Václav Havel
Kleine Desargues-Bedingung in Geweben

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 102 (1977), No. 2, 144--165

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117953`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 102 (1977), Praha

KLEINE DESARGUES-BEDINGUNG IN GEWEBEN

VÁCLAV HAVEL, Brno

(Eingegangen am 1. September 1975)

Bekanntlich existiert eine enge Beziehung zwischen 3-Geweben und Loops. In diesem Zusammenhang ergeben sich als wichtig solche 3-Gewebe, welche den Loops mit Moufang-Identitäten, bzw. mit assoziativem Gesetz, bzw. mit kommutativem Gesetzt entsprechen und welche durch die Gültigkeit der Bolschen Schließungsbedingungen, bzw. der Reidemeister-, bzw. Thomsen-Bedingung gekennzeichnet sind. Deswegen werden üblicherweise diese Schließungsbedingungen als gewiße Grundlage für die Untersuchungen der 3-Gewebe bezeichnet.

Auf der anderen Seite kann man einige 3-Gewebe in affine Ebenen einbetten (ohne Zunahme der eigentlichen Punkte) und für solche 3-Gewebe kann man dann die Schließungsbedingungen bezüglich der Ebene verengen, vor allem die Schließungsbedingungen vom Desarguesschen Typ. Dagegen ist es aber möglich die Schließungsbedingungen vom Desarguesschen Typ natürlicherweise in Geweben des Grades $\geqq 4$ unabhängig auf der Einbettbarkeit in affine Ebenen definieren. Insbesondere die sog. kleine Desargues-Bedingung zeigt sich als sehr geeignet für die Eintrittsbetrachtungen. Es entsteht die Frage über die algebraische Charakterisierung der Gewebe des Grades $\geqq 4$, in denen die affine kleine Desargues-Bedingung universal gilt, also über eine direkte Verallgemeinerung der Translationsebenen. Eine solche Charakterisierung möchte ich im weiteren herleiten. Dabei gebrauche ich die „zulässigen" Algebren, welche ich schon bei einer anderen Gelegenheit eingeführt habe (vgl. [4], § 2); der Bequemheit halber werde ich die Definition von solchen Algebren kurz wiedergeben. Diese Algebren haben den Vorteil, daß ihre binären Operationen sämtlich Loopoperationen sind und daß sie beim Übergang vom 3-Gewebe zur affinen Ebene unmittelbar in planare Ternärringe übergehen. Bei den Beweisen werde ich die Eigenschaften der Gewebeautomorphismen in expliziter Form nicht verwenden. Eine Ausdehnung des Baerschen Begriffs der (P, g)-Transitivität auf Gewebe habe ich in der Note [6] durchgeführt. Eine Anregung für den vorliegenden Artikel gaben die kürzlich erschienenen Resultate von V. D. Belousov und G. B. Beljavskaja aus dem ersten Teil von [3]; diese Resultate kommen als Sonderfälle in unseren Ergebnissen vor.

Erstens werden wir einige Begriffe über Gewebe einführen, sowohl wie den Begriff der zulässigen Algebra. Dann werden wir über die gegenseitige Beziehung zwischen

Geweben und zulässigen Algebren kurz berichten, wonach schon die Untersuchung der Desargues-Bedingungen in Geweben beginnen kann.

Unter einem *Gewebe* werden wir ein Tripel $(\mathscr{P}, \mathscr{G}, (V_\iota)_{\iota\in I})$ verstehen, wobei $\mathscr{P}$ eine nichtleere Menge, $\mathscr{G}$ eine Menge von gewissen wenigstens zweielementigen Untermengen von $\mathscr{P}$, I eine nichtleere Indexmenge und $\iota \mapsto V_\iota$ eine injektive Abbildung der Menge I in die Menge $\mathscr{P}$ ist, so daß die folgenden Axiome erfüllt sind:

(i) $$v := \{V_\iota \mid \iota \in I\} \in \mathscr{G},$$

(ii) $$\forall P \in \mathscr{P} \setminus v \quad \forall \iota \in I \quad \exists!\, g \in \mathscr{G} \quad P, V_\iota \in g,$$

(iii) $$\forall g \in \mathscr{G} \setminus \{v\} \quad \exists!\, \iota \in I \quad V_\iota \in g,$$

(iv) $$\forall a, b \in \mathscr{G} \setminus \{v\}\,;\ a \neq b \quad \#(a \cap b) = 1.$$

Die Elemente von $\mathscr{P}$ heißen *Punkte*, die Elemente von $\mathscr{G}$ heißen *Geraden*, die Punkte von v heißen *singulär* oder *uneigentlich*, während die übrigen als *gewöhnliche* oder *eigentliche* Punkte bezeichnet werden; die Gerade v heißt *singulär* oder *uneigentlich*, die übrigen heißen dann *gewöhnliche* oder *eigentliche* Geraden; eigentliche Geraden durch V_ι $(\iota \in I)$ werden *ι-Geraden* genannt und $\#I$ heißt der *Grad* des Gewebes. Die Bezeichnung $\overline{A_1, \ldots, A_n}$ soll bedeuten, daß die Punkte $A_1, \ldots, A_n$ auf derselben Geraden liegen. Sind A, B verschiedene Punkte, dann ist enweder $\{g \in \mathscr{G} \mid A, B \in g\} = \emptyset$ oder $\#\{g \in \mathscr{G} \mid A, B \in g\} = 1$; im letzten Fall nennen wir die Gerade durch A, B die *Verbindungsgerade* von A, B und bezeichnen sie mit AB. Sind a, b verschiedene Geraden, dann gibt es genau einen Punkt, der auf beiden Geraden liegt; dieser heißt der *Durchschnittspunkt* von a, b und wird mit $a \sqcap b$ bezeichnet.

Im weiteren beschränken wir uns auf Gewebe des Grades $\geqq 3$. Ist $\mathbf{G}$ (bzw. $\mathbf{G}$ mit irgendeinem Index rechts oben) ein Gewebe, dann werden wir stets $\mathbf{G} =: (\mathscr{P}, \mathscr{G}, (V_\iota)_{\iota\in I})$ (bzw. dasselbe mit entsprechenden Indexen rechts oben bei allen Symbolen) setzen und auch das Symbol v (bzw. v mit entsprechendem Index rechts oben) für die uneigentliche Gerade benützen.

Ist $\mathbf{G}$ ein Gewebe, dann ist $\#(g \setminus v)$ konstant für alle eigentlichen Geraden $g \in \mathscr{G}$ und diese Kardinalzahl heißt die *Ordnung* des Gewebes. Im weiteren sollen nur Gewebe der Ordnung >1 untersucht werden.

Ist $\mathbf{G}$ ein Gewebe des Grades $\geqq n$, dann bezeichnen wir für jedes n-Tupel voneinander verschiedener Indexe $(\iota_1, \ldots, \iota_n)$ mit $\mathbf{G}_{\iota_1,\ldots,\iota_n}$ das Gewebe $((\mathscr{P} \setminus v) \cup \{V_{\iota_1}, \ldots, V_{\iota_n}\}, \{g \in \mathscr{G} \setminus \{v\} \mid \exists i \in \{1, \ldots, n\}\ V_i \in g\} \cup \{\{V_{\iota_1}, \ldots, V_{\iota_n}\}\}, (V_{\iota_1}, \ldots, V_{\iota_n}))$.

Eine *zulässige Algebra* ist definiert als eine Menge M, ausgestattet mit einem ausgezeichneten Element $O \in M$, mit einem indexierten System $(\sigma_\iota)_{\iota\in J}$ von Permutationen der Menge M, wobei J eine Indexmenge, in welcher ein Index θ eine besondere Rolle spielt, und mit einem indexierten System $(+_\iota)_{\iota\in J}$ von Loopoperationen auf der Menge M, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $$\forall \iota \in J \quad O^{\sigma_\iota} = O,$$

(ii) $$\sigma_\theta = \mathrm{id}_M,$$

(iii) $$\forall \xi, \eta \in J\,;\ \xi \neq \eta \quad \forall b, c \in M \quad \exists!\, a \in M \quad a^{\sigma_\xi} +_\xi b = a^{\sigma_\eta} +_\eta c.$$

Ist $\mathbf{G}$ ein Gewebe, dann erklären wir für ihr *Bezugssystem* jedes Quadrupel $(O, \alpha, \beta, \gamma)$, wo $O \in \mathscr{P} \setminus v$ und $\alpha, \beta, \gamma \in I$ mit $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ ist.

Es sei $\mathbf{G}$ ein Gewebe und $(O, \alpha, \beta, \gamma)$ ihr Bezugssystem. Dann ist die zulässige Algebra $(M, O, (\sigma_\iota)_{\iota \in J}, (+_\iota)_{\iota \in J})$ eindeutig bestimmt, so daß $M := OV_\alpha \setminus \{V_\alpha\}$, $J := I \setminus \{\alpha, \beta\}$; das ausgezeichnete Element aus J sei γ, für jedes $\iota \in J$ sei $\sigma_\iota : M \to M$; $x \mapsto ((xV_\beta \sqcap OV_\gamma)\, V_\alpha \sqcap OV_\iota)\, V_\beta \sqcap OV_\alpha$ und für alle $a, b \in M$ sei $a^{\sigma_\iota} +_\iota b = ((aV_\beta \sqcap OV_\gamma)\, V_\alpha \sqcap bV_\iota)\, V_\beta \sqcap OV_\alpha$ (Abb. 1–2). Das Erfülltsein sämtlicher Bedingungen aus der Definition der zulässigen Algebra kann ohne Mühe verifiziert werden. Diese Algebra nennen wir die *Koordinatenalgebra* von $\mathbf{G}$ (bezüglich $(O, \alpha, \beta, \gamma)$) und die Abbildung $\mu : M \times M \to \mathscr{P} \setminus v$; $(a, b) \mapsto (aV_\beta \sqcap OV_\gamma)\, V_\alpha \sqcap bV_\beta$ die *Koordinatenabbildung* (bezüglich $(O, \alpha, \beta, \gamma)$).

