Časopis pro pěstování matematiky

Zdeněk Rozenský

Verbände von Kernen der Abbildungen, die orthogonaltreu sind

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 104 (1979), No. 2, 134--148

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/118010`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 104 (1979), Praha

VERBÄNDE VON KERNEN DER ABBILDUNGEN, DIE ORTHOGONALTREU SIND*)

ZDENĚK ROZENSKÝ, Praha

(Eigegangen am 16. Juli 1976)

Dem Andenken an Prof. JIŘÍ FÁBERA *gewidment*

1. EINFÜHRUNG

In der Arbeit [2] studiert J. HAVRDA Mengen mit einer Relation, welche die üblichen Eigenschaften der Orthogonalitätsrelation besitzt. Diese Relationsstrukturen entstanden aus der konkreten Situation in Vektorräumen mit einem Skalarprodukt. Eine natürliche Analogie von unitären Abbildungen sind dann die Abbildungen, welche orthogonaltreu sind (diese Abbildungen bezeichnen wir im Weiteren als Orthoabbildungen).

Die Klasse von Mengen mit Orthogonalität (Objekte) gemeinsam mit Orthoabbildungen (Morphismen) bilden eine Kategorie. Im vorliegenden Artikel möchten wir für diese Situation das von T. STURM in [10] formulierte Programm realisieren, welches für den Fall der Kategorie geordneter Mengen und isotoner Abbildungen in den Arbeiten [5–8] gestellt und gelöst wird.

Es sei eine Kategorie $\mathscr{K}$ gegeben, derer Objekte, z. B. irgendwelche algebraische Systeme, und derer Morphismen alle übliche Homomorphismen unter den Objekten sind (siehe [3], Seite 49). Ist $\mathscr{A}$ ein $\mathscr{K}$-Objekt, dann ist die $\mathscr{K}$-Kongruenz auf $\mathscr{A}$ so eine Äquivalenz auf der Trägermenge $\mathscr{A}$, die als Kern**) von irgendeinem aus $\mathscr{A}$ gehenden $\mathscr{K}$-Morphismus angesehen werden kann.

Es ist nötig eine Charakterisation derjenigen Äquivalenzen auf den Trägermengen der $\mathscr{K}$-Objekte anführen, die $\mathscr{K}$-Kongruenzen sind. Weiter ist es nötig, die Analogien der Sätze über den Isomorphismus zu formulieren. Ordnet man das System aller $\mathscr{K}$-Kongruenzen auf dem gegebenen $\mathscr{K}$-Objekt durch die Inklusion, dann braucht man die Eigenschaften dieser geordneten Menge zu untersuchen.

Meinen Berufskollegen Dr. Teo Sturm und Doz. Dr. Jan Havrda bin ich für zahlreiche Ratschläge und Anregungen dankbar.

---

*) Die Arbeit entstand in einem an der elektrotechnischen Fakultät der TH Prag von Prof. JIŘÍ FÁBERA geleiteten Seminar über mathematische Grundlagen der Quantentheorien.

**) Unter dem *Kern* der Abbildung $f: X \to Y$ verstehen wir eine Äquivalenz $\ker f =_{\mathrm{Df}} f_{-1} f$, d. h. für $x, y \in X$ gilt $(x, y) \in \ker f$ genau dann, wenn $f(x) = f(y)$ ist, siehe auch [1], Kap. I, § 3.

2. GRUNDEIGENSCHAFTEN VON ORTHOKONGRUENZEN

2.1 Bezeichnungen und einleitende Bemerkungen. a) Ist X eine Menge und r eine binäre Relation, dann bezeichnen wir mit dem Symbol (X, r) eine Relationsstruktur mit der Trägermenge X, auf der die binäre Relation $r \cap (X \times X)$ betrachtet wird.

Weiter definieren wir für das Relationssystem (X, r) eine Relation r': ist $Y, Z \in \in \exp X$, dann gilt $Y r' Z$ genau dann, wenn $Y = Z = \emptyset$ ist, oder wenn $y \in Y$ und $z \in Z$ so existieren, dass $y\, r\, z$ gilt. Es ist klar, dass r' eine binäre Relation auf $\exp X$ ist.

Den *Kern* $\ker f$ einer Abbildung $f : X \to Y$ definieren wir im Sinne der Bemerkung unter dem Strich auf Seite 134. Das Symbol (x, y) bedeutet die gewöhnliche Bezeichnung des geordneten Paares. Bei der Bezeichnung der Inklusion unterscheiden wir die Symbole $\subset$ und $\subseteq$.

Mit dem Symbol $E(X)$ bezeichnen wir die Menge aller Äquivalenzen auf der Menge X. Ist $\sigma \in E(X)$, dann ist $\mathrm{id}_X \subseteq \sigma$, wo $\mathrm{id}_X = \{(x, x);\ x \in X\}$ die Identität auf der Menge X bedeutet, es gilt $\sigma^{-1} = \sigma$, $\sigma\sigma \subseteq \sigma$ und $\sigma \subseteq X \times X$. Der Äquivalenz $\sigma \in E(X)$ ordnen wir die sogenannte natürliche Abbildung $\operatorname{nat} \sigma : X \to X/\sigma$ folgendermassen zu: ist $x \in X$, dann existiert ein einziges Element $Y \in X/\sigma$, so dass $x \in Y$ ist, und dann ist $\operatorname{nat} \sigma(x) = Y$. Die Bezeichnungen sind gebrauchlich – siehe [1], Kap. I, § 3.

b) Nach [2] nennen wir die binäre Relation $\perp$, welche auf einer nichtleeren Menge Ω definiert wird, die *Orthogonalität* genau dann, wenn es gilt:

1. $x \perp y \Rightarrow y \perp x$ für jedes $x, y \in \Omega$,
2. in der Menge Ω existiert ein Element o (das sogenannte *Nullelement*), so dass $o \perp x$ für jedes $x \in \Omega$ gilt,
3. für kein Element $o \neq x \in \Omega$ gilt $x \perp x$.

Wird auf einer Menge Ω die Orthogonalität definiert, dann nennen wir die Abbildung $f : \Omega \to \Omega$ eine *Orthoabbildung* (oder auch *Orthohomomorphismus*, bzw. *$\perp$-Abbildung*) genau dann, wenn die Implikation $(x, y \in \Omega,\ x \perp y) \Rightarrow f(x) \perp f(y)$ (siehe auch [4]) gilt.

c) Das Trippel $(\Omega, \perp, o)$ bezeichnet ein algebraisches System im Sinne von [3] mit einer binären Relation und mit einer Nulloperation. Die Orthoabbildung ist nach der angeführten Definition offenbar ein Homomorphismus dieser algebraischen Systeme (siehe [4], Bemerkung 4.2; deshalb verwenden wir auch den obenangeführten Termin Orthohomomorphismus). Anstatt von $(\Omega, \perp, o)$ schreiben wir weiter nur $(\Omega, \perp)$ und nennen $(\Omega, \perp)$ eine *Menge mit Orthogonalität*.

2.2 Definition. *Orthokongruenz* auf einem System $(\Omega, \perp)$ wird soeine Äquivalenz $\sigma \in E(\Omega)$ genannt, für welche eine Menge mit Orthogonalität $(\Omega_1, \perp_1)$ und eine Orthoabbildung $f : \Omega \to \Omega_1$ aus $(\Omega, \perp)$ in $(\Omega_1, \perp_1)$ so existieren, dass $\sigma = \ker f$ gilt.

Das System aller Orthokongruenzen auf der Menge Ω bezeichnen wir mit $L(\Omega, \perp)$.

2.3 Satz. (Charakterisation der Elemente aus $L(\Omega, \perp)$). *Die Äquivalenz $\sigma \in E(\Omega)$ is genau dann ein Element aus $L(\Omega, \perp)$, wenn die Bedingung*

$$(1) \qquad (X \in \Omega/\sigma \text{ und } o \notin X) \Rightarrow (\forall x, y \in X : x \not\perp y)$$

*gilt. Offensichtlich ist $L(\Omega, \perp) \subseteq E(\Omega)$.**)*

Beweis. Die Inklusion $L(\Omega, \perp) \subseteq E(\Omega)$ folgt unmittelbar von der Definition des Systems $L(\Omega, \perp)$.

I. Die Äquivalenz σ erfülle (1). Auf Ω/σ definieren wir für $X, Y \in \Omega/\sigma$:

$$X \perp_\sigma Y \Leftrightarrow X \perp' Y,$$

d. h. $\perp_\sigma = \perp' \cap (\Omega/\sigma)^2$.

