b'\rangle\rangle$ und $h_i = \langle m, k_i\rangle$. Dann gilt $a_i = cd_i + b$, $d_i = ma_i + k_i$, $a_i' = c'd_i' + b'$, $d_i' = ma_i' + k_i$ und folglich $d_i = mcd_i + mb + k_i$, $d_i' = mc'd_i' + mb' + k_i$, also $k_i = (1 - mc) d_i - mb = (1 - mc') d_i' - mb'$. Wegen $1 - mc \notin I$ und $1 - mc' \notin I$ ergibt sich $(A_1 . A_2 . A_3) \Rightarrow (d_1 . d_2 . d_3) \Rightarrow ((1 - mc) d_1 - mb . (1 - mc) d_2 - mb . (1 - mc) d_3 - mb) \Rightarrow (k_1 . k_2 . k_3) \Rightarrow ((1 - mc') d_1' - mb' . (1 - mc') d_2' - mb' . (1 - mc') d_3' - mb') \Rightarrow (d_1' . d_2' . d_3') \Rightarrow (A_1' . A_2' . A_3')$.

2. Es sei $\mathscr{A}_R$ fastgeordnet. Die Zwischenrelation auf der Geraden $\langle 0, 0\rangle$ ruft eine Zwischenrelation auf M hervor mit $(a . b . c) :\Leftrightarrow ([a, 0] . [b, 0] . [c, 0])$. Wir beweisen, daß die auf diese Weise definierte Zwischenrelation die Beziehungen $(+)$ und $(\cdot)$ erfüllt.

Ad $(\cdot)$ Wir verwenden das Verfahren von [1], S. 65: Sei $(a_1 . a_2 . a_3)$ für $a_1, a_2, a_3 \in M$ erfüllt. Dann ist $([a_1, 0] . [a_2, 0] . [a_3, 0])$. Da die Geraden $\langle 0, 0\rangle$, $\langle -1, 1\rangle$ bzw. $\langle\langle 0, 0\rangle\rangle$, $\langle -1, 1\rangle$ fern sind, ist $\varphi(\langle 0, 0\rangle, \langle\langle 0, 0\rangle\rangle, \Pi(\langle -1, 1\rangle))$ eine Parallelprojektion mit $\varphi([a_i, 0]) = [0, a_i]$. Da $\mathscr{A}_R$ fastgeordnet ist, gilt $([a_1, 0] . [a_2, 0] . [a_3, 0]) \Rightarrow ([0, a_1] . [0, a_2] . [0, a_3])$. Sei $d \notin I$. Da die Geraden $\langle\langle 0, 0\rangle\rangle$, $\langle -d^{-1}, 1\rangle$ bzw. $\langle 0, 0\rangle$, $\langle -d^{-1}, 1\rangle$ fern sind, ist $\psi(\langle\langle 0, 0\rangle\rangle, \langle 0, 0\rangle, \Pi(\langle -d^{-1}, 1\rangle))$ eine Parallelprojektion mit $\psi([0, a_i]) = [da_i, 0]$ und folglich $([0, a_1] . [0, a_2] . [0, a_3]) \Rightarrow ([da_1, 0] . [da_2, 0] . [da_3, 0]) \Rightarrow (da_1 . da_2 . da_3)$. Dies bedeutet, daß $(a_1 . a_2 . a_3) \Rightarrow (da_1 . da_2 . da_3)$ für $d \notin I$ gilt.

Ad $(+)$ Das Verfahren von [1], S. 64 bleibt auch in unserem allgemeineren Fall ohne Änderung.

Wir haben bewiesen, daß für die Zwischenrelation $(* . * . *)$ auf M die Beziehungen $(+)$ und $(\cdot)$ gelten. Nach Satz 1 ist R fastgeordnet.