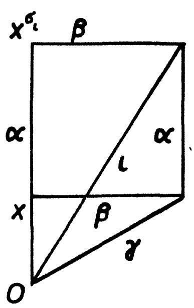

Abb. 1.

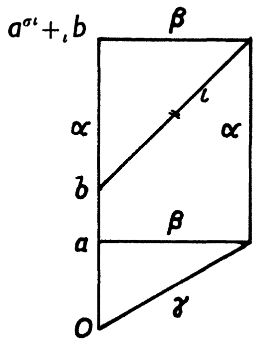

Abb. 2.

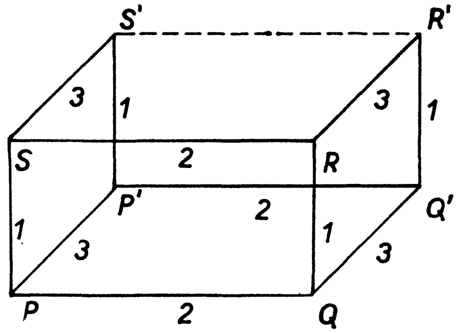

Abb. 3.

Es sei $\mathbf{A} = (M, O, (\sigma_\iota)_{\iota \in J}, (+_\iota)_{\iota \in J})$, $\# M > 1$, eine zulässige Algebra mit ausgezeichnetem Index θ. Dann bestimmen wir ein Gewebe $\mathbf{G}$ folgendermaßen: $I := J \cup \{\omega_1, \omega_2\}$, wo $\{\omega_1, \omega_2\}$ eine willkürliche zu J fremde zweielementige Menge, $\mathscr{P} := (M \times M) \cup I$, $v := I$, $\mathscr{G} := \{\{(x, y) \mid x = a\} \cup \{\omega_2\} \mid a \in M\} \cup \{\{(x, y) \mid y = b\} \cup \{\omega_1\} \mid b \in M\} \cup \{\{(x, y) \mid y = x^{\sigma_\iota} +_\iota c\} \cup \{\iota\} \mid c \in M,\ \iota \in J\}$.

Es ist wieder nur Routinensache zu überprüfen, daß es sich wirklich um ein Gewebe handelt. Wir nennen dieses $\mathbf{G}$ das Gewebe *über* $\mathbf{A}$.

Es sei $\mathbf{G}$ ein Gewebe des Grades 3, wo $I = \{1, 2, 3\}$. Unter der Reidemeister-Bedingung in $\mathbf{G}$ verstehen wir die Implikation (Abb. 3):

$$(\forall P, Q, R, S, P', Q', R', S' \in \mathscr{P} \setminus v)\,(\overline{P, Q, V_2} \,\&\, \overline{Q, R, V_1} \,\&\, \overline{R, S, V_2} \,\&\, \overline{P, S, V_1} \,\&\, \overline{P', Q', V_2} \,\&\, \overline{Q', R', V_1} \,\&\, \overline{P, P', V_3} \,\&\, \overline{Q, Q', V_3} \,\&\, \overline{R, R', V_3} \,\&\, \overline{S, S', V_3} \Rightarrow \overline{R', S', V_2}).$$

Lehrsatz 1. *Es sei $\mathbf{G}$ ein Gewebe und $(O, \alpha, \beta, \gamma)$ irgendeines seiner Bezugssysteme. Dann ist $+_\iota$ für $\iota \in I \setminus \{\alpha, \beta\}$ genau dann assoziativ, wenn die Reidemeister-Bedingung in $\mathbf{G}_{\alpha, \beta, \iota}$ erfüllt ist.*

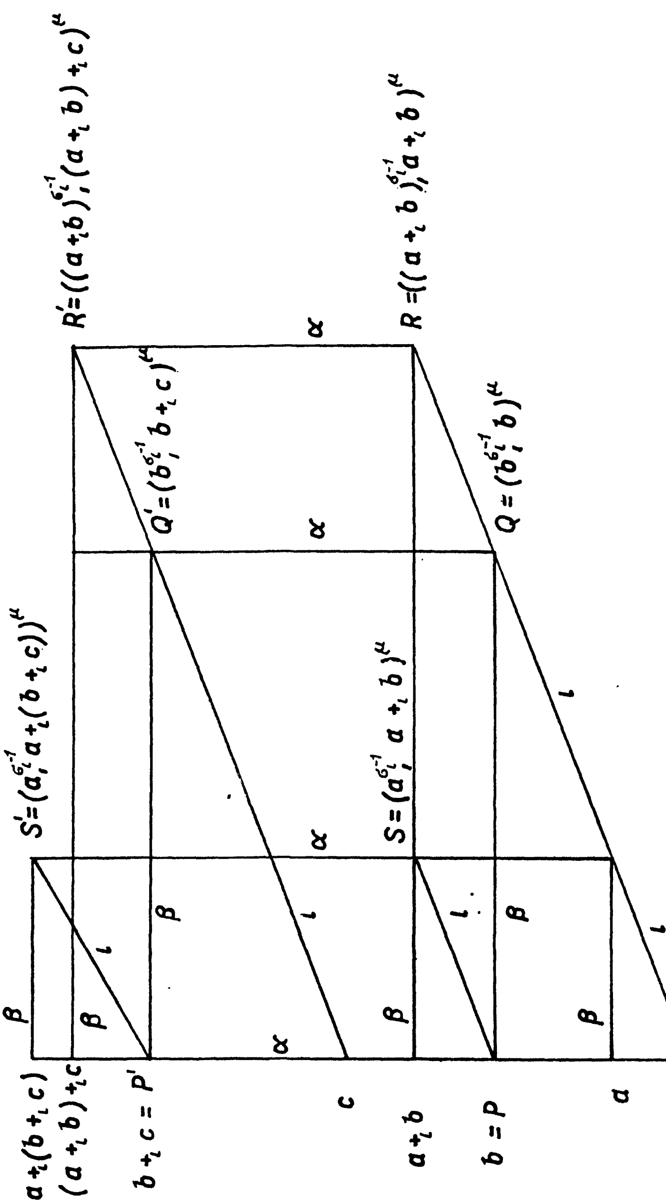

Abb. 4.

Beweis (Abb. 4). Für alle $a, b, c \in M := OV_\gamma \setminus v$ setzen wir $P := b$, $Q := (b^{\sigma_\iota^{-1}}, b)^\mu$, $R := ((a +_\iota b)^{\sigma_\iota^{-1}}, a +_\iota b)^\mu$, $S := (a^{\sigma_\iota^{-1}}, a +_\iota b)^\mu$, $R' := ((a +_\iota b)^{\sigma_\iota^{-1}}, (a +_\iota b) +_\iota c)^\mu$, $S' := (a^{\sigma_\iota^{-1}}, a +_\iota (b +_\iota c))^\mu$. Es gilt also $(a +_\iota b) +_\iota c = a +_\iota (b +_\iota c)$, genau wenn $\overline{R', S', V_\beta}$ erfüllt ist. Daraus folgt, daß $+_\iota$ genau dann assoziativ ist, wenn die Reidemeister-Bedingung in $\mathbf{G}_{\alpha,\beta,\iota}$ mit der Begrenzung $QV_\iota \sqcap PV_\gamma = O$ gilt. Es ist aber gut bekannt (siehe z. B. [7], S. 52–53), daß die Begrenzung $QV_\iota \sqcap PV_\gamma = O$ weggelassen werden kann und die Behauptung behält ihre Gültigkeit. ■

Es sei **G** ein Gewebe des Grades $\geqq 4$ und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von einander verschiedene Indexe (aus I). Unter der *Desargues-Bedingung des Typs* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ in **G** verstehen wir die Implikation (Abb. 5)

$$(\forall A, B, C, A', B', C' \in \mathscr{P} \setminus v)\,(\overline{A, A', V_\delta} \,\&\, \overline{B, B', V_\delta} \,\&\, \overline{C, C', V_\delta} \,\&$$
$$\&\, \overline{A, B, V_\gamma} \,\&\, \overline{A', B', V_\gamma} \,\&\, \overline{A, C, V_\beta} \,\&\, \overline{A', C', V_\beta} \,\&\, \overline{B, C, V_\alpha} \Rightarrow \overline{B', C', V_\alpha})\,.$$

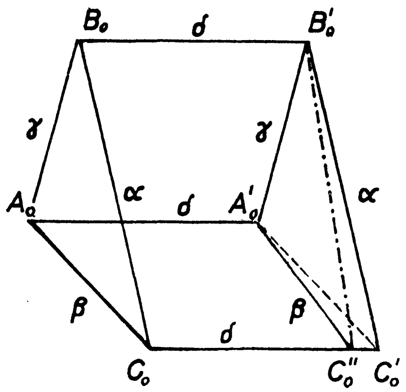

Abb. 5.

Gilt in **G** die Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ für einen festen Index δ und für jede drei voneinander verschiedene Indexe $\alpha, \beta, \gamma \neq \delta$, dann sagen wir, daß in **G** die *Desargues-Bedingung des Typs* (δ) gilt.