Es sei $X, Y \in \Omega/\sigma$, $X \perp_\sigma Y$. Dann existieren $x \in X$, $y \in Y$, so dass $x \perp y$ gilt (es ist $\Omega \neq \emptyset$, woraus sich ergibt, dass $X, Y \neq \emptyset$ ist). Dann ist auch $y \perp x$ und daraus folgt $Y \perp_\sigma X$, d. h. die Relation $\perp_\sigma$ ist auf Ω/σ symmetrisch. Es sei $X \in \Omega/\sigma$, $o \notin X$, woraus nach (1) $X \not\perp' X$ folgt und daher ist $X \not\perp_\sigma X$.

Ist $o \in X \in \Omega/\sigma$, dann gilt

$$o \perp o \Rightarrow X \perp' X \Rightarrow X \perp_\sigma X .$$

(Die Rolle von o in $(\Omega/\sigma, \perp_\sigma)$ spielt dasjenige $X \in \Omega/\sigma$, für welches $o \in X$ ist. Dieses X bezeichnen wir o_σ: für alle $Y \in \Omega/\sigma$ ist offenbar $Y \perp_\sigma o_\sigma$, denn es ist $Y \neq \emptyset$, und für alle $y \in Y$ ist $y \perp o$). Also ist $(\Omega/\sigma, \perp_\sigma)$ eine Menge mit Orthogonalität.

Wir zeigen jetzt, dass die Surjektion $\operatorname{nat} \sigma : \Omega \to \Omega/\sigma$ eine $\perp$-Abbildung aus $(\Omega, \perp)$ auf $(\Omega/\sigma, \perp_\sigma)$ ist. Sind $x, y \in \Omega$, $x \perp y$, dann ist $\operatorname{nat} \sigma(x) \perp' \operatorname{nat} \sigma(y)$, d. h. $\operatorname{nat} \sigma(x) \perp_\sigma \operatorname{nat} \sigma(y)$. Es ist $\ker \operatorname{nat} \sigma = \sigma$ und nach der Definition von $L(\Omega, \perp)$ gilt $\sigma = \ker \operatorname{nat} \sigma \in L(\Omega, \perp)$.

II. Es sei $\sigma \in L(\Omega, \perp)$ und $X \in \Omega/\sigma$, $o \notin X$. Es ist $\sigma \in L(\Omega, \perp)$ und deswegen existiert die Menge mit Orthogonalität $(\Omega_1, \perp_1)$ und die $\perp$-Abbildung $f : \Omega \to \Omega_1$ aus $(\Omega, \perp)$ in $(\Omega_1, \perp_1)$, so dass $\sigma = \ker f$ ist. Die Behauptung (1) beweisen wir durch einen Widerspruch. Existieren $x, y \in X$ so, dass $x \perp y$ ist, dann gilt $f(x) \perp_1 f(y)$. Es ist $x, y \in X \in \Omega/\ker f$, d. h. $x \ker f\, y$, oder mit anderen Worten ist $f(x) = f(y)$. Folglich ist $f(x) \perp f(y) = f(x)$, woraus sich ergibt, dass $f(x) = o_1$ ist (o_1 ist das Nullelement in $(\Omega_1, \perp_1)$). Für die $\perp$-Abbildung f ist $f(o) = o_1 = f(x)$. Daraus folgt die Implikation

$$o \ker f\, x \Leftrightarrow o \in X ,$$

welche der Voraussetzung $o \notin X$ widerspricht.

Also für alle $x, y \in X \in \Omega/\sigma$ gilt: ist $o \notin X$, dann ist $x \not\perp y$, d. h. es gilt (1).

---

*) Die Bedingung (1) ist offenbar logisch äquivalent mit folgender Forderung:

$$(\forall X \in \Omega/\sigma)\, (\forall x, y \in X)\, (x \perp y \Rightarrow o \in X) .$$

Diese Forderung verwenden wir oft anstatt von (1).

2.4 Bemerkung. a) Ist $\sigma \in E(\Omega)$ eine Äquivalenz auf Ω, dann definieren wir $o_\sigma = \operatorname{nat}\sigma(o)$ und $\perp_\sigma = \perp' \cap (\Omega/\sigma)^2$.

b) Im Teile I des Beweises vom Satz 2.3 haben wir unter Anderem gezeigt, dass $(\Omega/\sigma, \perp_\sigma)$ für $\sigma \in L(\Omega, \perp)$ eine Menge mit Orthogonalität ist und o_σ ihr Nullelement; dabei nat $\sigma : \Omega \to \Omega/\sigma$ ist eine $\perp$-Abbildung aus $(\Omega, \perp)$ in $(\Omega/\sigma, \perp_\sigma)$.

c) Den Satz 2.3 kann man auch folgendermassen formulieren: die Relation $\sigma \in L(\Omega, \perp)$ gilt genau dann, wenn $(\Omega/\sigma, \perp_\sigma)$ eine Menge mit Orthogonalität ist.

2.5 Satz. *Es sei* $\sigma \in E(\Omega)$ *und* $\perp_1$ *eine Orthogonalitätsrelation auf* Ω/σ. *Dann gilt*:

1. *Ist* nat $\sigma : \Omega \to \Omega/\sigma$ *ein Orthohomomorphismus aus* $(\Omega, \perp)$ *auf* $(\Omega/\sigma, \perp_1)$, *dann ist* $\sigma \in L(\Omega, \perp)$ *und* $\perp_\sigma \subseteq \perp_1$.

2. *Ist* $\perp_\sigma \subseteq \perp_1$, *dann ist* $\sigma \in L(\Omega, \perp)$ *und* nat $\sigma : \Omega \to \Omega/\sigma$ *ist ein Orthohomomorphismus aus* $(\Omega, \perp)$ *auf* $(\Omega/\sigma, \perp_1)$.

3. *Ist* $\sigma \in L(\Omega, \perp)$, *dann ist* $\perp_\sigma = \bigcap\{\perp_2 :$ nat $\sigma : \Omega \to \Omega/\sigma$ *ist ein Orthohomomorphismus aus* $(\Omega, \perp)$ *auf die Menge mit Orthogonalität* $(\Omega/\sigma, \perp_2)\}$.

Beweis. 1. nat $\sigma : \Omega \to \Omega/\sigma$ ist ein Orthohomomorphismus aus $(\Omega, \perp)$ in $(\Omega/\sigma, \perp_1)$, und deshalb ist $\sigma = \ker \operatorname{nat}\sigma \in L(\Omega, \perp)$. Sei $X \perp_\sigma Y$. Dann gibt es $x \in X$, $y \in Y$, so dass $x \perp y$ gilt; nat $\sigma : \Omega \to \Omega/\sigma$ ist ein Orthohomomorphismus und daher folgt, dass $X = \operatorname{nat}\sigma(x) \perp_1 \operatorname{nat}\sigma(y) = Y$ ist. Also gilt $\perp_\sigma \subseteq \perp_1$.

2. $(\Omega/\sigma, \perp_1)$ ist eine Menge mit Orthogonalität und es ist $\perp_\sigma \subseteq \perp_1$. Es sei $x, y \in \Omega$, $x \perp y$. Daraus ergibt sich $\operatorname{nat}\sigma(x) \perp' \operatorname{nat}\sigma(y)$, woraus $\operatorname{nat}\sigma(x) \perp_\sigma \operatorname{nat}\sigma(y)$ folgt. Da $\perp_\sigma \subseteq \perp_1$ ist, folgt daher ferner, dass $\operatorname{nat}\sigma(x) \perp_1 \operatorname{nat}\sigma(y)$ ist, d. h. nat σ ist ein Orthohomomorphismus aus $(\Omega, \perp)$ auf $(\Omega/\sigma, \perp_1)$. Daraus ergibt sich $\sigma = \ker \operatorname{nat}\sigma \in L(\Omega, \perp)$.

3. Wir bezeichnen:

$K_\sigma = \{\perp_2 : (\Omega/\sigma, \perp_2)$ ist eine Menge mit Orthogonalität, nat $\sigma : \Omega \to \Omega/\sigma$ ist $\perp$-Homomorphismus aus $(\Omega, \perp)$ auf $(\Omega/\sigma, \perp_2)\}$.

Es ist $\sigma \in L(\Omega, \perp)$ und deshalb gilt nach Absatz 2.4 b $\perp_\sigma \in K_\sigma$; also ist $\bigcap K_\sigma \subseteq \perp_\sigma$. Nach der Behauptung 2.5.1 ist $\perp_\sigma \subseteq \perp_2$ für alle $\perp_2 \in K_\sigma$ und demzufolge gilt auch die Inklusion $\perp_\sigma \subseteq \bigcap K_\sigma$.

2.6 Satz. *Es sei* $(\Omega_1, \perp_1)$ *eine Menge mit Orthogonalität und* $f : \Omega \to \Omega_1$ *ein* $\perp$*-Homomorphismus aus* $(\Omega, \perp)$ *in* $(\Omega_1, \perp_1)$. *Für* $\sigma \in L(\Omega_1, \perp_1)$ *definieren wir*

$$f_{-2}(\sigma) = \bigcup\{(f_{-1}(X))^2 : X \in \Omega_1/\sigma\}\,.$$

Dann ist $f_{-2}(\sigma) \in L(\Omega, \perp)$ *und* $\ker f \subseteq f_{-2}(\sigma)$.