Bemerkung 3. Sei $\mathscr{A}_R$ eine fastgeordnete AK-Ebene. Dann ist der lokale Ring $R = (M, +, \cdot)$ fastgeordnet und $(M, \leqq)$ ist eine geordnete Menge. In jeder Richtung $\Pi(\langle c, b\rangle)$ läßt sich eine Zwischenrelation folgendermaßen erklären: $(\langle c, b_1\rangle . \langle c, b_2\rangle . \langle c, b_3\rangle) :\Leftrightarrow (b_1 . b_2 . b_3)$. Es ist leicht nachzuprüfen, daß diese Definition im Einklang mit Definition 6, [4] ist. Durch die so definierte Zwischenrelation lassen sich in $\Pi(\langle c, b\rangle)$ zwei Anordnungen mit $\langle c, b_1\rangle \leqq \langle c, b_2\rangle \Leftrightarrow b_1 \leqq b_2$ bzw. $\langle c, b_1\rangle \leqq \langle c, b_2\rangle \Leftrightarrow b_2 \leqq b_1$ bestimmen. Ferner nehmen wir an, daß in $\Pi(\langle c, b\rangle)$ stets die erste Anordnung erklärt ist. Ähnlicherweise führen wir eine Zwischenrelation und eine Anordnung auch in jeder Richtung $\Pi(\langle\!\langle c, b\rangle\!\rangle)$ von $\mathscr{A}_R$. Es sei $g = \langle c, b\rangle$ eine Gerade von $\mathscr{A}_R$ und seien H_g^+ und H_g^- die durch g bestimmten Halbebenen ([4], Def. 7). Führen wir in $\Pi(g)$ die Anordnung $\leqq$ ein, dann gilt $A = [a_1, a_2] \in H_g^+ \Leftrightarrow g < L(A, g)$. Ist $L(A, g) = \langle c, b'\rangle$, dann erhält man $a_2 = ca_1 + b'$ und $b' = a_2 - ca_1$. Aus $\langle c, b\rangle < \langle c, b'\rangle$ folgt $b < b'$ und $b < a_2 - ca_1$, also $a_2 > ca_1 + b$. Somit gilt $H_g^+ = \{[a_1, a_2] \mid a_2 > ca_1 + b\}$ und analog $H_g^- = \{[a_1, a_2] \mid a_2 < ca_1 + b\}$. Ist $g = \langle\!\langle c, b\rangle\!\rangle$, dann $H_g^+ = \{[a_1, a_2] \mid a_1 > ca_2 + b\}$ und $H_g^- = \{[a_1, a_2] \mid a_1 < ca_2 + b\}$.

Bemerkung 4. Den Satz 3 kann man als einen Spezialfall der allgemeineren Ergebnisse von [2] und [3] auffassen.

Satz 4. *Eine fastgeordnete AK-Ebene $\mathscr{A}_R$ ist genau dann konvex* ([4], Def. 8), *wenn der zugehörige fastgeordnete lokale Ring $R = (M, +, \cdot)$ konvex ist.*

Beweis. 1. Es sei der fastgeordnete lokale Ring R mit maximalem Ideal I konvex. Nach [2], Satz 10 genügt es zu zeigen, daß eine Menge $F(P, p)$ für $P \in p$ konvex ist. Wir setzen $P = [0, 0]$ und $p = \langle 0, 0\rangle$. Dann gilt $[a_1, a_2] \in F(P, p) \Leftrightarrow a_1 \in I \wedge a_2 = 0$. Es seien $[a, 0], [b, 0] \in F(P, p)$ und sei $([a, 0] . [c, 0] . [b, 0])$ für einen Punkt $[c, 0] \in p$ erfüllt. Dann ist $(a . c . b)$ in der Zwischenrelation von M. Wegen $a, b \in I$ ist $c \in I$, denn R ist konvex. Daraus folgt $[c, 0] \in F(P, p)$ und die Menge $F(P, p)$ ist konvex.

2. Sei $\mathscr{A}_R$ konvex, d. h. jede Menge $F(P, p)$ mit $P \in p$ ist konvex. Wir wählen $p = \langle 0, 0\rangle$ und $P = [0, 0]$. Es seien $a, c \in I$ und $b \in M$ mit $(a . b . c)$. Dann gilt $[a, 0], [c, 0] \in F(P, p)$, $[b, 0] \in p$ und $([a, 0] . [b, 0], [c, 0])$. Da $F(P, p)$ konvex ist, folgt daraus $[b, 0] \in F(P, p)$ und $b \in I$.

Satz 5. *In jeder fastgeordneten AK-Ebene $\mathscr{A}_R$ gilt* (F3), [4].

Beweis. Es seien g, h zwei verschiedene benachbarte Geraden von $\mathscr{A}_R$ mit einem gemeinsamen Punkt.