Gilt in **G** die Desargues-Bedingung des Typs (δ) für jeden Index δ, dann sagen wir, daß in **G** die Desargues-Bedingung *universal* gilt.

Lehrsatz 2. *Es sei* **G** *ein Gewebe des Grades* $\geqq 4$ *und* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *voneinander verschiedene Indexe.* a) *Gilt in* **G** *die Desargues-Bedingung des Typs* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, *dann gilt in* **G** *jede Implikation, welche aus der Desargues-Bedingung des Typs* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *durch die Vertauschung des Schlusses* $\overline{B', C', V_\alpha}$ *mit irgendwelcher der Voraussetzungen* $\overline{A, A', V_\delta}$, $\overline{B, B', V_\delta}$, $\overline{C, C', V_\delta}$, $\overline{A, B, V_\gamma}$, $\overline{A', B', V_\gamma}$, $\overline{A, C, V_\beta}$, $\overline{A', C', V_\beta}$, $\overline{B, C, V_\alpha}$. b) *Es gilt die zu* a) *umgekehrte Behauptung.*

Beweis des Teiles a) für den Fall der Vertauschung des Schlusses gegen die Voraussetzung $\overline{A', C', V_\beta}$ kann folgendermaßen durchgeführt werden (ähnlicherweise schreitet man auch bei Vertauschung des Schlusses gegen irgendwelche der Voraussetzungen $\overline{A, B, V_\gamma}$, $\overline{A', B', V_\gamma}$, $\overline{A, C, V_\beta}$, $\overline{B, C, V_\alpha}$ fort). Es seien $A_0, B_0, C_0, A'_0, B'_0, C'_0$ die Punkte, welche die neuen Voraussetzungen erfüllen und es gelte $\overline{A'_0, C'_0, V_\delta}$ nicht

(Abb. 6a). Die β-Gerade durch A_0' schneidet die Gerade C_0V_δ im Punkt $C_0'' \neq C_0'$ und nach der Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, die auf die Punkte A_0, B_0, C_0, A_0', B_0', C_0'' angewendet ist, bekommen wir $\overline{B_0', C_0'', V_\alpha}$, im Widerspruch mit $\overline{B_0', C_0', V_\alpha}$. Der Fall der Vertauschung des Schlusses $\overline{B', C', V_\alpha}$ gegen $\overline{C, C', V_\delta}$ (und ähnlicherweise schließt man bei der Vertauschung des Schlusses gegen irgendwelche der Voraussetzungen $\overline{A, A', V_\delta}$, $\overline{B, B', V_\gamma}$) behandelt man wie folgt (siehe Abb. 6b): Es seien A_0, B_0, C_0, A_0', B_0', C_0' Punkte, welche die neuen Vorsetzungen erfüllen,

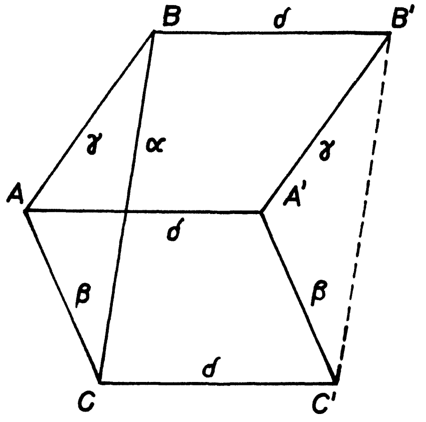

Abb. 6a.

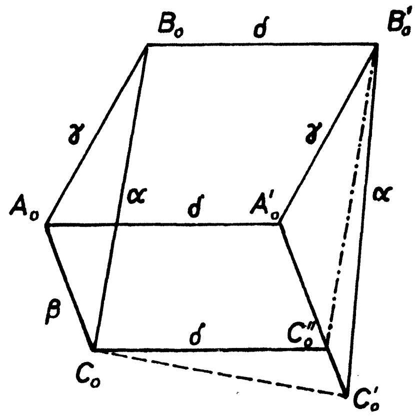

Abb. 6b.

wobei C_0, C_0', V_γ nicht gelte. Die δ-Gerade durch C_0 schneidet die Gerade $A_0'V_\beta$ im Punkt $C_0'' \neq C_0'$. Nach der Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, welche auf Punkte A_0, B_0, C_0, A_0', B_0', C_0'' angewendet ist, bekommen wir $\overline{B_0', C_0'', V_\alpha}$, im Widerspruch mit $\overline{B_0', C_0', V_\alpha}$. Der Beweis für den Teil b) ist analog. ■

Folgerung. *Es sei* **G** *ein Gewebe des Grades* $\geqq 4$ *und* $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *voneinander verschiedene Indexe. Gilt in* **G** *die Desargues-Bedingung des Typs* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, *dann gilt in* **G** *die Desargues-Bedingung des Typs* $(\alpha^\pi, \beta^\pi, \gamma^\pi, \delta^\pi)$ *für alle Permutationen* π *der Menge* $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

Lehrsatz 3. *Es sei* **G** *ein Gewebe des Grades* $\geqq 4$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *einander verschiedene Indexe und* O *ein eigentlicher Punkt.* a) *Gilt in* **G** *die Desargues-Bedingung des Typs* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *mit Begrenzung* $A = O$, *bzw.* $B = O$, *bzw.* $C = O$, *dann gilt in* **G** *jede Implikation, welche aus der Desargues-Bedingung des Typs* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *mit Begrenzung* $A = O$, *bzw.* $B = O$, *bzw.* $C = O$ *so entsteht, daß der Schluß* $\overline{B', C', V_\gamma}$ *gegen irgendwelche der Voraussetzungen* $\overline{A, A', V_\delta}$, $\overline{B, B', V_\delta}$, $\overline{C, C', V_\delta}$, $\overline{A, B, V_\gamma}$, $\overline{A', B', V_\gamma}$, $\overline{A, C, V_\beta}$, $\overline{A', C', V_\beta}$, $\overline{B, C, V_\alpha}$ *vertauscht wird.* b) *Es gilt die zu* a) *umgekehrte Behauptung.*

Beweis. Zuerst untersuchen wir die Behauptung a). Der Fall der Vertauschung von $\overline{B', C', V_\alpha}$ gegen irgendwelche der Voraussetzungen $\overline{B, B', V_\gamma}$, $\overline{C, C', V_\delta}$, $\overline{A', C', V_\beta}$ $\overline{A', B', V_\gamma}$, $\overline{B, C, V_\alpha}$ kann ähnlich wie im Beweis des Lehrsatzes 2 behandelt werden, weil die Begrenzung $A = O$ keine Verletzung bedeutet.

Also widmen wir uns dem Fall der Vertauschung von $\overline{B', C', V_\alpha}$ gegen $\overline{A, A', V_\delta}$ (Abb. 7). Es seien $A_0, B_0, C_0, A'_0, B'_0, C'_0$ Punkte, welche alle neuen Voraussetzungen erfüllen und es gelte nicht $\overline{A_0, A'_0, A_\delta}$. Setzen wir $A''_0 := OV_\delta \sqcap B'V_\gamma \neq A_0$, $C''_0 :=$ $:= A''_0V_\beta \sqcap C_0V_\gamma \neq C'_0$. Dann erfüllen die Punkte $A_0, B_0, C_0, A''_0, B''_0, C''_0$ die Voraussetzungen der Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ mit Begrenzung $A_0 = O$, so daß $\overline{B'_0, C''_0, V_\alpha}$ folgt, im Widerspruch mit $\overline{B'_0, C'_0, V_\alpha}$.

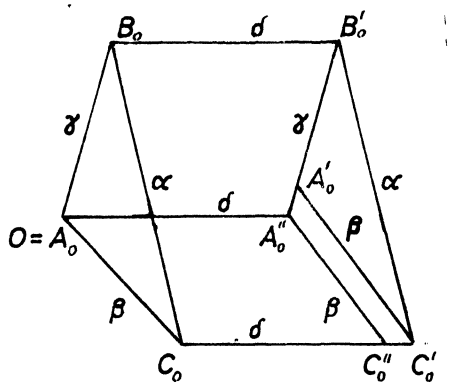

Abb. 7.

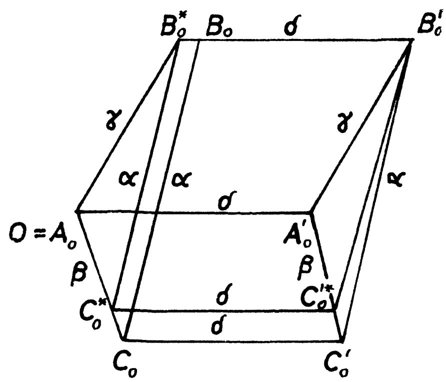

Abb. 8.

Weiter untersuchen wir den Fall der Vertauschung von $\overline{B', C', V_\alpha}$ gegen $\overline{A, B, V_\gamma}$ (Abb. 8). Es seien also $A_0, B_0, C_0, A'_0, B'_0, C'_0$ Punkte, welche die neuen Voraussetzungen erfüllen, wobei $\overline{A_0, B_0, V_\gamma}$ nicht gelte. Setzen wir $B^*_0 := OV_\gamma \sqcap B'V_\delta \neq B_0$, $C^*_0 := B^*_0V_\alpha \sqcap OV_\beta \neq C_0$, $C'^*_0 := C^*_0V_\delta \sqcap A'_0V_\beta \neq C'_0$, dann erfüllen die Punkte $A_0, B_0, C_0, A'_0, B'_0, C'^*_0$ die Voraussetzungen der Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ mit Begrenzung $A = O$, so daß $\overline{B'_0, C'^*_0, V_\alpha}$ gilt, im Widerspruch mit $\overline{B', C', V_\alpha}$. Der Fall der Vertauschung von $\overline{B', C', V_\alpha}$ gegen $\overline{A, C, V_\beta}$ kann ähnlicherweise behandelt werden.