Beweis. Unmittelbar aus der Definition der Äquivalenz auf Ω folgt, dass $f_{-2}(\sigma) \in E(\Omega)$ ist. Es sei $Y \in \Omega/f_{-2}(\sigma)$ und $o \notin Y$. Dann existiert genau ein Element $X \in \Omega_1/\sigma$, so dass $Y = f_{-1}(X)$ ist; aus den Relationen $o \notin Y$ und $o_1 = f(o)$ folgt, dass $o_1 \notin X$ ist. Es sei $y_1, y_2 \in Y$; ist $y_1 \perp y_2$, dann ist auch $f(y_1) \perp f(y_2)$ und dabei ist $f(y_1), f(y_2) \in X \in \Omega/\sigma$, $o_1 \notin X$. Aber das ist nach dem Satz 2.3 ausgeschlossen, denn es ist

$\sigma \in L(\Omega_1, \perp_1)$ und die Äquivalenz $f_{-2}(\sigma)$ erfüllt also die Bedingung (1) des Satzes 2.3, d. h. es ist $f_{-2}(\sigma) \in L(\Omega, \perp)$. Es sei $(x, y) \in \ker f$. Dann ist $f(x) = f(y)$. Die Relation σ ist eine Äquivalenz auf Ω_1, und es existiert also genau ein Element $X \in \in \Omega_1/\sigma$, für welches $f(x) = f(y) \in X$ gilt. Dann gilt aber $(x, y) \in (f_{-1}(X))^2 \subseteq f_{-2}(\sigma)$, womit die Inklusion $\ker f \subseteq f_{-2}(\sigma)$ hergeleitet ist.

2.7 Satz. (Kanonische Zerlegung des $\perp$-Homomorphismus, eine Analogie des sogenannten ersten Satzes über den Isomorphismus.)

Es sei $f : \Omega \to \Omega_1$ ein $\perp$-Homomorphismus aus $(\Omega, \perp)$ in die Menge mit Orthogonalität $(\Omega_1, \perp_1)$. Dann ist die Abbildung

$$f' = \operatorname{nat} \ker f : \Omega \to \Omega/\ker f$$

ein surjektiver $\perp$-Homomorphismus aus $(\Omega/\perp)$ auf $(\Omega/\ker f, \perp_{\ker f})$, die durch die Vorschrift

$$(X \in \Omega/\ker f,\ x \in X) \Rightarrow (f''(X) = f(x))$$

definierte Abbildung

$$f'' : \Omega/\ker f \to f(\Omega)$$

ist ein bijektiver $\perp$-Homomorphismus aus $(\Omega/\ker f, \perp_{\ker f})$ auf $(f(\Omega), \perp_1)$, die Abbildung

$$f''' = \mathrm{id}_{f(\Omega)} : f(\Omega) \to \Omega_1$$

ist eine $\perp$-homomorphe Insertion von $(f(\Omega), \perp_1)$ in $(\Omega_1, \perp_1)$.

Dabei gilt $f = f'''f''f'$.

Beweis. Nach der Voraussetzung über die Abbildung $f : \Omega \to \Omega_1$, ist $\ker f \in \in L(\Omega, \perp)$ und es gilt folglich die Behauptung über die Abbildung $f' : \Omega \to \Omega/\ker f$ nach der Bemerkung 2.4b.

Die Abbildung $f'' : \Omega/\ker f \to f(\Omega)$ ist offensichtlich korrekt definiert (der Funktionenwert $f''(X)$ hängt von der Wahl des Representanten $x \in X$ nicht ab) und offensichtlich ist sie eine Bijektion. Es sei $X, Y \in \Omega/\ker f$ und $X \perp_{\ker f} Y$. Dann existieren solche Elemente $x \in X$ und $y \in Y$, dass $x \perp y$ gilt (siehe die Bemerkung 2.4, es ist nämlich $\perp_{\ker f} = \perp' \cap (\Omega/\ker f)^2$) und es ist also auch $f(x) \perp_1 f(y)$. Davon und aus der Definition von f'' ergibt sich, dass auch $f''(X) = f(x) \perp_1 f(y) = f''(Y)$ ist, d. h. f'' ist ein $\perp$-Homomorphismus aus $(\Omega/\ker f, \perp_{\ker f})$ auf $(f(\Omega), \perp_1)$.

Die Behauptung über f''' und die Gleichheit $f = f'''f''f'$ sind klar.

2.8 Satz. *Es sei $f : \Omega \to \Omega_1$ ein $\perp$-Homomorphismus aus $(\Omega, \perp)$ in eine Menge mit Orthogonalität $(\Omega_1, \perp_1)$. Ist $\sigma \in L(\Omega, \perp)$ und gilt die Inklusion $\sigma \subseteq \ker f$, dann existiert genau ein $\perp$-Homomorphismus $g : \Omega/\sigma \to \Omega_1$ aus $(\Omega/\sigma, \perp_\sigma)$ in $(\Omega_1, \perp_1)$, der die Bedingung $f = g \operatorname{nat} \sigma$ erfüllt.*

Beweis. Unter den angeführten Voraussetzungen existiert genau eine Abbildung $g : \Omega/\sigma \to \Omega_1$, für welche $f = g \operatorname{nat} \sigma$ gilt (siehe z. B. [1]). Wir zeigen, dass g ein

$\perp$-Homomorphismus ist. Es sei $X, Y \in \Omega/\sigma$ und $X \perp_\sigma Y$. Dann existieren Elemente $x \in X$ und $y \in Y$ so, dass $x \perp y$ ist. Es ist $g(X) = g(\operatorname{nat}\sigma(x)) = (g \operatorname{nat}\sigma)(x) = f(x) \perp_1$ $\perp_1 f(y) = (g \operatorname{nat}\sigma)(y) = g(\operatorname{nat}\sigma(y)) = g(Y)$, denn $f: \Omega \to \Omega_1$ ist ein $\perp$-Homomorphismus. Also folgt für $X, Y \in \Omega/\sigma$ von der Relation $X \perp_\sigma Y$ $g(X) \perp_1 g(Y)$, d. h. $g : \Omega/\sigma \to \Omega_1$ ist ein Orthohomorphismus aus $(\Omega/\sigma, \perp_\sigma)$ in $(\Omega_1, \perp_1)$.

2.9 Symbolik. Wir erinnern an die folgende läufige Konvention. Sei $\varrho, \sigma \in E(\Omega)$ und $\varrho \subseteq \sigma$. Für $X, Y \in \Omega/\varrho$ definieren wir $X\ \sigma/\varrho\ Y$ genau dann, wenn die Elemente $x \in X$, $y \in Y$ so existieren, dass $x\ \sigma\ y$ gilt.

Die Relation σ/ϱ ist eine Äquivalenz auf der Faktormenge Ω/ϱ.

2.10 Satz. (Eine Analogie des sogenannten dritten Satzes über den Isomorphismus). *Es sei $\varrho, \sigma \in L(\Omega, \perp)$ und $\varrho \subseteq \sigma$. Dann existiert genau ein surjektiver $\perp$-Homomorphismus $h : \Omega/\varrho \to \Omega/\sigma$ aus $(\Omega/\varrho, \perp_\varrho)$ auf $(\Omega/\sigma, \perp_\sigma)$ und ein bijektiver $\perp$-Homomorphismus $h' : (\Omega/\varrho)/(\sigma/\varrho) \to (\Omega/\sigma)$ aus $((\Omega/\varrho)/(\sigma/\varrho), (\perp_\varrho)_{\sigma/\varrho})$ auf $(\Omega/\sigma, \perp_\sigma)$ so, dass das Diagramm auf der Abb. 1 kommutiert.*

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "\operatorname{nat}\rho"] \arrow[dr, "\operatorname{nat}\sigma"'] & \Omega/\rho \arrow[r, "\operatorname{nat}(\sigma/\rho)"] \arrow[d, "h"] & (\Omega/\rho)/(\sigma/\rho) \arrow[dl, "h'"] \\
& \Omega/\sigma &
\end{tikzcd}$$

Abb. 1.