1. Es sei $h = \langle m, k\rangle$. Dann ist $g = \langle m', k'\rangle$ und $m - m' \in I$, $k - k' \in I$. Wegen $h \neq g$ erhält man $m \neq m' \vee k \neq k'$. Ist $[a, b] \in g, h$, dann $b = ma + k = m'a + k'$, also $(m - m')\,a = k' - k$. Aus $m = m'$ folgt $k' \neq k$ und folglich $0a \neq 0$, was ein Widerspruch ist. Somit ist $m \neq m'$. Setzen wir $r = m - m'$, dann ist $r \neq 0$. Gilt $r > 0$, so ergibt sich $r(a - 1) < ra < r(a + 1)$ und aus $0 < r$ folgt $r(a + 1) < ra < r(a - 1)$. In jedem Fall gibt es also zwei Elemente $x, y \in R$ mit $rx < ra < ry$. Setzen wir $x' = mx + k$, $y' = my + k$, dann ist $A = [x, x'] \in h$, $C = [y, y'] \in h$ und $rx = (m - m')\,x < ra = k' - k$. Hieraus folgt $mx + k < m'x + k'$ und $x' < m'x + k'$, woraus sich nach Bemerkung 3 $A \in H_g^-$ ergibt. Ganz ähnlich ist $k' - k < (m - m')\,y \Rightarrow y' > m'y + k' \Rightarrow C \in H_g^+$.

2. Ist $h = \langle\!\langle m, k\rangle\!\rangle$, dann geht man analog zum Fall 1 vor.

Satz 6. *Ist $\mathcal{A}_R$ eine fastgeordnete AK-Ebene, dann sind die folgenden Behauptungen äquivalent:*

(1) *Es gibt Elemente x, y, a, b von R mit $y \in I$, $xm \neq y$ $\forall m \in R$, $xa < y < xb$, wo I das maximale Ideal von R ist.*

(2) *In $\mathcal{A}_R$ gibt es zwei benachbarte Geraden g, h, die keinen Punkt gemeinsam haben und h in einer durch g erklärte Halbebene nicht enthalten ist.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2) Aus unseren Voraussetzungen folgt $x \in I$. Wir wählen $m_1, m_2, k_1, k_2 \in R$ derart, daß $x = m_2 - m_1$, $y = k_1 - k_2$ und setzen $g = \langle m_1, k_1 \rangle$, $h = \langle m_2, k_2 \rangle$. Wegen $x, y \in I$ sind g, h benachbart. Gilt $[x_1, x_2] \in g, h$, dann $x_2 = m_1 x_1 + k_1 = m_2 x_1 + k_2$ und $(m_2 - m_1) x_1 = k_1 - k_2$, was ein Widerspruch ist. Daher haben g, h keinen Punkt gemeinsam. Setzen wir $c_2 = m_2 a + k_2$, $d_2 = m_2 b + k_2$ und $A = [a, c_2]$, $B = [b, d_2]$, dann ist $A, B \in h$. Unseren Voraussetzungen nach erhalten wir $(m_2 - m_1)\ a < k_1 - k_2 < (m_2 - m_1)\, b$, also $m_2 a + k_2 < m_1 a + k_1$, $m_2 b + k_2 > m_1 b + k_1$ und $c_2 < m_1 a + k_1$, $d_2 > m_1 b + k_1$, woraus $A \in H_g^-$ und $B \in H_g^+$ folgt.

(2) $\Rightarrow$ (1) Es seien $g = \langle m_1, k_1 \rangle$ und $h = \langle m_2, k_2 \rangle$ Geraden, die (2) erfüllen. Setzen wir $x = m_2 - m_1$, $y = k_1 - k_2$, dann ist $y \in I$. Gilt $(m_2 - m_1)\, r = k_1 - k_2$ für $r \in R$, dann ergibt sich $m_2 r + k_2 = m_1 r + k_1 = s$ und hieraus folgt $[r, s] \in g, h$, also ein Widerspruch. Ferner gibt es $A = [a, c_2] \in H_g^-$, $B = [b, d_2] \in H_g^+$ mit $A, B \in h$, woraus man $c_2 = m_2 a + k_2$, $d_2 = m_2 b + k_2$, $c_2 < m_1 a + k_1$, $d_2 > m_1 b + k_1$, also $xa < y < xb$ erhält.