Auch die Behauptung b) kann schon nur durch Modifikationen von vorangehenden Betrachtungen bewiesen werden. ■

Lehrsatz 4. *Es sei* **G** *ein Gewebe des Grades* $\geqq 4$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *einander verschiedene Indexe und* g_0 *eine* δ*-Gerade.* a) *Gilt in* **G** *die Desargues-Bedingung des Typs* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *mit Begrenzung* $A \in g_0$, *bzw.* $B \in g_0$, *bzw.* $C \in g_0$, *dann gilt in* **G** *jede Implikation, welche aus der Desargues-Bedingung des Typs* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *durch Vertauschung des Schlusses* $\overline{B', C', V_\alpha}$ *gegen irgendwelche der Voraussetzungen*

$\overline{A, A', V_\delta}$, $\overline{B, B', V_\delta}$, $\overline{C, C', V_\delta}$, $\overline{A, B, V_\gamma}$, $\overline{A', B', V_\gamma}$, $\overline{A, C, V_\beta}$, $\overline{A', C', V_\beta}$, $\overline{B, C, V_\alpha}$ *mit Begrenzung* $A \in g_0$, *bzw.* $B \in g_0$, *bzw.* $C \in g_0$. b) *Es gilt die zu* a) *umgekehrte Behauptung.*

Beweis. Erstens betrachten wir den Teil a), und zwar den Fall der Vertauschung von $\overline{B', C', V_\alpha}$ gegen $\overline{A', B', V_\gamma}$ bei Begrenzung $A_\gamma \in g_0$ (Abb. 9). Es seien also $A_0, B_0, C_0, A'_0, B'_0, C'_0$ Punkte, welche die neuen Voraussetzungen erfüllen, wobei $\overline{A'_0, B'_0, V_\gamma}$. Die γ-Gerade durch A'_0 schneide die Gerade B_0V_δ im Punkt $B''_0 \neq B'_0$. Nun verwenden wir die Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ mit Begrenzung $A \in g_0$ auf die Punkte $A_0, B_0, C_0, A'_0, B''_0, C'_0$. Wir bekommen $\overline{B''_0, C'_0, V_\gamma}$, im Widerspruch mit $\overline{B'_0, C'_0, V_\gamma}$. Ähnlich schließt man bei Vertauschung von $\overline{B', C', V_\alpha}$ gegen $\overline{A, B, V_\gamma}$, bzw. $\overline{A', C', V_\beta}$, bzw. $\overline{A, C, V_\beta}$ mit der Begrenzung $A \in g_0$.

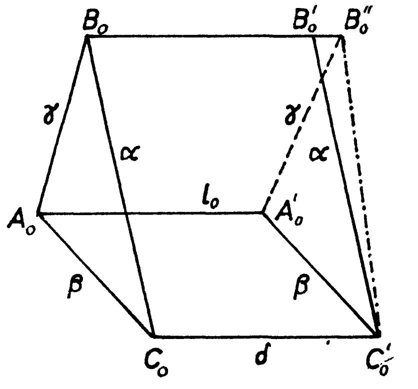

Abb. 9.

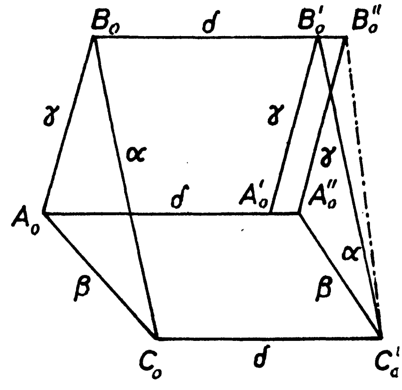

Abb. 10.

Den Fall der Vertauschung des Schlusses $\overline{B', C', V_\alpha}$ gegen $\overline{B, B', V_\delta}$ behandelt man sofort, wenn man im Auge hat, daß die Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ äquivalent als die Implikation $(\forall A, B, C, A', B', C' \in \mathscr{P} \setminus v)$ $(\overline{A, B, V_\gamma} \,\&\, \overline{A, C, V_\beta} \,\&\, \&\, \overline{B, C, V_\alpha} \,\&\, \overline{A, A', V_\delta} \,\&\, \overline{C, C', V_\delta} \Rightarrow B'V_\delta, A'V_\gamma, C'V_\alpha$ gehen durch denselben Punkt) formuliert werden kann.

Nun übergehen wir zum Fall der Vertauschung des Schlusses $\overline{B', C', V_\alpha}$ gegen $\overline{A', C', V_\beta}$ bei Begrenzung $B \in g_0$ (Abb. 10). Es seien also für die Punkte $A_0, B_0, C_0, A'_0, B'_0, C'_0$ die neuen Voraussetzungen erfüllt, wobei $\overline{A'_0, C'_0, V_\beta}$ nicht gelte. Weiter sei A''_0 der Schnittpunkt der β-Geraden durch C'_0 und der Geraden A_0V_δ. Nun verwenden wir die Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ mit Begrenzung $B \in g_0$ auf die Punkte $A_0, B_0, C_0, A''_0, B''_0, C'_0$. Dann folgt $\overline{B''_0, C'_0, V_\alpha}$, aber dies widerspricht mit $\overline{B'_0, C'_0, V_\alpha}$.

Der Fall der Vertauschung von $\overline{B', C', V_\alpha}$ gegen irgendeine der übrigbleibenden Voraussetzungen bei der Begrenzung $B \in g_0$ und der Fall der Vertauschung von

$\overline{B', C', V_\alpha}$ gegen irgendwelche der Voraussetzungen bei der Begrenzung $C \in g_0$ kann man immer auf irgendeinen vorher behandelten Fall überführen. Die Behauptung b) beweist man ähnlicherweise. ∎

Folgerung. *Es sei* $\mathbf{G}$ *ein Gewebe des Grades* $\geqq 4$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *voneinander verschiedene Indexe und* g_0 *eine* δ*-Gerade. Gilt in* $\mathbf{G}$ *die Desargues-Bedingung des Typs* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *mit der Einschränkung* $A \in g_0$, *bzw.* $B \in g_0$, *bzw.* $C \in g_0$, *dann gilt die Desargues-Bedingung des Typs* $(\alpha^\pi, \beta^\pi, \gamma^\pi, \delta^\pi)$ *in* $\mathbf{G}$ *mit der Einschränkung, daß irgendwelcher der Punkte* A, B, C *auf* g_0 *liegt, und zwar für jede Permutation* π *der Menge* $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

Den Sonderfall der Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ aus der vorherigen Folgerung werden wir als *Desargues-Bedingung des Typs* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, g_0)$ bezeichnen. Gilt in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, g_0)$ für einen festen Index δ, eine feste δ-Gerade g und alle Indexe α, β, γ, so daß $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ voneinander verschieden ist, so sagen wir, daß in $\mathbf{G}$ die *Desargues-Bedingung des Typs* (δ, g) gilt.

Lehrsatz 5. *Es sei* $\mathbf{G}$ *ein Gewebe des Grades* $\geqq 4$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *voneinander verschiedene Indexe und* O *ein eigentlicher Punkt. Gilt in* $\mathbf{G}$ *die Desargues-Bedingung des Typs* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *mit der Einschränkung* $A = O$, *bzw.* $B = O$, *bzw.* $C = O$, *dann gilt in* $\mathbf{G}$ *die Desargues-Bedingung des Typs* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, OV_\delta)$.

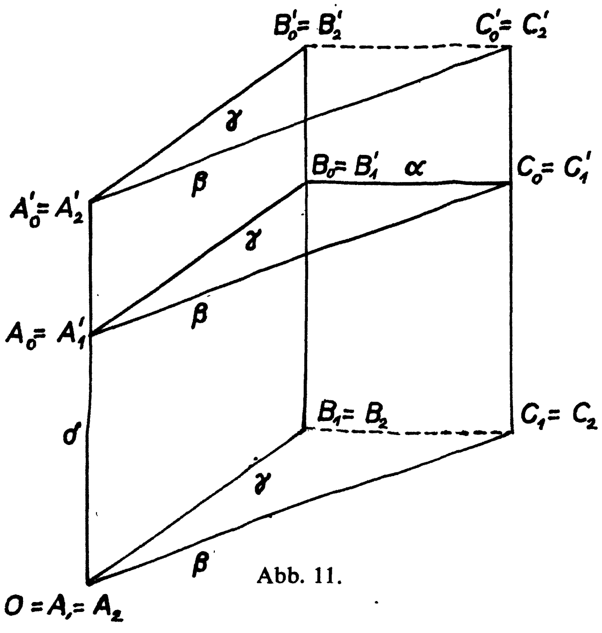

Abb. 11.