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass $((\Omega/\varrho)/(\sigma/\varrho), (\perp_\varrho)_{\sigma/\varrho})$ eine Menge mit Orthogonalität ist. Es sei $\mathscr{X} \in (\Omega/\varrho)/(\sigma/\varrho)$ und $\mathscr{X}(\perp_\varrho)_{\sigma/\varrho}\,\mathscr{X}$. Dann existieren Elemente $X, Y \in \mathscr{X}$ so, dass $X \perp_\varrho Y$ ist, und daraus folgt die Existenz der Elemente $x \in X$ und $y \in Y$, für welche $x \perp y$ gilt. Dabei ist $X, Y \in \Omega/\varrho$, $X\ \sigma/\varrho\ Y$ und es ist also auch $x\ \sigma\ y$. Von der Vorausetzung $\sigma \in L(\Omega, \perp)$ und vom Satz 2.3 bekommt man, dass $o \in \bigcup\mathscr{X}$ ist (denn es gilt $\bigcup\mathscr{X} \in \Omega/\sigma$), d. h. es gilt $(o_\varrho)_{\sigma/\varrho} = \mathscr{X}$. Nach dem Kriterium (1) aus dem Satz 2.3 ist also $\sigma/\varrho \in L(\Omega/\varrho, \perp_\varrho)$, und deshalb ist nach 2.4 $(\perp_\varrho)_{\sigma/\varrho}$ eine Orthogonalität auf der Menge $(\Omega/\varrho)/(\sigma/\varrho)$.

Weitere Behauptungen erweisen sich schon als einfache Folgerungen des Satzes 2.8. Die Existenz und die Eindeutigkeit des Orthomorphismus h folgt aus 2.8, wenn man im Satz 2.8 $f = \operatorname{nat}\sigma$ und $(\Omega_1, \perp_1) = (\Omega/\sigma, \perp_\sigma)$ wählt, dann ist $g = h$.

Die Existenz und die Eindeutigkeit des Orthomorphismus h' folgt aus 2.8, wenn man im Satz 2.8 anstelle von $(\Omega, \perp)$ das System $(\Omega/\varrho, \perp_\varrho)$ wählt, anstelle von f wählt man h (die Existenz von h ist im vorangehenden Teile des Beweises gewährleistet, es ist $\ker h = \sigma/\varrho$) und anstelle von $(\Omega_1, \perp_1)$ wählt man $(\Omega/\sigma, \perp_\sigma)$, dann ist $g = h'$.

3. DER VERBAND $(L(\Omega, \perp), \subseteq)$

In diesem Absatz untersuchen wir die Struktur einer geordneten Menge $(L(\Omega, \perp), \subseteq)$. Die erreichten Ergebnisse werden (mit Ausnahme vom Satz 3.7) im Satz 3.9 zusammengefasst.

3.1 Hilfssatz. *Es sei* $\mathscr{X} \subseteq L(\Omega, \perp)$. *Ist* $\mathscr{X} \neq \emptyset$, *dann ist* $\inf\limits_{(L(\Omega,\perp),\subseteq)} \mathscr{X} = \bigcap \mathscr{X}$. *Es gilt* $\inf\limits_{(L(\Omega,\perp),\subseteq)} \emptyset = \Omega^2$.

Beweis. Es sei $\mathscr{X} \neq \emptyset$. Dann ist nach [5], Absatz 5 oder auch nach [9], § 46, $\bigcap \mathscr{X} \in E(\Omega)$. Wir bezeichnen $\tau = \bigcap \mathscr{X}$ und zeigen, dass $\tau \in L(\Omega, \perp)$ ist. Es sei $x \in \Omega/\tau$ und $X \perp_\tau X$. Dann existieren $x, y \in X$ so, dass $x \perp y$ ist. Dabei ist nach der Definition von τ $x \sigma y$ für alle $\sigma \in \mathscr{X}$ und deshalb ist $X = \bigcap\{o_\sigma : \sigma \in \mathscr{X}\}$. Daraus ergibt sich, dass auch $o \in X$ ist, und es ist also $X = o_\tau$. Demzufolge ist $\tau \in L(\Omega, \perp)$ nach dem Satz 2.3. Nach [5], Absatz 5 oder auch nach [9], § 46, ist $\tau = \inf\limits_{(E(\Omega),\subseteq)} \mathscr{X}$ und dabei gilt $L(\Omega, \perp) \subseteq E(\Omega)$; es ist also auch $\tau = \inf\limits_{(L(\Omega,\perp),S)} \mathscr{X}$. Die Beziehung $\inf\limits_{(L(\Omega,\perp),\subseteq)} \emptyset = \Omega^2$ folgt unmittelbar aus dem Satz 2.3 und aus der Definition des Infimums.

3.2 Folgerung. $L(\Omega, \perp)$ *is ein System abgeschlossener Elemente im Vollständigen Verband* $(E(\Omega), \subseteq)$. *Insbesondere ist* $(L(\Omega, \perp), \subseteq)$ *ein vollständiger Verband.*

(Das Symbol $\bigvee$, bzw. $\bigwedge$ bezeichnet im Weiteren das Supremum, bzw. das Infimum im vollständigen Verband $(L(\Omega, \perp), \subseteq)$; das Supremum, bzw. das Infimum in $(E(\Omega), \subseteq)$ bezeichnen wir wie üblich mit $\bigvee_E$, bzw. $\bigwedge_E$).

Beweis. Der erste Teil der Behauptung ist eine unmittelbare Folgerung des Hilfssatzes 3.1, denn für alle $\mathscr{X} \subseteq L(\Omega, \perp)$ ist $\bigwedge_E \mathscr{X} = \bigwedge \mathscr{X}$. Nachdem das System abgeschlossener Elemente im vollständigen Verband (als eine geordnete Teilmenge) ein vollständiger Verband ist, gilt auch der zweite Teil der Behauptung, die zu beweisen war.

3.3 Hilfssatz. *Es sei* $\mathscr{X} \subseteq L(\Omega, \perp)$ *und sei* $(\mathscr{X}, \subseteq)$ *eine Kette. Dann ist* $\bigvee \mathscr{X} = \bigcup \mathscr{X} = \bigvee_E \mathscr{X}$ *für* $\mathscr{X} \neq \emptyset$. *Es gilt* $\bigvee \emptyset = \mathrm{id}_\Omega = \bigvee_E \emptyset$.

Beweis. Es sei $\mathscr{X} \neq \emptyset$. Nach [5], Abs. 7, ist unter unseren Voraussetzungen $\bigcup \mathscr{X} \in E(\Omega)$; bezeichnen wir ferner $\tau = \bigcup \mathscr{X}$. Es sei $X \in \Omega/\tau$ und sei $X \perp_\tau X$. Dann existieren $x, y \in X$ so, dass $x \perp y$ gilt. Es ist $x \tau y$ und deshalb, nach der Definition von τ, existiert $\sigma \in \mathscr{X}$, für welches $x \sigma y$ gilt. Es ist $\sigma \in L(\Omega, \perp)$, und deswegen ist nach dem Satz 2.3 auch $x \sigma o$, d. h. es ist auch $x \tau o$; daraus folgt $X = o_\tau$. Also nach 2.3 ist $\tau \in L(\Omega, \perp)$. Davon ergeben sich schon unmittelbar auch die übrigen Behauptungen. Ebenfalls die Beziehung $\bigvee \emptyset = \mathrm{id}_\Omega$ folgt sofort von der Definition des Supremums und von dem Satz 2.3, nach dem $\mathrm{id}_\Omega \in L(\Omega, \perp)$ ist.

3.4 Folgerung. *$L(\Omega, \perp)$ ist im vollständigen Verband $(E(\Omega), \subseteq)$ ein algebraisches System abgeschlossener Elemente.*

Der Beweis folgt sofort aus der Folgerung 3.2 und aus dem Hilfssatz 3.3.

3.5 Bemerkung. In den Absätzen 3.6 und 3.7 wird ein algebraischer Hüllenoperator betrachtet, welcher auf dem vollständigen Verband $(E(\Omega), \subseteq)$ ein algebraisches Hüllensystem $L(\Omega, \perp)$ definiert.