Satz 7. *Es sei R ein lokaler Ring und sei $\mathcal{A}_R$ die zu R gehörige AK-Ebene. R ist genau dann geordnet, wenn $\mathcal{A}_R$ geordnet ist* ([4], Def. 10).

Der Beweis von Satz 7 wurde für kommutative lokale Ringe in [1] durchgeführt. Das Beweisschema von [1] läßt sich aber auch für nichtkommutative lokale Ringe ohne wesentliche Änderungen anwenden.

Im nachstehenden Beispiel werden fastgeordnete lokale Ringe konstruiert, die nicht geordnet sind:

Es sei F ein geordneter (nicht notwendig kommutativer) Körper und sei ξ ein Isomorphismus von F in F. Für beliebige Elemente $(a, b), (c, d)$ von $F \times F$ setzen wir $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ und $(a, b) \,.\, (c, d) = (ac, ad + bc^{\xi})$. Dadurch werden binäre Operationen $+, \cdot$ auf $F \times F$ erklärt und die Struktur $R = (F \times F, +, \cdot)$ ist ein assoziativer Ring mit Nullelement $(0, 0)$ und mit Eins $(1, 0)$. Der Ring R ist genau dann kommutativ, wenn F kommutativ ist und ξ den identischen Automorphismus von F bedeutet. R ist ein lokaler Ring mit maximalen Ideal $I = \{(0, x) \mid x \in F\}$. Sind $(a, b), (c, d)$ Elemente von R mit $(a, b) \neq (0, 0)$, $(c, d) \neq (0, 0)$, dann gilt $(a, b), (c, d) \in I \Leftrightarrow (a, b) \,.\, (c, d) = (0, 0)$. I stellt daher die Menge aller zweiseitigen Nullteiler von R dar. Ist $\leqq$ eine Anordnung von F, dann führen wir auf $F \times F$ eine mit gleichem Symbol bezeichnete Anordnung wie folgt ein: $(a, b) \leqq (c, d) :\Leftrightarrow a < c \vee a = c,\ b \leqq d$. Diese Anordnung erfüllt die Forderung (R1):

Sei $(a, b) \leqq (c, d)$ und $(e, f) \in F \times F$. Ist $a \neq c$, dann $(a, b) \leqq (c, d) \Rightarrow a < c \Rightarrow \Rightarrow a + e < c + e \Rightarrow (a + e, b + f) \leqq (c + e, d + f) \Rightarrow (a, b) + (e, f) \leqq (c, d) + + (e, f)$. Ist $a = c$, dann $(a, b) \leqq (c, d) \Rightarrow b \leqq d \Rightarrow b + f \leqq d + f \Rightarrow (a + e, b + f) \leqq (c + e, d + f) \Rightarrow (a, b) + (e, f) \leqq (c, d) + (e, f)$.

Ist ξ eine monoton wachsende Abbildung in bezug auf $\leqq$ ([4], Bemerkung 1), dann ist R geordnet, d. h. gilt (2), Def. 2: Es seien $(a, b), (c, d) \in F \times F$ mit $(0, 0) \leqq \leqq (a, b)$ und $(0, 0) \leqq (c, d)$. Dann gilt $0 < a \vee a = 0$, $0 \leqq b$ und zugleich $0 < c \vee \vee c = 0$, $0 \leqq d$. Wir setzen $P = (a, b)(c, d) = (ac, ad + bc^{\xi})$ und betrachten die einzelnen Fälle: Ist $0 < a$, $0 < c$, dann $0 < ac$ und $(0, 0) < P$. Sei $0 < a$ und $c = 0$, $0 \leqq d$. Dann erhält man $ac = 0$ und $ad + bc^{\xi} = ad \geqq 0$, also $(0, 0) \leqq P$. Gilt $a = 0$, $0 \leqq b$ und $0 < c$, so ergibt sich $ac = 0$ und $ad + bc^{\xi} = bc^{\xi}$. Da ξ monoton wachsend ist, folgt aus $0 < c$ auch $0^{\xi} < c^{\xi}$, also $0 < c^{\xi}$. Daraus ergibt sich $0 \leqq bc^{\xi}$ und $(0, 0) \leqq P$. Es sei $a = 0$, $0 \leqq b$ und $c = 0$, $0 \leqq d$. Dann gilt $ac = 0$ und $ad + + bc^{\xi} = 0$, also $(0, 0) = P$.