Beweis. Es seien also $A_0, B_0, C_0, A_0', B_0', C_0'$ die Punkte, welche die Voraussetzungen der Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ bei der Einschränkung $A \in OV_\gamma$ erfüllen (Abb. 11). Die Punkte $A_1 := O$, $B_1 := OV_\gamma \sqcap B_0V_\delta$, $C_1 := OV_\beta \sqcap C_0V_\delta$,

$A_1' := A_0$, $B_1' := B_0$, $C_1' := C_0$ erfüllen die Voraussetzungen der Implikation, welche aus der Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ mit der Begrenzung $A = O$ durch die Verwechslung des Schlusses $\overline{B', C', V_\alpha}$ mit der Voraussetzung $\overline{B, C, V_\alpha}$ entsteht. Auf Grund des Lehrsatzes 3 bekommen wir also $\overline{B_1, C_1, V_\alpha}$. Die Punkte $A_2 := O$, $B_2 := B_1$, $C_2 := C_1$, $A_2' := A_0$, $B_2' := B_0'$, $C_2' := C_0'$ erfüllen die Voraussetzungen der Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ mit der Einschränkung $A = O$, so daß $\overline{B_2', C_2', V_\alpha}$, d. h. $\overline{B_0', C_0', V_\alpha}$ folgt. Der Rest folgt schon nach dem Lehrsatz 3. Ähnlich schließt man bei der Einschränkung $B = O$, bzw. $C = O$. ∎

Bemerkung. Es sei $\mathbf{G}$ ein Gewebe, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ voneinander verschiedene Indexe und O ein eigentlicher Punkt. Gilt in $\mathbf{G}$ die Implikation, welche aus der Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ mit der Einschränkung $A = O$, bzw. $B = O$, bz$_2$. $C = O$ durch die Verwechslung des Schlusses $\overline{B', C', V_\alpha}$ mit irgendwelcher der Voraussetzungen $\overline{A, A', V_\delta}$, $\overline{B, B', V_\delta}$, $\overline{C, C', V_\delta}$, $\overline{A, B, V_\gamma}$, $\overline{A', B', V_\gamma}$, $\overline{A, C, V_\beta}$, $\overline{A', C', V_\beta}$, $\overline{B, C, V_\gamma}$ entsteht, dann gilt in $\mathbf{G}$ dieselbe Implikation mit schwacher Einschränkung $A \in OV_\delta$, bzw. $B \in OV_\delta$, bzw. $C \in OV_\delta$.

Der Beweis ist ähnlich durchführbar wie beim Lehrsatz 5. ∎

Satz 1. *Es sei $\mathbf{G}$ ein Gewebe des Grades $\geqq 4$, β, γ, δ voneinander verschiedene Indexe und g eine δ-Gerade. Gilt in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, g)$ für alle Indexe $\alpha \in I \setminus \{\beta, \gamma, \delta\}$, dann gilt in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs (δ, g).*

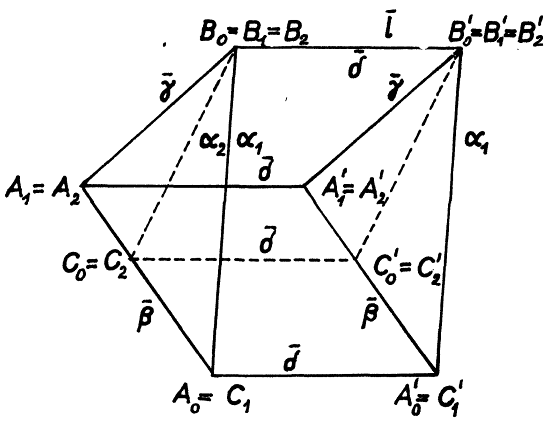

Abb. 12.

Beweis. Es gelte also in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, g)$ für jeden Index $\alpha \in I \setminus \{\beta, \gamma, \delta\}$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $B \in g$. Nehmen wir willkürliche Indexe $\alpha_1, \alpha_2 \in I \setminus \{\beta, \gamma, \delta\}$; $\alpha_1 \neq \alpha_2$ und Punkte $A_1, B_1, C_1, A_1', B_1', C_1'$, welche die Voraussetzungen der Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha_1, \beta, \gamma, \delta)$ mit Begrenzung $B \in g$ erfüllen (Abb. 12). Es folgt $\overline{B_1', C_1', V_{\alpha_1}}$. Weiter setzen wir

$A_2 := A_1$, $B_2 := B_1$, $C_2 := B_1V_{\alpha_2} \sqcap AV_\beta$, $A'_2 := A'_1$, $B'_2 := B'_1$, $C'_2 := C_2V_\delta \sqcap$ $\sqcap A'_1V_\beta$. Diese Punkte erfüllen die Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha_2, \beta, \gamma, \delta)$ mit Begrenzung $B \in g$. Die Punkte $A_0 := C_1$, $B_0 := B_1$, $C_0 := C_2$, $A'_0 := C'_1$, $B'_0 := B'_1$, $C'_0 := C'_2$ erfüllen dann die Voraussetzungen der Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha_2, \beta, \alpha_1, \delta)$ mit der Einschränkung $B \in g$, so daß B'_2, C'_2, V_{α_2} folgt, was auch als $\overline{B'_0, C'_0, V_{\alpha_2}}$ geschrieben werden kann. Es folgt also die Gültigkeit der Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, g)$ in $\mathbf{G}$ für alle Indexe α, γ, welche voneinander und auch von β, γ verschieden sind. Nach Folgerung des Lehrsatzes 4 ist die Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ in $\mathbf{G}$ der Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ in $\mathbf{G}$ unter der Begrenzung $C \in g$ äquivalent. Wählen wir also willkürliche

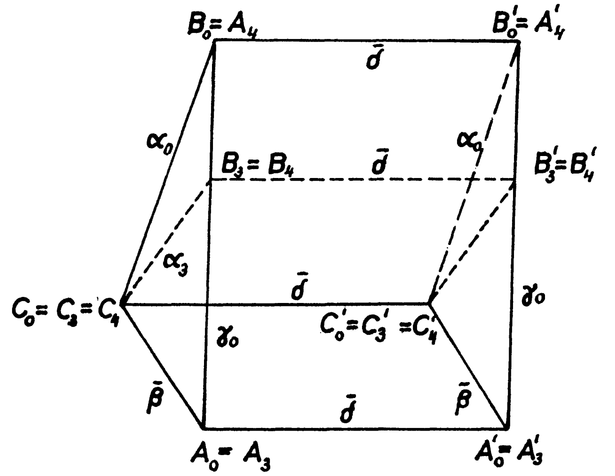

Abb. 13.

Indexe α_0, γ_0 in solcher Weise, daß $\alpha_0, \beta, \gamma_0, \delta$ voneinander verschieden sind und nehmen wir Punkte $A_0, B_0, C_0, A'_0, B'_0, C'_0$, welche die Voraussetzungen der Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha_0, \beta, \gamma_0, \delta)$ in $\mathbf{G}$ mit der Begrenzung $C \in g$ erfüllen (Abb. 13). Dann folgt $\overline{B'_0, C'_0, V_{\alpha_0}}$. Weiter sei $\alpha_3 \in I \setminus \{\beta, \gamma_0, \delta\}$. Die Punkte $A_3 := A_0$, $B_3 := C_0V_{\alpha_3} \sqcap A_0V_{\gamma_0}$, $C_3 := C_0$, $A'_3 := A'_0$, $B'_3 := B_3V_\delta \sqcap A'_0V_{\gamma_0}$, $C'_3 := C'_0$ erfüllen dann die Voraussetzungen der Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha_3, \beta, \gamma_0, \delta)$ in $\mathbf{G}$ mit Begrenzung $C \in g$, so daß sich $\overline{B'_3, C'_3, V_{\alpha_3}}$ ergibt. Andererseits erfüllen die Punkte $A_4 := B_0$, $B_4 := B_3$, $C_4 := C_3$, $A'_4 := B'_0$, $B'_4 := B_3$, $C'_4 := C'_3$ die Voraussetzungen der Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha_3, \alpha_0, \gamma_0, \delta)$ bei der Einschränkung $C \in g$. Nachdem $\overline{B'_3, C'_3, V_{\alpha_3}}$ auch als $\overline{B'_4, C'_4, V_{\alpha_3}}$ geschrieben werden kann, gilt in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, g)$ für alle $\alpha, \beta, \gamma \in I \setminus \{\delta\}$, für welche $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ voneinander verschieden sind, d. h. es gilt in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs (δ, g). ■

Folgerung.*) *Es sei* $\mathbf{G}$ *ein Gewebe des Grades* $\geqq 4$ *und* β, γ, δ *voneinander verschiedene Indexe. Gilt in* $\mathbf{G}$ *die Desargues-Bedingung des Typs* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *für jedes* $\alpha \in I \setminus \{\beta, \gamma, \delta\}$, *dann gilt in* $\mathbf{G}$ *die Desargues-Bedingung des Typs* (δ).

Lehrsatz 6. *Es sei* $\mathbf{G}$ *ein Gewebe des Grades* $\geqq 4$ *und* δ *irgendein Index. Gilt in* $\mathbf{G}$ *die Desargues-Bedingung des Typs* (δ), *dann gilt die Reidemeister-Bedingung in* $\mathbf{G}_{\delta,\eta,\zeta}$ *für alle* $\eta, \zeta \in I \setminus \{\delta\}$; $\eta \neq \zeta$.