3.6 Hilfssatz. *Für $\sigma \in E(\Omega)$ definieren wir $\bar{\sigma} = \sigma \cup (\mathrm{dom}\,(\sigma(\sigma \cap \perp)))^2$. Dann gilt*

$$\bar{\sigma} = \bigwedge\{\varrho;\ \varrho \in L(\Omega, \perp),\ \sigma \subseteq \varrho\}\,.$$

Beweis. Zuerst zeigen wir, dass $\bar{\sigma} \in L(\Omega, \perp)$ ist. Die Relation $\bar{\sigma}$ ist offensichtlich reflexiv auf Ω und symmetrisch. Ebenfalls ist klar, dass $\mathrm{dom}\,\bar{\sigma} \subseteq \Omega$ ist, und es ist also $\mathrm{dom}\,\bar{\sigma} = \Omega$. Es sei $x\,\bar{\sigma}\,y$ und $y\,\bar{\sigma}\,z$. Ist $x\,\sigma\,y$ und $y\,\sigma\,z$, oder ist $x(\mathrm{dom}\,(\sigma(\sigma \cap \perp)))^2\,y$ und $y(\mathrm{dom}\,(\sigma(\sigma \cap \perp)))^2\,z$, dann ist auch $x\,\bar{\sigma}\,z$. Es sei $x\,\sigma\,y$ und $y(\mathrm{dom}\,(\sigma(\sigma \cap \perp)))^2\,z$. Dann existieren Elemente y_1, u_1 so, dass die Relation $y\,\sigma\,y_1$, $y_1\,\sigma\,u_1$, $y_1 \perp u_1$ gilt. Aus der Transivität von σ ergeben sich die Beziehungen $x\,\sigma\,y_1$, $y_1\,\sigma\,u_1$, $y_1 \perp u_1$; also es gilt auch $x \in \mathrm{dom}\,(\sigma(\sigma \cap \perp))$. Ebenso ist $z \in \mathrm{dom}\,(\sigma(\sigma \cap \perp))$, und es gilt deshalb $x(\mathrm{dom}\,(\sigma(\sigma \cap \perp)))^2\,z$, d. h. $x\,\bar{\sigma}\,z$. In ähnlicher Weise leiten wir $x\,\bar{\sigma}\,z$ im letzten möglichen Falle $x(\mathrm{dom}\,(\sigma(\sigma \cap \perp)))^2\,y$, $y\,\sigma\,z$ her. Also ist $\bar{\sigma} \in E(\Omega)$.

Es sei $X \in \Omega/\bar{\sigma}$ und sei $X \perp_{\bar{\sigma}} X$. Dann existieren Elemente $x, y \in X$ so, dass $x \perp y$ gilt. Ist $x\,\sigma\,y$, dann ist $x\,\bar{\sigma}\,x(\sigma \cap \perp)\,y$, $y\,\sigma\,y(\sigma \cap \perp)\,x$, und deshalb ist auch $x(\mathrm{dom}\,(\sigma(\sigma \cap \perp)))^2\,y$, d. h. es gilt $x, y \in \mathrm{dom}\,(\sigma(\sigma \cap \perp))$. Wenn $x\,\sigma\,y$ nicht gilt, dann ist notwendigerweise $x(\mathrm{dom}\,(\sigma(\sigma \cap \perp)))^2\,y$, und deswegen gilt wieder $x, y \in \mathrm{dom}\,(\sigma(\sigma \cap \perp))$. Gleichzeitig gelten die Beziehungen

$$o\,\sigma\,o\,,\quad o\,\sigma\,o\,,\quad o \perp o\,,$$

und es ist also auch $o(\sigma(\sigma \cap \perp))\,o$, d. h. es ist $o \in \mathrm{dom}\,(\sigma(\sigma \cap \perp))$. Darum ist $y\,(\mathrm{dom}\,(\sigma(\sigma \cap \perp)))^2\,o$ und daraus ergibt sich, dass $y\,\bar{\sigma}\,o$ gilt. Also ist $o \in X$. Deswegen nach dem Kriterium 2.3 ist $\bar{\sigma} \in L(\Omega, \perp)$.

Ganz gewiss ist $\sigma \subseteq \bar{\sigma}$, und deshalb – wenn man

$$\sigma_\perp = \{\varrho : \varrho \in L(\Omega, \perp),\ \sigma \subseteq \varrho\}$$

bezeichnet – ist $\bar{\sigma} \in \bar{\sigma}_\perp$. Daraus folgt, dass $\bigwedge\sigma_\perp = \bigcap\sigma_\perp \subseteq \bar{\sigma}$ gilt.

Sei umgekehrt $x\,\bar{\sigma}\,y$ und $x \operatorname{non} \sigma\,y$; dann gilt $x, y \in \mathrm{dom}\,(\sigma(\sigma \cap \perp))$, und es existieren also die Elemente u_1, u_2, v_1, v_2 so, dass die Relation $x\,\sigma\,u_1$, $u_1\,\sigma\,v_1$, $u_1 \perp v_1$, $y\,\sigma\,u_2$, $u_2\,\sigma\,v_2$, $u_2 \perp v_2$ gilt. Ist $\varrho \in \sigma_\perp$, dann ist auch $u_1\,\varrho\,v_1$, $u_2\,\varrho\,v_2$ und dann ist nach dem Satz 2.3 auch $u_1\,\varrho\,o$, $u_2\,\varrho\,o$, denn es ist $\varrho \in L(\Omega, \perp)$.

Also ist $x \varrho u_1$, $u_1 \varrho o$, $o \varrho u_2$, $u_2 \varrho y$, und deshalb gilt $x \varrho y$ für alle $\varrho \in \sigma_\perp$. Damit ist die Implikation

$$((x, y) \in (\bar{\sigma} - \sigma)) \Rightarrow (\forall \varrho \in \sigma_\perp : (x, y) \in \varrho)$$

hergeleitet, von der ferner die Inklusion

$$\bar{\sigma} - \sigma \subseteq \bigcap \sigma_\perp$$

folgt. Die Inklusion $\sigma \subseteq \bigcap \sigma_\perp$ folgt unmittelbar aus der Definition des Systems $\sigma_\perp$, und deshalb nach der Definition von $\bar{\sigma}$ ist

$$\bar{\sigma} = (\bar{\sigma} - \sigma) \cup \sigma \subseteq \bigcap \sigma_\perp .$$

Daher und vom Obigen bekommt man die zu beweisende Beziehung

$$\bar{\sigma} = \bigcap \sigma_\perp = \bigwedge \sigma_\perp .$$

3.7 Satz. *Es sei $\perp$ eine Orthogonalität auf der Menge Ω. Dann ist die durch die Formel*

$$\sigma \mapsto \bar{\sigma} = \sigma \cup (\operatorname{dom}(\sigma(\sigma \cap \perp)))^2 , \quad (\sigma \in E(\Omega)) ,$$

definierte Abbildung ein algebraischer Hüllenoperator auf dem vollständigen Verband $(E(\Omega), \subseteq)$.

Dabei gilt

$$L(\Omega, \perp) = \{\bar{\sigma} : \sigma \in E(\Omega)\} .$$

Beweis. Nach Hilfssatz 3.6 ist $^- : E(\Omega) \to E(\Omega)$ ein Hüllenoperator auf $(E(\Omega), \subseteq)$, der ein Hüllensystem $L(\Omega, \perp)$ definiert; dieses System ist nach der Folgerung 3.4 algebraisch und deshalb ist auch der zugehörige Hüllenoperator $^- : E(\Omega) \to E(\Omega)$ algebraisch.

3.8 Hilfssatz. *Es sei $\varrho, \sigma, \tau \in L(\Omega, \perp)$, $\varrho \subseteq \sigma \subseteq \tau$. Dann existiert $\sigma' \in L(\Omega, \perp)$ so, dass die Beziehungen*

$$\varrho \subseteq \sigma' \subseteq \tau , \quad \varrho = \sigma \cap \sigma' , \quad \tau = \bigvee \{\sigma, \sigma'\}$$

gelten.

Beweis. Es sei $X \in \Omega/\tau$. Dann sind $\varrho \cap X^2$ und $\sigma \cap X^2$ Äquivalenzen auf X, $\varrho \cap X^2 \subseteq \sigma \cap X^2$. Für $Y \in X/(\sigma \cap X^2)$ wählt man $Y_\varrho \in Y/(\varrho \cap Y^2)$ beliebig, wenn $o \notin Y$ ist; falls $o \in Y$ ist, definiert man $Y_\varrho = o_\varrho$.

Bezeichnen wir

$$X_0 = \bigcup \{Y_\varrho : Y \in X/(\sigma \cap X^2)\}$$

und definieren

$$\sigma' = \bigcup \{X_0^2 : X \in \Omega/\tau\} \cup \varrho .$$

Wir zeigen, dass σ' der Behauptung des Satzes genügt.

Aus der Definition von σ' folgt $\sigma' \in E(\Omega)$, $\varrho \subseteq \sigma'$. Ist $x \, \sigma' \, y$, dann ist $x \, \varrho \, y$ oder $(x, y) \in \bigcup\{X_0^2 : X \in \Omega/\tau\}$. Ist $x \, \varrho \, y$, dann folgt von $\varrho \subseteq \tau$ die Beziehung $x \, \tau \, y$. Es sei also $(x, y) \in \bigcup\{X_0^2 : X \in \Omega/\tau\}$. Dann gibt es $X \in \Omega/\tau$ so, dass $(x, y) \in X_0^2$. Es gilt $X_0 \subseteq X$, und es ist also $(x, y) \in X^2$, d. h. auch in diesem Falle ist $x \, \tau \, y$. Daher ist $\sigma' \subseteq \tau$.

