Časopis pro pěstování matematiky

Václav Medek

Über eine Eigenschaft von Ovalen

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 103 (1978), No. 3, 297--302

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117974

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 103 (1978), Praha

ÜBER EINE EIGENSCHAFT VON OVALEN

VÁCLAV MEDEK, Bratislava

(Eingegangen am 11. Januar 1977)

1. Im weiteren werden wir unter einer projektiven Ebene R entweder eine endliche projektive Ebene ungerader Ordnung n, oder eine unendliche projektive Ebene verstehen und wenn es zu keinem Missverständnis kommen kann, werden wir nur über eine Ebene sprechen.

Ein Oval in einer Ebene ist eine Menge O solcher Punkte, dass jede Gerade der Ebene mit der Menge O höchstens zwei gemeinsame Punkte hat und durch jeden Punkt der Menge O gerade eine Gerade (Tangente des Ovals) geht, die mit der Menge O keinen weiteren Punkt gemeinsam hat. Ein Oval in einer endlichen Ebene ist eigentlich ihr maximaler k-Bogen, d. h. eine Menge O solcher $n + 1$ Punkte, von welchem keine drei auf einer Geraden liegen.

Die Geraden einer Ebene R kann man in 3 Gruppen, bezüglich des Ovals O, zerteilen: a) Sekanten, die mit dem Oval O zwei verschiedene Punkte gemeinsam haben, b) Tangenten, die mit dem Oval O gerade einen Punkt gemeinsam haben und c) äussere Geraden, die mit dem Oval O keinen gemeinsamen Punkt haben. Durch jeden Punkt des Ovals geht gerade eine Tangente. Durch einen Punkt einer unendlichen Ebene R, der nicht auf dem Oval liegt, können entweder zwei verschiedene Tangenten des Ovals gehen (äusserer Punkt), oder es geht durch ihn keine Tangente (innerer Punkt) [1].

Ein Oval in einer endlichen Ebene ist gerade dann ein Kegelschnitt, wenn die Ebene eine desarguessche ist [2].

2. Definition 1. Ein in ein Oval eingeschriebenes Viereck bilden vier verschiedene Punkte des Ovals; diese vier Punkte nennen wir Ecken des Vierecks, die durch zwei verschiedene Ecken gehende Gerade nennt man die Seite des Vierecks und zwei Seiten nennen wir gegenüberliegende Seiten, wenn sie keine gemiensame Ecke haben. Die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten nennen wir die Diagonalpunkte des Vierecks.

Definition 2. Sei P ein Punkt, der nicht auf dem Oval O liegt; konstruieren wir alle solche in das Oval O eingeschriebene Vierecke, für die der Punkt P sein Diagonalpunkt ist. Quasipolare des Punktes P bezüglich des Ovals O ist die Menge aller anderen Diagonalpunkte aller solchen Vierecken zusammen mit den Berührungspunkten der Tangenten des Ovals O, die durch den Punkt P gehen (wenn solche Tangenten existieren). Die Quasipolare eines Punktes P des Ovals O (bezüglich des Ovals O) ist die Tangente des Ovals O in dem Punkte P.

Aus der Definition 2 folgt unmittelbar

Satz 1. *Wenn der Punkt Q auf der Quasipolare des Punktes P bezüglich des Ovals O liegt, dann enthält die Quasipolare des Punktes Q bezüglich des Ovals O den Punkt P.*

Bemerkung. Eine Quasipolare muss nicht ein Teil einer Geraden sein. Z. B. für das Oval von Hughes $O(H) = \{A_0, A_1, A_6, A_7, B_2, C_8, C_9, D_8, D_9, E_2\}$ sind die Quasipolaren aller Punkte A_i $(i = 0, 1, \ldots, 12)$ (und selbstverständlich auch aller Punkte des Ovals) Geraden. Die Quasipolaren aller anderen Punkte sind aber nicht Teile von Geraden. (Über das Oval $O(H)$ siehe z. B. [3].)