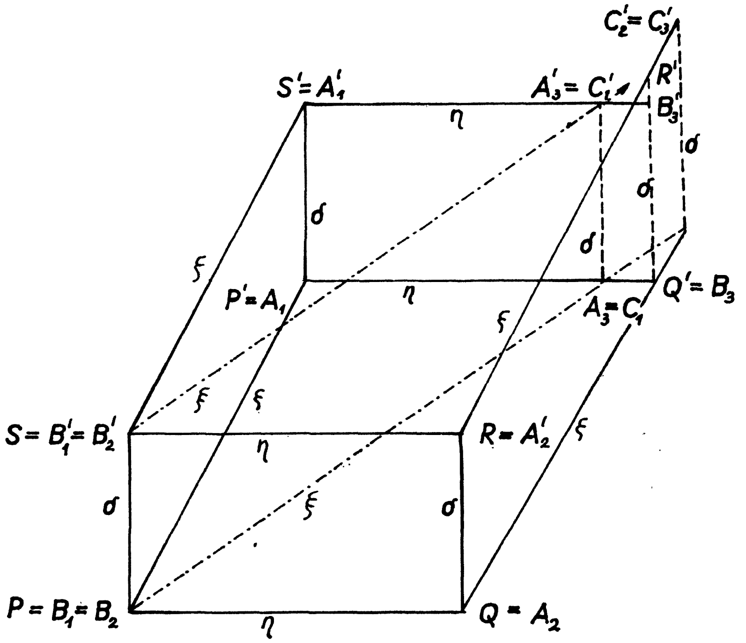

Abb. 14.

Beweis. Wählen wir also Indexe $\eta, \zeta \in I \setminus \{\delta\}$; $\eta \neq \zeta$. Weiter seien $\overline{P}, \overline{Q}, \overline{R}, \overline{S}, \overline{P}', \overline{Q}', \overline{R}', \overline{S}'$ Punkte, welche die Voraussetzungen der Reidemeister-Bedingung in $\mathbf{G}_{\delta,\eta,\zeta}$ befriedigen (Abb. 14). Es ist zu zeigen, daß $\overline{\overline{R}', \overline{S}', V_\eta}$ gilt. Es sei also $\xi \in I \setminus \{\eta, \zeta, \delta\}$. Dann setzen wir $A_1 := \overline{P}'$, $B_1 := \overline{P}$, $C_1 := \overline{P}V_\xi \sqcap \overline{P}'V_\eta$, $A'_1 := \overline{S}'$, $B'_1 := \overline{S}$, $C'_1 := C_1V_\delta \sqcap \overline{S}'V_\eta$. Diese Punkte erfüllen die Voraussetzungen der Desargues-Bedingung des Typs (δ), so daß $\overline{B'_1, C'_1, V_\xi}$ sich ergibt. Die Punkte $A_2 := \overline{Q}$, $B_2 := \overline{P}$, $C_2 := \overline{P}V_\xi \sqcap \overline{Q}V_\zeta$, $A'_2 := \overline{Q}$, $B'_2 := \overline{S}$, $C'_2 := C_2V_\delta \sqcap \overline{R}V_\zeta$ erfüllen die Voraussetzungen der Desargues-Bedingungen des Typs (δ), so daß sich $\overline{B'_2, C'_2, V_\xi}$ ergibt. Auch die Punkte $A_3 := C_1$, $B_3 := \overline{Q}'$, $C_3 := C_2$, $A'_3 := C'_1$, $B'_3 := \overline{Q}'$, $C'_3 := C'_2$ erfüllen die Voraussetzungen der Desargues-Bedingung des Typs (δ), so daß $\overline{B'_3, C'_3, V_\zeta}$ hervorgeht. Also gilt auch $\overline{R}' = B'_3$ und endlich $\overline{\overline{R}', \overline{S}', V_\eta}$. ■

*) Wurde schon in [3], S. 42—43, bewiesen.

Lehrsatz 7. *Es sei $\mathbf{G}$ ein Gewebe mit $I = \{1, 2, 3, 4\}$ und g eine 1-Gerade. Weiter gelte in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs $(1, g)$ und in $\mathbf{G}_{1,2,3}$, $\mathbf{G}_{1,2,4}$ die Reidemeister-Bedingung. Dann gilt in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs (1).*

Beweis (Abb. 15). Es seien $A_0, B_0, C_0, A_0', B_0', C_0'$ Punkte, welche die Voraussetzungen der Desargues-Bedingung des Typs (1) in $\mathbf{G}$ befriedigen. Dann erfüllen die Punkte $A_1 := A_0V_2 \sqcap g$, $B_1 := B_0V_2 \sqcap A_1V_3$, $C_1 := C_0V_2 \sqcap A_1V_3$, $A_1' := {}$ $:= A_0'V_2 \sqcap g$, $B_1' := B_0V_2 \sqcap A_1'V_3$, $C_1' := C_0'V_2 \sqcap A_1'V_3$ die Voraussetzungen der Desargues-Bedingung des Typs (1) mit der Einschränkung $A \in g$, so daß $\overline{B_1', C_1', V_2}$

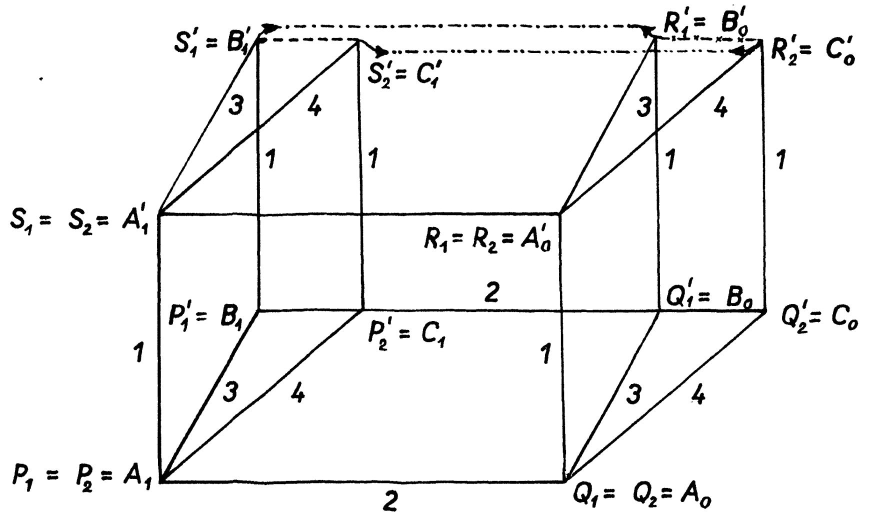

Abb. 15.

hervorgeht. Die Punkte $P_1 := A_1$, $Q_1 := A_0$, $R_1 := A_0'$, $S_1 := A_1'$, $P_1' := B_1$, $Q_1' := B_0$, $R_1' := B_0'$, $S_1' := B_1'$ befriedigen die Voraussetzungen der Reidemeister-Bedingung in $\mathbf{G}_{1,2,3}$, so daß $\overline{R_1', S_1', V_2}$ folgt. Also liegen die Punkte B_1', C_1', B_0 auf derselben 2-Geraden. Die Punkte $P_2 := A_1$, $Q_2 := A_0$, $R_2 := A_0'$, $S_2 := A_1'$, $P_2' := C_1$, $Q_2' := C_0$, $R_2' := C_0'$, $S_2' := C_1'$ erfüllen die Voraussetzungen der Reidemeister-Bedingung in $\mathbf{G}_{1,2,4}$, so daß sich $\overline{R_2', S_2', V_2}$ ergibt. Folglich liegt auch der Punkt C_0' mit den Punkten B_1', C_1', B_0' auf derselben 2-Geraden, so daß auch $\overline{B_0', C_0', V_2}$ gilt. Daraus ergibt sich schon die Gültigkeit der Desargues-Bedingung des Typs (1) in $\mathbf{G}$. ■

Lehrsatz 8. *Es sei $\mathbf{G}$ ein Gewebe mit $I := \{1, 2, 3, 4\}$ und $(O, 1, 2, 3)$ eines seiner Bezugssysteme. Dann gilt in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs $(1, OV_1)$ genau dann, wenn die beiden Operationen $+_3$, $+_4$ der Koordinatenalgebra bezüglich $(O, 1, 2, 3)$ zusammenfallen.*

Beweis (Abb. 16). Für willkürliche Elemente $a, b \in S := OV_1 \setminus \{V_1\}$ setzen wir $A = O$, $B = (a^{\sigma_3^{-1}}, a)^\mu$, $C = (a^{\sigma_4^{-1}}, a)^\mu$, $A' = b$, $B' = (a^{\sigma_3^{-1}}, a +_3 b)^\mu$, $C' = (a^{\sigma_4^{-1}}, a +_4 b)^\mu$. Die Punkte A, B, C, A', B', C' erfüllen die Voraussetzungen der Desargues-Bedingung des Typs (1) in $\mathbf{G}$ mit der Einschränkung $A = O$ und $a +_3 b = a +_4 b$ gilt genau dann, wenn $\overline{B', C', V_1}$ gilt. Daraus ergibt sich die Äquivalenz zwischen $+_3 = +_4$ und der Desargues-Bedingung des Typs (1) in $\mathbf{G}$ mit der Einschränkung $A = O$. Nach Lehrsatz 2 ist in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs (1) mit der Einschränkung $A = O$ mit der Desargues-Bedingung des Typs (1) mit der Einschränkung $A \in OV_1$ äquivalent und nach der Folgerung des Lehrsatzes 4 ist in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs (1) mit der Einschränkung $A \in OV_1$ und sogar mit der Desargues-Bedingung des Typs $(1, OV_1)$ äquivalent. ■