Wir zeigen, dass $\sigma' \in L(\Omega, \perp)$ gilt. Wir wählen die Klasse $Z \in \Omega/\sigma'$ so, dass $Z \perp' Z$ ist, d. h. es existieren $x, y \in Z$, so dass $x \perp y$ gilt. Ist $x \, \varrho \, y$, dann gilt (denn $\varrho \in L(\Omega, \perp)$) nach 2.3 auch $x \, \varrho \, o$, d. h. es ist auch $o \in Z$. Es sei $(x, y) \notin \varrho$, dann ist $x, y \in X_0^2$ für einige $X \in \Omega/\tau$. Es ist

$$(x, y) \in X_0^2 \subseteq X^2 \subseteq \tau \in L(\Omega, \perp),$$

und also nach Satz 2.3 ist $x \, \tau \, o$, d. h. $o \in X$. Dann gilt $o_\varrho \subseteq X_0$, und deswegen ist $o \in X_0$. Daraus ergibt sich, dass $(x, o) \in X_0^2 \subseteq \sigma'$ gilt.

Wir haben hergeleitet, dass nach 2.3 $\sigma' \in L(\Omega, \perp)$ ist. Wir zeigen, dass $\sigma \cap \sigma' = \varrho$ ist. Es gilt $\varrho \subseteq \sigma$, $\varrho \subseteq \sigma'$ und deshalb $\varrho \subseteq \sigma \cap \sigma'$. Es sei $(x, y) \in \sigma \cap \sigma'$. Dann ergibt sich aus $(x, y) \in \sigma'$, dass $(x, y) \in \varrho$ ist, $(x, y) \in \bigcup\{X_0^2 : X \in \Omega/\tau\}$. Wenn $(x, y) \in \bigcup\{X_0^2 : X \in \Omega/\tau\}$ ist, dann gilt $(x, y) \in X_0^2$ für irgendwelche $X \in \Omega/\tau$. Es ist $X_0 = \bigcup\{Y_\varrho : Y \in X/(\sigma \cap X^2)\}$, und existieren also ${}_1Y, {}_2Y \in X/(\sigma \cap X^2)$ so, dass $x \in {}_1Y_\varrho$, $y \in {}_2Y_\varrho$ ist.

Es sei ${}_1Y \neq {}_2Y$; dann gilt x non $\sigma \, y$, denn ${}_1Y, {}_2Y$ sind zwei verschiedene Klassen der Zerlegung Ω/σ und es gilt $x \in {}_1Y_\varrho \subseteq {}_1Y \neq {}_2Y \supseteq {}_2Y_\varrho \ni y$. Das ist aber ausgeschlossen, da $(x, y) \in \sigma \cap \sigma' \subseteq \sigma$ ist. Also ist ${}_1Y = {}_2Y$. Wir bezeichnen $Y = {}_1Y$ und dann ist $x, y \in Y_\varrho \subseteq Y \in \Omega/\sigma$. Es ist aber $Y_\varrho \in Y/(\varrho \cap Y^2)$, und es gilt also $(x, y) \in Y_\varrho^2 \subseteq \varrho$. Daraus ergibt sich, dass in jedem Falle die umgekehrte Inklusion $\sigma \cap \sigma' \subseteq \varrho$ gilt.

Es bleibt übrig zu zeigen, dass $\bigvee\{\sigma, \sigma'\} = \tau$ ist. Es ist $\sigma, \sigma' \subseteq \tau$ und also auch $\bigvee\{\sigma, \sigma'\} \subseteq \tau$. Es sei $(x, y) \in \tau$. Dann existiert $X \in \Omega/\tau$, so dass $x, y \in X$ ist. Es sei $(x, y) \notin \sigma$; dann existieren zwei verschiedene Elemente ${}_1Y, {}_2Y$ aus Ω/σ so, dass

$$x \in {}_1Y \subseteq X \supseteq {}_2Y \ni y \,, \quad {}_1Y \neq {}_2Y$$

gilt und existieren auch ${}_1Z, {}_2Z \in \Omega/\varrho$ so, dass $x \in {}_1Z \subseteq {}_1Y$, $y \in {}_2Z \subseteq {}_2Y$ gilt. Es gibt auch ${}_1Y_\varrho \subseteq {}_1Y_\varrho \subseteq X$, ${}_2Y_\varrho \subseteq {}_2Y \subseteq X$, und es gibt also $X_0 \cap {}_1Y \neq \emptyset$, $X_0 \cap {}_2Y \neq \emptyset$, denn es ist ${}_1Y_\varrho \subseteq {}_1Y \cap X_0$, ${}_2Y_\varrho \subseteq {}_2Y \cap X_0$. Wir wählen $u \in {}_1Y_\varrho$, $v \in {}_2Y_\varrho$. Es ist

$$(x, u) \in {}_1Y^2 \subseteq \sigma \,, \quad (u, v) \in {}_1Y_\varrho \times {}_2Y_\varrho \subseteq X_0^2 \subseteq \sigma' \,, \quad (v, y) \in {}_2Y^2 \subseteq \sigma \,,$$

und daraus bekommt man

$$(x, y) \in \sigma\sigma'\sigma \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (\sigma \cup \sigma')^n = \bigvee_E\{\sigma, \sigma'\} \subseteq \bigvee\{\sigma, \sigma'\} \,.$$

Wir zeigten, dass im Falle, wenn $(x, y) \in \tau$, $(x, y) \notin \sigma$ gilt, $(x, y) \in \bigvee\{\sigma, \sigma'\}$ ist. Ist aber $(x, y) \in \tau$, $(x, y) \in \sigma$, dann gilt à fortiori $(x, y) \in \bigvee\{\sigma, \sigma'\}$. Damit wird auch die Inklusion $\tau \subseteq \bigvee\{\sigma, \sigma'\}$ hergeleitet.

3.9 Satz. 1. *$L(\Omega, \perp)$ ist ein algebraisches System abgeschlossener Elemente im vollständigen Verband $(E(\Omega), \subseteq)$.*

2. *$(L(\Omega, \perp), \subseteq)$ ist ein vollständiger und relativ komplementärer Verband.*

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar von den Absätzen 3.2, 3.4 und 3.8.

3.10 Bemerkung. Im Gegenteil zur Theorie der Verbände von Kernen isotoner Abbildungen (siehe [5]) sind unsere Verbände $(L(\Omega, \perp), \subseteq)$ stets relativ komplementär.

4. EINIGE WEITERE EIGENSCHAFTEN DES VERBANDES $(L(\Omega, \perp), \subseteq)$

In diesem Absatz zeigen wir, dass der vollständige Verband $(L(\Omega, \perp), \subseteq)$ relativ atomar und dual relativ atomar ist. Daraus ergeben sich einige Folgerungen für maximale Ketten in diesem Verband.

4.1 Hilfssatz. *Es sei $\varrho, \sigma \in E(\Omega)$. Dann ist ϱ in $(E(\Omega), \subseteq)$ genau dann vom Element σ bedeckt, wenn folgende Bedingungen erfüllt werden:*

a) *Für jedes $X \in \Omega/\varrho$ existiert genau ein $Y \in \Omega/\sigma$ derart, dass $X \subseteq Y$ ist.*

b) *Es existiert $Y_0 \in \Omega/\sigma$ und es existieren $X_0, X_1 \in \Omega/\varrho$ so, dass $X_0 \neq X_1$ und $X_0 \cup X_1 = Y_0$ gilt.*

c) *Für Y_0, X_0, X_1 aus* b) *gilt: $\Omega/\sigma - \{Y_0\} = \Omega/\varrho - \{X_0, X_1\}$.*

Beweis. Es handelt sich um eine wohl bekannte Behauptung aus der Theorie der Verbände von Äquivalenzen, siehe z. B. [9], Seite 163.

4.2 Bezeichnung. Für $\varrho, \sigma \in L(\Omega, \perp)$ bezeichnet die Relation $\varrho \prec \sigma$, dass $\varrho \subset \sigma$ ist, und für jedes $\tau \in L(\Omega, \perp)$ mit $\varrho \subset \tau \subseteq \sigma$ folgt $\sigma = \tau$.

4.3 Satz. *Es sei $\varrho, \sigma \in L(\Omega, \perp)$. Dann gilt $\varrho \prec \sigma$ genau dann, wenn die Bedingungen* a), b), c) *des Hilfssatzes* 4.1 *gelten.*

Beweis. I. Es sei $\varrho \prec \sigma$. Dann ist $\varrho \subset \sigma$ und es gilt also offensichtlich a). Es ist $\varrho \neq \sigma$, und deshalb existiert $Y' \in \Omega/\sigma$ derart, dass $Y' \notin \Omega/\varrho$ ist. Dann gibt es wenigstens zwei verschiedene Elemente $X', X'' \in \Omega/\varrho$, so dass $X' \cup X'' \subseteq Y'$ gilt. Wir bezeichnen

$$\mathscr{Y}' = \{X : X \in \Omega/\varrho,\ X \subseteq Y'\}\ ;$$

es ist card $\mathscr{Y}' \geqq 2$.