Satz 2. *Sei O ein endliches Oval der Ordnung n; die maximale Anzahl der Punkte der Quasipolare des Punktes $P \in R$ bezüglich des Ovals O ist:* a) *für einen inneren Punkt P: $(n^2 - 1)/4$,* b) *für einen äusseren Punkt P: $(n^2 - 4n + 11)/4$ und* c) *für einen Punkt P des Ovals O: $n + 1$.*

Beweis. a) Ist der Punkt P ein innerer Punkt, dann kann man gerade $(n + 1)/2$ solcher verschiedenen Sekanten des Ovals O konstruieren, die durch den Punkt P gehen. Die Menge aller solcher Vierecke, die für die Quasipolare des Punktes P in Betracht kommen, enthält gerade

$$\binom{\frac{n+1}{2}}{2} = (n^2 - 1)/8$$

Vierecke und die Anzahl der Punkte der Quasipolare ist also am meisten $(n^2 - 1)/4$.

b) Ist der Punkt P ein äusserer Punkt, dann kann man gerade $(n - 1)/2$ solcher verschiedenen Sekanten des Ovals O konstruieren und dieselbe Betrachtung wie im Falle a) führt uns zur maximalen Anzahl der Punkte der Quasipolare:

$$2 + 2\binom{\frac{n-1}{2}}{2} = (n^2 - 4n + 11/)4\,.$$

Im Falle c) ist die Behauptung evident.

Bemerkung. Die Zahlen von dem Satz 2 kann man nicht verbessern. Z. B. für ein willkürliches Oval der Ordnung 5 enthält die Quasipolare eines ihren willkürlichen inneren Punktes gerade 6 Punkte. Die Quasipolare des äusseren Punktes B_0 bezüglich des Ovals $O(H)$ von Hughes enthält die Punkte A_2, B_4, B_5, C_4, C_9, D_7, D_8, D_{11}, E_0, E_{10}, E_{11}, F_3, F_5, G_{10}, also 14 Punkte. (Diese Punkte findet man mittels der direkten Konstruktion der zugehörigen Vierecken). Es existieren solche inneren und auch äusseren Punkte der Ovalen, deren Quasipolaren die maximale Anzahl der Punkten nicht enthalten.

Satz 3. *Die Quasipolaren eines willkürlichen Punktes einer endlichen projektiven Ebene der Ordnung n bezüglich des Ovals O enthält mindestens $n - 1$ verschiedener Punkten.*

Beweis. a) Ist der Punkt ein innerer Punkt des Ovals O, wir konstruieren eine willkürliche Sekante s des Ovals O, die durch den Punkt P geht. Ausser der Sekanten s gehen durch den Punkt P noch $(n - 1)/2$ weitere Sekanten. Jede diese Sekante zusammen mit der Sekante s bestimmt ein in das Oval O eingeschriebenes Viereck und die Diagonalpunkte aller dieser Vierecke (ausser dem Punkt P) sind verschieden. Wir bekommen so $2(n - 1)/2 = n - 1$ verschiedene Punkte der Quasipolare des Punktes P.

b) Ist der Punkt P ein äusserer Punkt des Ovals O, dann existieren (ausser der Sekanten s des Ovals O) noch $(n - 3)/2$ weitere Sekanten des Ovals O, die durch den Punkt P gehen, und dieselbe Anzahl der Vierecke mit verschiedenen Diagonalpunkten, also wir bekommen $2(n - 3)/2 = n - 3$ verschiedene Punkte der Quasipolare des Punktes P. Zwei Berührungspunkte der Tangenten des Ovals O, die durch den Punkt P gehen, ergeben weitere zwei Punkte der Quasipolare des Punktes P, also zusammen $n - 1$ Punkte.

c) Für einen Punkt des Ovals ist die Behauptung evident.