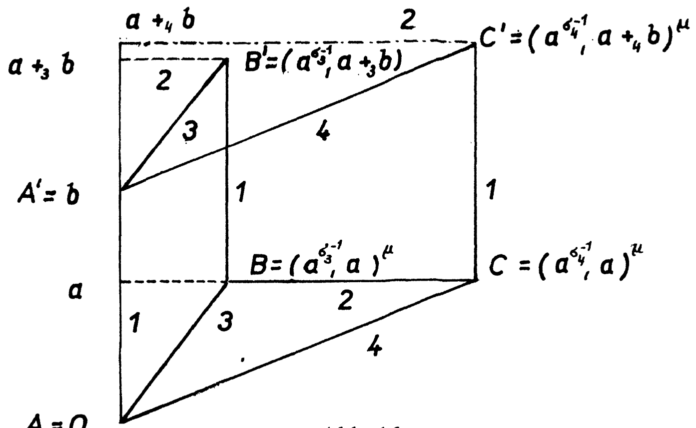

Abb. 16.,

Lehrsatz 9. *Es sei $\mathbf{G}$ ein Gewebe mit $I = \{1, 2, 3, 4\}$, $(O, 1, 2, 3)$ eines seiner Bezugssysteme und $+_3$, $+_4$ die beiden binären Operationen der Koordinatenalgebra bezüglich $(O, 1, 2, 3)$. Dann gilt in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs (1) genau dann, wenn $+_3$ eine Gruppenoperation ist, die mit $+_4$ zusammenfällt.*

Beweis. Nach dem Lehrsatz 8 ist $+_3 = +_4$ mit der Geltung der Desargues-Bedingung des Typs $(1, OV_1)$ in $\mathbf{G}$ äquivalent. Nach dem Lehrsatz 1 ist die Operation $+_3$, bzw. $+_4$ genau dann eine Gruppenoperation, wenn in $\mathbf{G}_{1,2,3}$, bzw. in $\mathbf{G}_{1,2,4}$ die Reidemeister-Bedingung erfüllt ist. Nach den Lehrsätzen 6–7 gilt in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs $(1, OV_1)$ zusammen mit der Reidemeister-Bedingung in $\mathbf{G}_{1,2,3}$ und $\mathbf{G}_{1,2,4}$, genau wenn in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs (1) gilt. Daraus ist die weitere Beweisführung klar. ■

Satz 2. *Es sei $\mathbf{G}$ ein Gewebe des Grades $\geqq 4$ und $(O, \alpha, \beta, \gamma)$ eines seiner Bezugssysteme. Dann gilt in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs (α), genau wenn die* *binäre Operation $+_\gamma$ der Koordinatenalgebra bezüglich $(O, \alpha, \beta, \gamma)$ eine Gruppenoperation ist und mit $+_\iota$ für jedes $\iota \in I \setminus \{\alpha, \beta\}$ zusammenfällt.*

Beweis. Wir wenden den Lehrsatz 9 auf jedes Gewebe $\mathbf{G}_{1,2,\iota}$, $\iota \in I \setminus \{\alpha, \beta\}$, an und gebrauchen noch die Folgerung des Satzes 1. ■

Lehrsatz 10. *Es sei* $\mathbf{G}$ *ein Gewebe mit* $I = \{1, 2, 3, 4\}$ *und* $(O, 1, 2, 3)$ *eines seiner Bezugssysteme. Weiter gelte in* $\mathbf{G}$ *die Desargues-Bedingung des Typs* $(1, OV_1)$. *Dann gilt in* $\mathbf{G}$ *die Desargues-Bedingung des Typs* $(2, OV_2)$ *genau dann, wenn die unäre Operation* σ_4 *der Koordinatenalgebra bezüglich* $(O, 1, 2, 3)$ *ein Automorphismus von* $(M, +)$ *ist, wobei* $M := OV_1 \setminus \{V_1\}$, $+ := +_3 = +_4$.

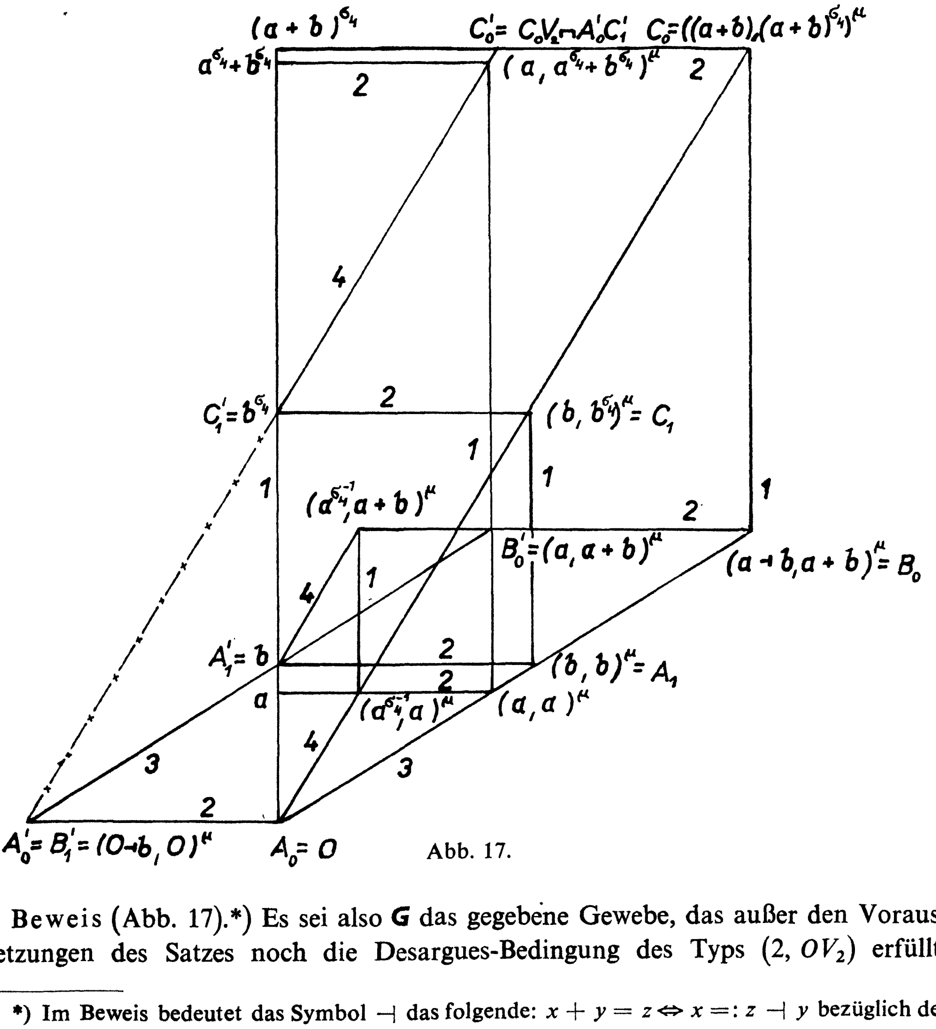

Abb. 17.

Beweis (Abb. 17).*) Es sei also $\mathbf{G}$ das gegebene Gewebe, das außer den Voraussetzungen des Satzes noch die Desargues-Bedingung des Typs $(2, OV_2)$ erfüllt.

*) Im Beweis bedeutet das Symbol $\dashv$ das folgende: $x + y = z \Leftrightarrow x =: z \dashv y$ bezüglich des Loops $(M, +)$. Ähnlicherweise setzen wir $x + y = z \Leftrightarrow y := x \vdash z$.

Weiter seien a, b beliebige Elemente aus M. Die Punkte $A_1 := (b, b)^\mu$, $B_1 := O$, $C_1 := (b, b^{\sigma_4})^\mu$, $A'_1 := b$, $B'_1 := (O \dashv b, O)^\mu$, $C'_1 := b^{\sigma_4}$ erfüllen die Voraussetzungen der Desargues-Bedingung des Typs $(2, OV_2)$ in $\mathbf{G}$, so daß $\overline{B'_1, C'_1, V_4}$ folgt. Die Punkte $A_0 := O$, $B_0 := (a + b, \ a + b)^\mu$, $C_0 := (a + b, \ (a + b)^{\sigma_4})^\mu$, $A'_0 := := (O \dashv b, O)^\mu$, $B'_0 := (a, a + b)^\mu$, $C'_0 := (a, a^{\sigma_4} + b^{\sigma_4})^\mu$ erfüllen die Voraussetzungen der Implikation, welche aus der Desargues-Bedingung des Typs $(2, OV_2)$ entsteht, indem man den Schluß $\overline{B', C', V_1}$ mit $\overline{C, C', V_4}$ umtauscht. Also folgt nach dem Lehrsatz 3 $\overline{C_0, C'_0, V_2}$, d. h. $C'_0 = (a, a^{\sigma_4} + b^{\sigma_4})^\mu$, $(a + b)^{\sigma_4} = a^{\sigma_4} + b^{\sigma_4}$. Folglich ist σ_4 der geforderte Automorphismus.