Es sei card $\mathscr{Y}' > 2$. Daraus leiten wir einen Widerspruch her. Es ist entweder $o \in Y'$ oder $o \notin Y'$. Ist $o \in Y'$, dann wählen wir $Y_1 \in \mathscr{Y}'$ so, dass $o \notin Y_1$ und $Y_2 = (\bigcup \mathscr{Y}') - Y_1$ gilt. Von der Voraussetzung card $\mathscr{Y}' > 2$ folgt $Y_1 \neq \emptyset$, $Y_1 \in \Omega/\varrho$ und $Y_2 \neq \emptyset$, wobei $X \subset Y_2$ für jedes Element $X \in \mathscr{Y}'$, $X \neq Y_1$ gilt; es ist card $(\mathscr{Y}' - \{Y_1\}) \geqq 2$. Davon ergibt sich $Y_2 \notin \Omega/\varrho$. Wir setzen dann $\tau = Y_1^2 \cup Y_2^2 \cup$

$\cup\, \varrho$. Offenbar ist τ eine Äquivalenz auf Ω. Es ist auch $\varrho \subset \tau$, denn einerseits existiert $Y \in \Omega/\tau$ für alle $X \in \Omega/\varrho$ so, dass $X \subseteq Y$ (d. h. $\varrho \subseteq \tau$) ist, und andererseits existieren mindestens zwei verschiedene Elemente $X_2, X_3 \in \Omega/\varrho$, für die $X_2 \cup X_3 \subseteq Y_2 \in \Omega/\tau$ gilt (d. h. es gilt $\varrho \neq \tau$). Die Inklusion $\tau \subset \sigma$ folgt sofort von der Konstruktion von τ.

Wir zeigen, dass $\tau \in L(\Omega, \perp)$ ist. Ist $Z \in \Omega/\tau$ und $Z \perp' Z$, dann ist $Z = Y_1$ oder $Z = Y_2$ (für $Z \neq Y_1, Y_2$ ist nämlich $Z \in \Omega/\sigma$, $o \notin Z$, und weil $\sigma \in L(\Omega, \perp)$ ist, gilt nach 2.3 $Z \not\perp' Z$). Es ist $Y_1 \in \Omega/\varrho$, $o \notin Y_1$ $\varrho \in L(\Omega, \perp)$, und also $Y_1 \not\perp' Y_1$. Von der Beziehung $Z \perp' Z$, $Z \in \Omega/\tau$ folgt deshalb $Z = Y_2$; es ist $o \in Y_2$ denn es gilt $o \in Y' = \bigcup \mathscr{Y}'$, $Y_2 = Y' - Y_1, o \notin Y_1$), und deswegen nach 2.3 ist $\tau \in L(\Omega, \perp)$. Also in diesem Fall ist $\varrho \not\prec \sigma$, da es ein Element $\tau \in L(\Omega, \perp)$ gibt, dass $\varrho \subset \tau \subset \sigma$ ist.

Wenn $o \notin Y'$ ist, dann erweist sich die Situation als einfacher. Wir wählen $Y_1 \notin \mathscr{Y}'$ beliebig, $Y_2 = Y' - Y_1$ und $\tau = Y_2^1 \cup Y_2^2 \cup \varrho$. Wiederum zeigen wir, dass $\varrho \subset \tau \subset \subset \sigma$, $\tau \in L(\Omega, \perp)$ ist und demzufolge ist $\varrho \not\prec \sigma$.

Wir haben hergeleitet, dass unter der Bedingung $\varrho \prec \sigma$ für alle $Y \in \Omega/\sigma$ das System

$$\mathscr{Y} = \{X : X \in \Omega/\varrho,\ X \subseteq Y\}$$

höchstens zwei Elemente enthält. Setzen wir voraus, dass $Y', Y'' \in \Omega/\sigma$ existieren, für welche $Y' \neq Y''$ gilt und dass $\mathscr{Y}', \mathscr{Y}''$ zweielementige Systeme sind. Aus dieser Voraussetzung leiten wir einen Widerspruch her. Es genügt nähmlich $\tau = (Y')^2 \cup \varrho$ zu wählen und dann ist wieder $\varrho \subset \tau \subset \sigma$. Von 2.3 folgt dann, dass $\tau \in L(\Omega, \perp)$ ist. Also gilt $\varrho \not\prec \sigma$.

Wir haben hergeleitet, dass unter der Voraussetzung $\varrho \prec \sigma$ höchstens ein $Y' \in \Omega/\sigma$ existiert, für welches das System $\mathscr{Y}'$ zweielementig ist, wobei $\Omega/\sigma - \{Y'\} = \Omega/\varrho - \mathscr{Y}'$ ist. Aber es ist $\varrho \neq \sigma$ und es existiert also $Y_0 \in \Omega/\sigma - \Omega/\varrho$, wobei – wie obenangeführt – ein eniziges Element Y_0 derart existiert, dass $\mathscr{Y}_0$ ein zweielementiges System ist. Damit sind auch die Bedingungen b) und c) hergeleitet.

II. Gelten für $\varrho, \sigma \in L(\Omega, \perp)$ die Bedingungen a) bis c), dann ist ϱ nach dem Absatz 4.2 mit dem Element σ in $(L(\Omega, \perp), \subseteq)$ bedeckt; es gilt $L(\Omega, \perp) \subseteq E(\Omega)$ und es ist ebensfalls $\varrho \prec \sigma$.

4.4 Folgerung. *Es sei $\varrho, \sigma \in L(\Omega, \perp)$. Dann gilt $\varrho \prec \sigma$ genau dann, wenn ϱ der untere Nachbar von σ in $(E(\Omega), \subseteq)$ ist, d. h. die Relation $\prec$ ist eine Teilmenge der Relation* „... ist der untere Nachbar ... in $(E(\Omega), \subseteq)$".

Der Beweis folgt sofort aus dem Hilfssatz 4.1 und aus dem Satz 4.3.

4.5 Hilfssatz. *Es sei $\varrho, \sigma \in L(\Omega, \perp)$, $\varrho \subset \sigma$. Dann existiert $\tau \in L(\Omega, \perp)$ so, dass $\varrho \subseteq \tau \prec \sigma$ gilt.* (D. h. der Verband $(L(\Omega, \perp), \subseteq)$ ist dual relativ atomistisch).

Beweis. Es ist $\varrho \subset \sigma$ und deshalb gilt

a) zu jedem $X \in \Omega/\varrho$ gibt es genau ein $Y \in \Omega/\sigma$, $X \subseteq Y$;

b) es existieren $Y_0 \in \Omega/\sigma$ und $X_1, X_2 \in \Omega/\varrho$, $X_1 \neq X_2$ und $X_1 \cup X_2 \subseteq Y_0$. Dann wählen wir eine solche Beziehung, dass $o \notin X_1$ in b) ist. Definieren wir

$$\tau = X_1^2 \cup (Y_0 - X_1)^2 \cup \varrho .$$

Es ist $\varrho \subseteq \tau \subset \sigma$, nach der Konstruktion von τ und nach dem Satz 2.3 ist $\tau \in L(\Omega, \perp)$ und nach dem Satz 4.3 gilt $\tau \prec \sigma$.

4.6 Hilfssatz. *Es sei $\varrho, \sigma \in L(\Omega, \perp)$, $\varrho \subset \sigma$. Dann existiert $\tau \in L(\Omega, \perp)$ so, dass $\varrho \prec \tau \subseteq \sigma$ gilt.* (D. h. der Verband $(L(\Omega, \perp), \subseteq)$ is relativ atomisch.)

Beweis. Es ist $\varrho \subset \sigma$ und es gilt also: a) für jedes $X \in \Omega/\varrho$ existiert genau ein $Y \in \Omega/\sigma$, $X \subseteq Y$; b) es existieren $Y_0 \in \Omega/\sigma$ und $X_1, X_2 \in \Omega/\varrho$, $X_1 \neq X_2$ und $X_1 \cup X_2 \subseteq Y_0$.

Ist $o \notin Y_0$ in b), dann definieren wir $\tau_1 = (X_1 \cup X_2)^2 \cup \varrho$. Ist $o \in Y_0$, dann gilt $o_\varrho \subset Y_0$ und die Beziehung wählen wir derart, dass $X_1 \neq o_\varrho$ ist, und definieren in diesem Fall $\tau_2 = (o_\varrho \cup X_1)^2 \cup \varrho$.