Bemerkung. Den Satz 3 kann man auch nicht verbessern, da z. B. für ein Oval in der Ebene der Ordnung 5 die Quasipolare eines äusseren Punktes P zwei Berührungspunkte der Tangenten des Ovals enthält, die durch den Punkt P gehen, und zwei Diagonalpunkte des einzigen in das Oval eingeschriebenen Vierecks mit dem Diagonalpunkt P, also zusammen $5 - 1 = 4$ Punkte.

Satz 4. *Sei die Quasipolare des Punktes P bezüglich des Ovals O ein Teil der Geraden p; sei s eine willkürliche Sekante des Ovals O, die durch den Punkt P geht; dann liegt der Durchschnittspunkt der Tangenten des Ovals O in den Durchschnittspunkten S, S' der Sekanten s mit dem Oval O auf der Geraden p.*

Beweis. Für einen Punkt $P \in O$ ist die Behauptung evident. Bezeichnen wir jetzt den Durchschnittspunkt der Tangenten t des Ovals O im Punkte S mit der Geraden p

mit T. Sei t' die Verbindungslinie der Punkte T und S' und setzen wir voraus, dass diese Gerade das Oval O in einem weiteren Punkte $R' \neq S'$ durchschneidet; dann muss die Gerade PR' das Oval O in einem weiteren Punkte $R \neq R'$ durchschneiden. (Der Punkt R' kann nicht der Berührungspunkt einer Tangenten des Ovals O, die durch den Punkt P geht, sein, da dann müsste der Punkt S' auf der Geraden p liegen. Aber der Punkt S' kann nicht auf der Geraden p liegen. Hat die Gerade p mit dem Oval O keinen gemeinsamen Punkt, ist das evident. Wenn der Punkt S' auf der Geraden p liegt, dann wählen wir einen solchen Punkt $U \in O$, der nicht auf der Geraden p liegt und so, dass die Gerade PU eine Sekante des Ovals O ist. Sei U' der zweite Durchschnittspunkt der Geraden PU mit dem Oval O. Dann liegen die Diagonalpunkte des Vierecks $UU'SS'$ nicht auf der Geraden p, was ein Widerspruch. zur Voraussetzung ist). Dann ist $SS'RR'$ ein in das Oval eingeschriebenes Viereck und der Durchschnittspunkt seiner gegenüberliegenden Seiten SR, $S'R'$ sollte auf der Geraden p liegen. Da aber die Verbindungslinie $S'R'$ die Gerade p in dem Punkte T schneidet, müsste auch die Gerade SR durch den Punkt T gehen, was unmöglich ist.

Satz 5. *Sei die Quasipolare des Punktes P bezüglich des Ovals O, das mehr als 5 Punkte enthält, ein Teil der Geraden p; dann gehört jeder Punkt der Geraden p zur Quasipolare des Punktes P.*

Beweis. Liegt der Punkt P auf dem Oval O, folgt die Behauptung unmittelbar aus der Definition der Quasipolare. Liegt der Punkt P nicht auf dem Oval O, wählen wir auf der Geraden p, die die Quasipolare des Punktes P bezüglich des Ovals O enthält, einen willkürlichen Punkt M, der verschieden von möglichen Durchschnittspunkten der Geraden p mit dem Oval O ist (der Durchschnittspunkt $p \cap O$ gehört zur Quasipolare, da er der Berührungspunkt der Tangenten des Ovals, die durch den Punkt P geht, ist). Sei m die Sekante des Ovals O, die durch den Punkt M geht, verschieden von der Geraden p ist und nicht durch den Punkt P geht. Seien A, B die Durchschnittspunkte der Geraden m mit dem Oval O und A', B' die Durschnittspunkte der Geraden PA und PB mit dem Oval O (die Geraden PA, PB können nicht Tangenten des Ovals O sein, da dann die Punkte A, B zu der Geraden p gehören müssten). Der Diagonalpunkt $M' = AB \cap A'B'$ des Vierecks $ABA'B'$ muss der Quasipolare des Punktes P bezüglich des Ovals O gehören; er muss also auf der Geraden p liegen. Das ist nur so möglich, wenn $M = M'$ ist, also wenn der Punkt M zu dieser Quasipolare gehört.