Wit nehmen an, daß ξ nicht monoton wachsend ist, d. h. es gibt ein Element $x \in F$ mit $0 < x$ und $x^{\xi} < 0$. Wir beweisen, daß R fastgeordnet aber nicht geordnet ist:

Es seien $(a, b), (c, d) \in F \times F$ mit $(0, 0) \leqq (c, d)$, $(0, 0) \leqq (a, b)$ und $(a, b) \notin I$. Diesen Voraussetzungen nach gilt $0 < a$.

a) Sei $(c, d) \notin I$. Dann ist $0 < c$ und $0 < ac$, was $(0, 0) < (a, b)(c, d)$ bedeutet.

b) Sei $(c, d) \in I$. Dann ist $c = 0$ und $0 \leqq d$. Mithin gilt $(a, b) \,.\, (c, d) = (0, ad) \geqq \geqq (0, 0)$.

R ist also fastgeordnet. Ferner zeigen wir, daß R die Forderung (2) der Definition 2 nicht erfüllt, d. h. R nicht geordnet ist:

Es seien x, b, d aus F mit $0 < x$, $x^{\xi} < 0$ und $0 < b$. Dann ist $(0, 0) < (0, b)$, $(0, 0) < (x, d)$ und $(0, b)(x, d) = (0, bx^{\xi}) < (0, 0)$. R ist sogar „scharf" fastgeordnet, d. h. für $(0, 0) \leqq (a, b)$, $(0, 0) \leqq (c, d)$ und $(a, b) \notin I$ muß stets $(0,0) \leqq (a, b)(c, d)$, aber nicht notwendig $(0, 0) \leqq (c, d)(a, b)$ gelten.

Wir konstruieren noch einen Automorphismus eines Körpers, der nicht monoton wachsend ist: Es sei F der Körper der rationalen Funktionen einer Veränderlichen mit reellen Koeffizienten. Durch die Vorschrift $(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n)/(b_0x^m + + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m) > 0 :\Leftrightarrow a_0b_0 > 0$ ist eine Anordnung auf F eingeführt. Die Abbildung $\xi : f(x)/g(x) \to f(-x)/g(-x)$ ist ein Automorphismus des Körpers F. Sei $f(x) = a_0x^n + \ldots + a_n$ mit $0 < a_0$, wo n eine gerade natürliche Zahl ist und $g(x) = b_0x^m + \ldots + b_m$ mit $0 < b_0$, wo m eine ungerade natürliche Zahl ist. Dann ist $f(x)/g(x) > 0$ und wegen $f(-x) = a_0x^n - a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, $g(-x) = = -b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m$ ergibt sich $f(-x)g(-x) = (f(x)/g(x))^{\xi} < 0$.

Unserem Beispiel nach gibt es fastgeordnete lokale Ringe, die nicht geordnet sind. Daher gibt es auch fastgeordnete AK-Ebenen, die nicht geordnet sind. Ferner sei R ein fastgeordneter lokaler Ring aus unserem Beispiel und sei $\mathscr{A}_R$ die zu R konstruierte AK-Ebene. Wir führen einige Eigenschaften von $\mathscr{A}_R$ an.

(1) $\mathscr{A}_R$ ist konvex: Nach Satz 4 genügt es dazu zu zeigen, daß R konvex fastgeordnet ist: Für beliebiges $(0, x) \in I$ gilt $(0, x) < (1, 0)$ und nach Satz 2 ist R konvex.