Es ist $\tau_1, \tau_2 \in E(\Omega)$, $\varrho \subset \tau_1 \subseteq \sigma$, $\varrho \subset \tau_2 \subseteq \sigma$. Wir zeigen z. B. dass, $\tau_1 \in L(\Omega, \perp)$ ist. Ist $X \in \Omega/\tau$ und $X \perp' X$, dann gilt entweder $X \in \Omega/\varrho - \{X_1, X_2\}$, dann ist aber $o_\varrho = X$, denn es ist $\varrho \in L(\Omega, \perp)$ (siehe Satz 2.3), oder gilt $X = X_1 \cup X_2$. Dann haben wir $X_1 \cup X_2 \subset Y_0 \in \Omega/\sigma$, $\sigma \in L(\Omega, \perp)$, $o \notin Y_0$, und deshalb gilt $x \not\perp y$ für alle $x, y \in Y_0$ nach dem Satz 2.3, insbesondere ist $(X_1 \cup X_2) \not\perp' (X_1 \cup X_2)$. Der Fall $X = X_1 \cup X_2$, $X \perp' X$ ist also ausgeschlossen.

Wir zeigten, dass $o_{\tau_1} = X$ im Fall $X \in \Omega/\tau_1$, $X \perp' X$ gilt, d. h. nach dem Satz 2.3 ist $\tau_1 \in L(\Omega, \perp)$.

Es ist

$$\Omega/\tau_1 = (\Omega/\varrho - \{X_1, X_2\}) \cup (X_1 \cup X_2)$$

und nach dem Satz 4.3 gilt $\varrho \prec \tau_1$.

In gleicher Weise leiten wir her, dass $\varrho \prec \tau_2 \subseteq \sigma$ im Falle $o \in Y_0$ gilt.

4.7 Bemerkung. Eine Analogie des Hilfssatzes 4.6 und des Satzes 4.10 in Verbänden von Kernen isotoner Abbildungen gilt allgemein nicht.

4.8 Satz. *Es sei R eine maximale Kette im Verband $(L(\Omega, \perp), \subseteq)$. Dann ist R auch im Verband $(E(\Omega), \subseteq)$ eine maximale Kette.*

Beweis. Es sei R eine maximale Kette in $(L(\Omega, \perp), \subseteq)$ und sei $\sigma \in E(\Omega)$ so, dass $(R \cup \{\sigma\}, \subseteq)$ eine Kette ist. Wir zeigen, dass dann $\sigma \in L(\Omega, \perp)$ gilt. Wir bezeichnen

$$R_1(\sigma) = \{\varrho : \varrho \in R,\ \varrho \subseteq \sigma\}, \quad R_2(\sigma) = \{\varrho : \varrho \in R,\ \sigma \subseteq \varrho\},$$
$$\alpha = \bigvee R_1(\sigma), \quad \beta = \bigwedge R_2(\sigma).$$

Nach dem Hilfssatz 3.1 ist $\beta = \bigcap R_2(\sigma)$, denn es ist $\Omega^2 \in R_2(\sigma)$ und deshalb auch $R_2(\sigma) \neq \emptyset$. Ist $R_1(\sigma) \neq \emptyset$, dann ist nach dem Hilfssatz 3.3 $\alpha = \bigcup R_1(\sigma)$. Stets gilt

$\mathrm{id}_\Omega \in R_1(\sigma)$ und deswegen ist $R_1(\sigma) \neq \emptyset$. Die Beziehung $\alpha \subseteq \beta$ folgt unmittelbar von der Definition des Supremums und Infimums.

Von der Beziehung $\alpha = \bigcup R_1(\sigma)$ folgt $\alpha \subseteq \sigma$ und aus $\beta = \bigcap R_2(\sigma)$ kommt die Beziehung $\sigma \subseteq \beta$. Ist $\alpha \subset \beta$, dann existiert nach dem Hilfssatz 4.5 $\gamma \in L(\Omega, \perp)$ so, dass $\alpha \prec \gamma \subseteq \beta$. Die Kette R ist in $(L(\Omega, \perp), \subseteq)$ maximal und deswegen ist $\alpha, \beta \in R$ und $\gamma = \beta$. Also gilt $\alpha \prec \beta$ und $\alpha \subseteq \sigma \subseteq \beta$. Nach der Folgerung 4.4 ist $\alpha = \sigma$ oder $\beta = \sigma$, d. h. im Falle $\alpha \subset \beta$ gilt $\sigma \in R$. Ist aber $\alpha = \beta$, dann folgt von den obenangeführten Inklusionen $\alpha \subseteq \sigma \subseteq \beta$, dass $\sigma = \alpha$ gilt, d. h. es ist wieder $\sigma \in R$.

Wir haben hergeleitet, dass für die maximale Kette R in $(L(\Omega, \perp), \subseteq)$ Folgendes gilt: ist $\sigma \in E(\Omega)$ und σ ein mit allen Elementen aus R $\subseteq$ – vergleichbares Element, dann ist $\sigma \in R$. Das heisst aber, dass R eine maximale Kette in $(E(\Omega), \leqq)$ ist.

4.9 Hilfssatz. *Es sei $\mathscr{L} = (L, \leqq)$ ein vollständiger Verband, der die folgende Bedingung erfüllt: für jedes $x, y \in L$ gilt*

$$x < y \Rightarrow (\exists z \in L : x \underset{\mathscr{L}}{\prec} z \leqq y)\ ^{*)}.$$

Dann gilt folgende Behauptung: ist $R \subseteq L$ und ist $(R, \leqq)$ eine wohlgeordnete Kette, dann existiert eine maximale Kette S in $\mathscr{L}$ so, dass $R \subseteq S$ ist, und $(S, \leqq)$ eine wohlgeordnete Kette ist.

Der Beweis ist in [5] (Absatz 30 und 31, Seite 135, 136) enthalten.

4.9′ Hilfssatz. *Es sei $\mathscr{L} = (L, \leqq)$ ein vollständiger Verband, der die zur Bedingung aus 4.9 duale Bedingung erfüllt. Dann gilt Folgendes: ist $R \subseteq L$ und ist $(R, \geqq)$ eine wohlgeordnete Kette, dann existiert eine maximale Kette S in $\mathscr{L}$ so, dass $R \subseteq S$ gilt, und $(S, \geqq)$ eine wohlgeordnete Kette ist.*

Beweis. Die Behauptung ist zum Hilfssatz 4.9 dual.

4.10 Satz. *Es sei $R \subseteq L(\Omega, \perp)$ und $(R, \subseteq)$ sei eine wohlgeordnete Kette. Dann existiert soeine maximale Kette S in $(L(\Omega, \perp), \subseteq)$, dass $R \subseteq S$ gilt und $(S, \subseteq)$ eine wohlgeordnete Kette ist.*

Der Beweis folgt unmittelbar von den Hilfssätzen 4.6 und 4.9.

4.11 Satz. *Es sei $R \subseteq L(\Omega, \perp)$ und $(R, \supseteq)$ sei eine wohlgeordnete Kette. Dann existiert soeine maximale Kette S in $(L(\Omega, \perp), \subseteq)$, dass $R \subseteq S$ gilt und $(S, \supseteq)$ eine wohlgeordnete Kette ist.*

Der Beweis folgt sofort von den Hilfssätzen 4.5 und 4.9′.

---

*) $a \underset{\mathscr{L}}{\prec} b$ bezeichnet, dass a ein unterer Nachbar von b in $\mathscr{L}$ ist.

Literaturverzeichniss

[1] *Cohn, P. M.*: Universal Algebra. New York—London, Harper & Row., 1965.

[2] *Havrda, J.*: Ortogonalita na množinách (Orthogonalität auf Mengen). Čas. pro pěst. mat. *100* (1975), 339—354.

[3] *Malcev A. I.*: Algebraičeskije sistemy (Algebraisch Systeme). Nauka, Moskva 1970.

[4] *Rozenský, Z.*: Zobrazení a kongruence na množinách s ortogonalitou (Abbildungen und Kongruenzen auf Mengen mit Orthogonalität). Habilitationsschrift, Elektrotechnische Fakultät der TH in Prag, Praha 1974.

[5] *Sturm, T.*: Verbände von Kernen isotoner Abbildungen. Czech. Math. J. *22* (*97*), 1972, 126—144.

[6] *Sturm, T.*: Äquivalenz- und Ordnungsrelationen. Czech. Math. J. *22* (*97*), 1972, 373—392.

[7] *Sturm, T.*: Zu Äquivalenz- und Ordnungsrelationen. Czech. Math. J. *23* (*98*), 1973, 362—374.

[8] *Sturm, T.*: Einige Charakterisationen von Ketten. Czech. Math. J. *23* (*98*), 1973, 375—391.

[9] *Szász, G.*: Einführung in die Verbandstheorie. Teubner Verlag, Leipzig, 1962.

[10] *Adámek, J., Sturm, T.*: On Congruence Lattices in a Category. Czech. Math. J., im Druck.

Anschrift des Verfassers: 166 27 Praha 6 - Dejvice, Suchbátarova 2 (České vysoké učení technické).