Bemerkung. Der Satz 5 ermöglicht uns die Quasipolare, die eine Gerade ist, einfach die Polare zu nennen.

Jeder Punkt P der Ebene R, der nicht auf dem Oval O liegt, bestimmt eine involutorische Bijektion $\boldsymbol{P}$ der Punkten des Ovals O und zwar so: Sei A ein willkürlicher Punkt des Ovals O; dann ist das Bild $\boldsymbol{P}(A)$ des Punktes A in der Involution $\boldsymbol{P}$ entweder der Punkt A, wenn die Gerade PA eine Tangente des Ovals O ist, oder ist es der zweite Durchschnittspunkt A' der Geraden PA mit dem Oval O. Da wir uns mit keinen weiteren Involutionen beschäftigen werden, werden wir im weiteren unter der Involution gerade die beschriebene Abbildung verstehen.

Definition 3. Zwei verschiedene Involutionen $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}$ nennen wir quasivertauschbar (bezüglich des Ovals O), wenn ein solcher Punkt $A \in O$ existiert, der nicht auf der Geraden IJ liegt und auch kein Fixpunkt keiner der Involutionen $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}$ ist, für welchen $\boldsymbol{IJ}(A) = \boldsymbol{JI}(A)$ ist.

Satz 6. *Zwei Involutionen $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}$ sind gerade dann quasivertauschbar, wenn ein solches in das Oval eingeschriebenes Viereck existiert, dass die Punkte I, J seine Diagonalpunkte sind.*

Beweis. Sei $ABCD$ ein in das Oval O eingeschriebenes Viereck und sei $I = AB \cap CD$, $J = AD \cap BC$; dann ist $\boldsymbol{I}(A) = B$, $\boldsymbol{JI}(A) = \boldsymbol{J}(B) = C$, $\boldsymbol{J}(A) = D$, $\boldsymbol{IJ}(A) = \boldsymbol{I}(D) = C$, also $\boldsymbol{IJ}(A) = \boldsymbol{JI}(A)$.

Umgekehrt, setzen wir voraus, dass ein solcher Punkt $A \in O$ existiert, dass $\boldsymbol{IJ}(A) = \boldsymbol{JI}(A)$ ist und sei $\boldsymbol{I}(A) = B \neq A$; $\boldsymbol{J}(A) = D \neq A, B$; $\boldsymbol{J}(B) = C$. Dann ist notwendig: $C = \boldsymbol{J}(B) = \boldsymbol{JI}(A) = \boldsymbol{IJ}(A) = \boldsymbol{I}(D)$, also ist der Punkt D das Bild des Punktes C in der Involution $\boldsymbol{I}$ und die Punkte C, D liegen auf einer Geraden, die durch den Punkt I geht. Die Punkte C, D sind verschieden, da wenn $C = D$, d. h. $\boldsymbol{J}(A) = \boldsymbol{J}(B)$ wäre, müsste $A = B$ gelten. Die Punkte A, B, C, D sind also 4 verschiedene Punkte des Ovals O und die Punkte I, J sind Diagonalpunkte des Vierecks $ABCD$.

Satz 7. *Die Quasipolare des Punktes I, der nicht auf dem Oval O liegt, bezüglich des Ovals O, ist die Menge aller solchen Punkte $X \in R$, für die die Involutionen $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{X}$ quasivertauschbar bezüglich des Ovals O sind erweitert um die möglichen Berührungspunkte der Tangenten des Ovals O, die durch den Punkt I gehen.*

Beweis folgt aus der Definition der Quasipolare und aus dem Satz 6.

Definition 4. Zwei verschiedene Involutionen $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}$ nennen wir vertauschbar, wenn über jeden Punkt A des Ovals O gilt: $\boldsymbol{IJ}(A) = \boldsymbol{JI}(A)$.