(2) $\mathscr{A}_R$ erfüllt die Forderung (F1), [4]: Wir beweisen eine einigermaßen allgemeinere Behauptung: Ist R ein konvex fastgeordneter lokaler Ring mit maximalem Ideal I derart, daß $a, b \in I \Rightarrow ab = 0$ gilt, dann erfüllt $\mathscr{A}_R$ die Forderung (F1): Es seien A_1, A_2, A_3 Punkte und g, h Geraden von $\mathscr{A}_R$ mit $A_1, A_2, A_3 \in h$, $A_1, A_3 \in g$ und $(A_1 \,.\, A_2 \,.\, A_3)$. Wir wollen $A_2 \in g$ beweisen. Gilt $g = h$, dann ist offenbar $A_2 \in g$. Ist $A_1 = A_3$, dann erhält man nach (Z7), [4] $(A_1 \,.\, A_2 \,.\, A_3) \Rightarrow A_1 = A_2$ und folglich $A_2 \in g$. Nehmen wir also $A_1 \neq A_3$ und $g \neq h$ an. Nach [4], Def. 3, Bem. 2 sind A_1, A_3 und auch g, h benachbart. Da R konvex ist, ist auch $\mathscr{A}_R$ konvex und aus $(A_1 \,.\, A_2 \,.\, A_3)$ folgt, daß A_1, A_2 benachbart sind. Sei $h = \langle m, k \rangle$. Da g, h benachbart sind, läßt sich die Gerade g in der Form $\langle m', k' \rangle$ mit $m - m' \in I$ und $k - k' \in I$ ausdrücken. Setzen wir $A_i = [a_i, b_i]$ für $i \in \{1, 2, 3\}$, dann ist $a_2 - a_1 \in I$. Wegen $A_1 \in g, h$ und $A_2 \in h$ erhält man $b_1 = ma_1 + k = m'a_1 + k'$, $b_2 = ma_2 + k$, woraus $(m - m')\, a_1 + k = k'$ folgt. Wegen $m - m' \in I$ und $a_2 - a_1 \in I$ gilt nach unserer Voraussetzung $0 = (m - m')\,(a_2 - a_1)$, also $(m - m')\, a_2 + k = (m - m')\, a_1 + k = k'$. Dies hat zur Folge $b_2 = ma_2 + k = m'a_2 + k'$, also $A_2 \in g$. Analog geht man im Falle $h = \langle\!\langle m, k \rangle\!\rangle$ vor.

(3) Nach Satz 5 und nach (2) gelten in $\mathscr{A}_R$ die Behauptungen (F1) und (F3) aus [4]. Da $\mathscr{A}_R$ nicht geordnet ist, so soll nach [4], Satz 10 die Forderung (F2) in $\mathscr{A}_R$ nicht gelten. Wir beweisen dies auch direkt: Es seien $g = \langle (0, 0), (0, 0) \rangle$ und $h = \langle (0, 1), (0, 0) \rangle$ Geraden von $\mathscr{A}_R$. Dann ist $g \neq h$ und wegen $(0, 1) \in I$ sind g, h benachbart. Ein Punkt $[(a_1, a_2), (b_1, b_2)]$ liegt auf g bzw. h genau dann, wenn $(b_1, b_2) = (0, 0)$ bzw. $(b_1, b_2) = (0, a_1^\xi)$ ist. Die Geraden g, h enthalten daher die Punkte $[(0, a_2), (0, 0)]$ mit $a_2 \in F$ gemeinsam. Ist $X = [(a_1, a_2), (0, a_1^\xi)]$ ein Punkt von h, dann nach Bemerkung 3 gilt $X \in H_g^+ \Leftrightarrow 0 < a_1^\xi$ und $X \in H_g^- \Leftrightarrow a_1^\xi < 0$. Es sei x ein Element von F mit $0 < x$ und $x^\xi < 0$. Setzen wir $A = [(1, a), (0, 1)]$ und $C = [(x, 0), (0, x^\xi)]$, dann $A, C \in h$ und $A \in H_g^+$, $C \in H_g^-$. Wir nehmen an, daß es einen Punkt B mit $B \in g, h$ und $(A \,.\, B \,.\, C)$ gibt. Dann gilt $B = [(0, b), (0, 0)]$ und $((1, a) \,.\, (0, b) \,.\, (x, 0))$, also $(1, a) \leqq (0, b) \leqq (x, 0) \vee (x, 0) \leqq (0, b) \leqq (1, a)$. Aus $x, 1 \neq 0$ folgt daraus $1 < 0 < x \vee x < 0 < 1$, was aber ein Widerspruch zu $0 < 1$ und $0 < x$ ist. Auf der Geraden h gibt es also keinen Punkt von g, der zwischen A und C liegt.