Satz 8. *Seien die Quasipolaren aller Punkte $P \in R$ bezüglich des Ovals O $(P \notin O)$ Geraden und sei* card $O > 7$; *dann liegen alle Punkte $X \in R$, für die die Involution $\boldsymbol{X}$ vertauschbar mit der Involution $\boldsymbol{P}$ ist, auf der Polare p des Punktes P bezüglich des Ovals O und umgekehrt für jeden Punkt X der Polare p (mit der Ausnahme der Punkten des Ovals O) gilt: $\boldsymbol{PX} = \boldsymbol{XP}$.*

Beweis folgt unmittelbar aus den Sätzen 5, 6 und 7.

Setzen wir im weiteren voraus, dass O ein Oval einer desarguesschen Ebene R ist, card $O > 5$ und dass die Quasipolaren aller Punkten der Ebene R, die nicht auf dem Oval O liegen, Geraden sind.

Zu jedem Punkt $P \in R$, der nicht auf dem Oval O liegt, ordnen wir eine zentrale Kollineation σ^P mit dem Zentrum P, mit der Achse in der Polaren p des Punktes P bezüglich des Ovals O zu, die den gegebenen Punkt $A \in O$, der nicht auf der Geraden p liegt, in den Punkt $A' = PA$ abbildet. Das Zentrum P, die Achse p, der Punkt A und sein Bild A' bestimmen die zentrale Kollineation σ^P. Wir werden beweisen, dass das Oval O in der Kollineation σ^P invariant ist. Wirklich, sei $B \neq A, A'$ ein Punkt des Ovals O, der nicht auf der Geraden p liegt und sei $B' = PB$; dann ist $AA'BB'$ ein in das Oval O eingeschriebenes Viereck und hat den Diagonalpunkt P. Dann müssen die weiteren zwei Diagonalpunkte des Vierecks $AA'BB'$ auf der Geraden p liegen, also die Geraden AB und $A'B'$ müssen sich auf der Achse p der Kollineation σ^P schneiden. Der Punkt B' ist dann das Bild des Punktes B in der Kollineation σ^P. Wenn der Punkt T ein Durschnittspunkt der Geraden p mit dem Oval O ist, dann ist $\sigma^P(T) = T$.

Buekenhout [4] hat diesen Satz bewiesen: Ist R eine desarguessche Ebene und O eine solche perspektive quadratische Menge in R, die keine Vereinigung von zwei Geraden ist, dann ist R eine pappussche Ebene und O ein Kegelschnitt. Die quadratische Menge Q ist eine Verallgemeinerung des Ovals und wir nennen sie perspektiv, wenn für jeden Punkt aus R, der nicht der Menge Q gehört, eine solche perspektive Kollineation existiert, die die Menge Q invariant lässt.

Aus diesem Satz folgt

Satz 9. *Sei R eine desarguessche Ebene und sei O ein Oval der Ebene R; ist die Quasipolare jedes Punktes, der nicht auf dem Oval O liegt, eine Gerade, dann ist die Ebene R eine pappussche Ebene und das Oval O ist ein Kegelschnitt.*

Der Beweis folgt daraus, dass die Abbildungen σ^P perspektive Kollineationen sind und dass sie das Oval invariant lassen.

Bemerkung. Da jede endliche desarguessche Ebene eine pappussche Ebene ist und da jedes Oval in einer solchen Ebene ein Kegelschnitt ist, gibt der Satz 9 nur für unendliche Ebenen ein neues Ergebnis.

Literatur

[1] *Qvist, B.:* Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane. Ann. Acad. Sc. Fennicae, Ser. A, *134*, 1952, 1—27.

[2] *Segre, B.:* Lectures on Modern Goemetry. Roma 1961.

[3] *Hughes, D. R.:* A class of non-Desarguesian projective planes. Canad. J. Math. *9*, 1957, 278—388.

[4] *Buekenhout, F.:* Ensembles quadratiques des éspaces projectifs. Math. Z. *110*, 1969, 306—318.

Anschrift des Verfassers: 884 20 Bratislava, Radlinského 11 (Stavebná fakulta SVŠT).