Zum Schluß konstruieren wir eine konvex geordnete AK-Ebene, in der solche zwei benachbarte Geraden g, h mit keinem gemeinsamen Punkt existieren, daß h die Punkte verschiedener Halbebenen von g enthält: Es sei F ein Körper der rationalen Funktionen von abzählbaren Veränderlichen mit reellen Koeffizienten, d. h. $f(x_1, \ldots, x_n, \ldots)/g(x_1, \ldots, x_n, \ldots) \in F$. Ist k eine natürliche Zahl, dann ist $\varphi : \mathrm{m} \to \mathrm{m} + \mathrm{k}$ eine injektive Abbildung der natürlichen Zahlen in sich. Definieren wir eine Abbildung $\xi : F \to F$ durch $f(x_1, \ldots, x_n, \ldots)/g(x_1, \ldots, x_n, \ldots) \to f(x_{\varphi(1)}, \ldots \ldots, f_{\varphi(n)}, \ldots)/g(x_{\varphi(1)}, \ldots, x_{\varphi(n)}, \ldots)$, dann ξ ist ein Isomorphismus von F in F mit $F^\xi \neq$

$\neq F$ (Eine rationale Funktion, in der sich eine Veränderliche mit einem Index p mit p $\leqq$ k vorfindet, gehört nicht zu F^ξ). Wir setzen $f = f(x_1, \ldots, x_n, \ldots) > 0$, falls der Koeffizient beim Glied mit dem höchsten Exponent der Veränderlichen x_1 positiv ist. Gibt es in f mehr Glieder mit dem höchsten Exponent von x_1, dann betrachten wir den von ihnen, der den höchsten Exponent von x_2 besitzt u.s.w. Setzen wir $f/g > 0 :\Leftrightarrow f > 0, g > 0 \vee f < 0, g < 0$, dann ist $(F, \leqq)$ ein geordneter Körper. Die Abbildung $\xi : F \to F$ ist monoton wachsend für eine beliebige natürliche k. Durch F und ξ erklären wir nach vorangehendem den Ring $R = (F \times F, +, \cdot)$. Wir beweisen, daß die Elemente $x, y, a, b \in R$ mit $y \in I$, $xm \neq y\ \forall m \in R$ und $xa < y < xb$ existieren: Wir wählen $x = (0, x_1^2)$, $y = (0, x_1)$, $a = (0, 0)$, $b = (x_1, 0)$, wo x_1 eine Veränderliche von F ist. Nehmen wir $xm = y$ an, dann gilt $(0, x_1^2) \cdot (m_1, m_2) = (0, x_1)$, also $(0, x_1^2 m_1^\xi) = (0, x_1)$ und $x_1^2 m_1^\xi = x_1$. Wegen $m_1^\xi = 1/x_1 \notin F^\xi$ erhalten wir einen Widerspruch. Aus $0 < x_1$ folgt $(0, x_1^2)(0, 0) = (0, 0) < (0, x_1)$, also $xa < y$. Wegen $x_1 < x_1^2 x_{1+k}$ ist $(0, x_1) < (0, x_1^2 x_{1+k})$ und aus $(0, x_1^2)(x_1, 0) = (0, x_1^2 x_1^\xi) = (0, x_1^2 x_{1+k})$ folgt daraus $y < xb$. Erklären wir eine AK-Ebene $\mathscr{A}_R$ durch R, dann ist $\mathscr{A}_R$ konvex geordnet und nach Satz 6 gibt es in $\mathscr{A}_R$ zwei Geraden g, h der vorgeschriebenen Eigenschaften.

Literatur

[1] *Kunze, M.:* Angeordnete Hjemslevsche Geometrie. Dissertation, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel 1975.

[2] *Machala, F.:* Angeordnete affine Klingenbergsche Ebenen. Czech. Math. J. *30* (105), 1980, 341—356.

[3] *Machala, F.:* Angeordnete affine lokale Ternärringe und angeordnete affine Klingenbergsche Ebenen. Czech. Math. J. *30* (105), 1980, 556—568.

[4] *Machala, F.:* Fastgeordnete und geordnete Klingenbergsche Ebenen. Čas. pěst. mat. *106*, 1981, 138—155.

Anschrift des Verfassers: 771 46 Olomouc, Leninova 26 (Přírodovědecká fakulta UP).