Umgekehrt sei σ_4 ein Automorphismus des Loops $(M, +)$. Dann gilt für jedes $a \in M$ auch $(O \dashv a)^{\sigma_4} = O \dashv a^{\sigma_4}$, so daß sich für jedes $b \in M$ die Geraden bV_3, $b^{\sigma_4}V_4$ im Punkt $(O \dashv b, O)^\mu$ durchschneiden. Setzen wir also $A_0 := O$, $B_0 := (a + b, a + b)^\mu$, $C_0 := (a, (a + b)^{\sigma_4})^\mu$, $A'_0 := (O \dashv b, O)^\mu$, $B'_0 := (a, a + b)^\mu$, $C'_0 := := (a, (a + b)^{\sigma_4})^\mu$, dann erfüllen diese Punkte die Voraussetzungen der Umkehrung der Desargues-Bedingung des Typs (2) in $\mathbf{G}$ mit Begrenzung $A = O$, die durch Umtauschen von $\overline{B', C', V_1}$ gegen $\overline{C, C', V_4}$ entsteht. Aus $(a + b)^{\sigma_4} = a^{\sigma_4} + b^{\sigma_4}$ folgt dann sofort $\overline{C_0, C'_0, V_4}$. Nach Lehrsatz 3 gilt also in $\mathbf{G}$ auch die Desargues-Bedingung des Typs (2) mit Begrenzung $A = O$ und nach Lehrsatz 5 auch die Desargues-Bedingung des Typs $(2, OV_2)$ in $\mathbf{G}$. ■

Lehrsatz 11. *Es sei $\mathbf{G}$ ein Gewebe mit $I = \{1, 2, 3, 4\}$ und $(O, 1, 2, 3)$ eines seiner Bezugssysteme. Weiter gelte in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs* (1). a) *Dann gilt in $\mathbf{G}$ sogar die Desargues-Bedingung des Typs* (2). b) *Die unäre Operation σ_4 der Koordinatenalgebra bezüglich $(O, 1, 2, 3)$ ist ein Automorphismus der Gruppe $(M, +)$, wo $M := OV_1 \setminus \{V_1\}$, $+ := +_3$, genau dann, wenn in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs* (2) *gilt.*

Beweis. Es sei also $\mathbf{G}$ das Gewebe, welches die Voraussetzungen des Lehrsatzes befriedigt. a) Überdies gelte in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs (1). Dann gilt nach Lehrsatz 6 in $\mathbf{G}_{1,2,3}$ und $\mathbf{G}_{1,2,4}$ die Reidemeister-Bedingung. Aus der Geltung der Reidemeister-Bedingung in $\mathbf{G}_{1,2,3}$ und $\mathbf{G}_{1,2,4}$ und der Desargues-Bedingung des Typs $(2, OV_2)$ in $\mathbf{G}$ folgt dann nach Lehrsatz 7 auch die Gültigkeit der Desargues-Bedingung des Typs (2) in $\mathbf{G}$. b) Es gelte in $\mathbf{G}$ außer den Voraussetzungen des Lehrsatzes noch die Desargues-Bedingung des Typs (1). Wegen Lehrsätzen 9–10 ist dann die binäre Operation $+ := +_3$ der Koordinatenalgebra bezüglich $(O, 1, 2, 3)$ eine Gruppenoperation, die mit $+_4$ zusammenfällt und σ_4 ein Automorphismus der Gruppe $(M, +)$, genau dann, wenn in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs $(2, OV_2)$ gilt, was aber nach Lehrsatz 11a) sogar mit der Geltung der Desargues-Bedingung des Typs (2) in $\mathbf{G}$ äquivalent ist.

Satz 3. *Es sei $\mathbf{G}$ ein Gewebe des Grades $\geqq 4$ und $(O, \alpha, \beta, \gamma)$ eines seiner Bezugssysteme. In $\mathbf{G}$ gelte weiter die Desargues-Bedingung des Typs (α), so daß also in* *der Koordinatenalgebra bezüglich* $(O, \alpha, \beta, \gamma)$ *eine Gruppenoperation ist, welche für jedes* $\iota \in I \setminus \{\alpha, \beta\}$ *mit* $+_\iota$ *zusammenfällt. Dann gilt in* **G** *die Desargues-Bedingung des Typs* (β) *genau dann, wenn für jedes* $\iota \in I \setminus \{\alpha, \beta\}$ *die Operation* σ_ι *ein Automorphismus der Gruppe* $(OV_\alpha \setminus \{V_\alpha\}, +_\gamma)$ *ist.*

Beweis. Folgt nach Verwendung des Lehrsatzes 11 auf jedes $\mathbf{G}_{\alpha,\beta,\iota}$, $\iota \in I \setminus \{\alpha, \beta\}$ und der Folgerung des Satzes 1. ■

Lehrsatz 12. *Es sei* **G** *ein Gewebe mit* $I = \{1, 2, 3, 4\}$ *und* $(O, 1, 2, 3)$ *eines seiner Bezugssysteme. Weiter gelte in* **G** *die Desargues-Bedingung des Typs* (1) *und* (2). *Dann gilt in* **G** *die Desargues-Bedingung des Typs* $(3, OV_3)$, *genau wenn die Gruppe* $(M, +)$ *abelsch ist, wobei sich die Bezeichnung* $M := OV_1 \setminus \{V_1\}$, $+ := +_3$ *auf die Koordinatenalgebra bezüglich* $(O, 1, 2, 3)$ *bezieht.*

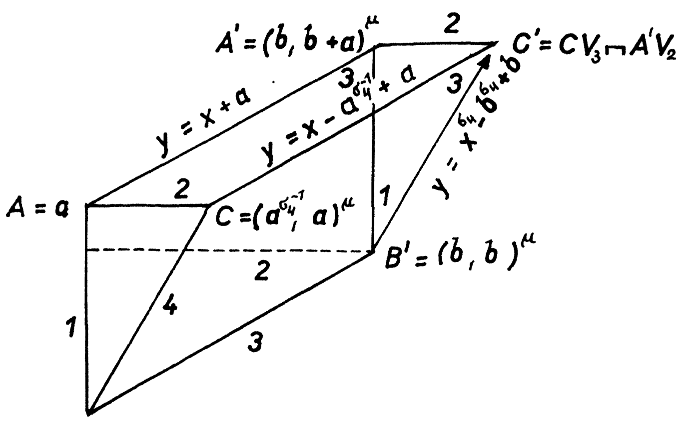

Abb. 18.,

Beweis (Abb. 18). Bei gegebenen Voraussetzungen ist $+$ eine Gruppenoperation und σ_4 ist ein Automorphismus der Gruppe $(M, +)$. Untersuchen wir also willkürliche Elemente $a, b \in M$. Die Punkte $A := a$, $B := O$, $C := (a^{\sigma_4^{-1}}, a)^\mu$, $A' := (b, b + a)^\mu$, $B' := (b, b)^\mu$, $C' := C_1V_3 \sqcap A_1'V_2 = (c, b + a)^\mu$ erfüllen die Voraussetzungen der Desargues-Bedingung des Typs (3) in **G** mit der Einschränkung $B = O$ und $\overline{B', C', V}$ gilt genau dann, wenn $b + a = c^{\sigma_4} - b^{\sigma_4} + b$, was mit $b + a = c - a^{\sigma_4^{-1}} + a$ und weiter mit $c = b + a^{\sigma_4^{-1}}$ äquivalent ist. Mit Verwendung der Eigenschaft, daß σ_4 ein Automorphismus der Gruppe $(M, +)$ ist, kann man die letzte Gleichung als $c^{\sigma_4} = b^{\sigma_4} + a$ schreiben. Nach Einsetzen in die erste Gleichung bekommt man $b + a = b^{\sigma_4} + a + (-b^{\sigma_4} + b)$ und weiter $a = (-b + b^{\sigma_4}) + a + (-b^{\sigma_4} + b)$. Umgekehrt folgen aus dieser Gleichung mit $c := b + a^{\sigma_4^{-1}}$ die Gleichungen $b + a = c^{\sigma_4} - b^{\sigma_4} + b = c - a^{\sigma_4^{-1}} + a$. Nun setzen wir $d := -b + b^{\sigma_4}$, d. h. $b + d = b^{\sigma_4}$; umgekehrt gibt es zu jedem $d \in M$ genau ein $b \in M$ mit

$b + d = b^{\sigma_4}$ nach der Eigenschaft (ii) aus der Definition der zulässigen Algebra. Also kann man $a = (-b + b^{\sigma_4}) + a + (-b^{\sigma_4} + b)$ $\forall a, b \in M$ äquivalent als $a = d + a - d$ $\forall a, d \in M$ schreiben. Da nach dem Lehrsatz 5 in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs (3) mit Begrenzung der $B = O$ mit der Desargues-Bedingung des Typs $(3, OV_3)$ äquivalent ist, ist der Beweis beendet. ■

Bemerkung. Der Lehrsatz 7 kann auch folgendermaßen modifiziert werden: Es sei $\mathbf{G}$ ein Gewebe mit $I = \{1, 2, 3, 4\}$, welches die Desargues-Bedingung des Typs (1) und (2) erfüllt. Gilt in $\mathbf{G}$ darüber hinaus noch die Desargues-Bedingung des Typs $(3, g_0)$ für eine 3-Gerade g_0, dann gilt in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs (3). Der Lehrsatz 12 gilt also auch, indem man die Desargues-Bedingung des Typs $(3, OV_3)$ durch die Desargues-Bedingung des Typs (3) ersetzt.

Satz 4. *Es sei $\mathbf{G}$ ein Gewebe des Grades $\geqq 4$, $(O, \alpha, \beta, \gamma)$ eines seiner Bezugssysteme und es gelte in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs (α) und (β), so daß also die binäre Operation $+_\gamma$ der Koordinatenalgebra bezüglich $(O, \alpha, \beta, \gamma)$ eine Gruppenoperation ist, die für jedes $\iota \in I \setminus \{\alpha, \beta\}$ mit $+_\iota$ zusammenfällt. Die Operation $+_\gamma$ ist überdies genau dann kommutativ, wenn in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha, \beta, \delta, \gamma, OV_3)$ für wenigstens ein $\delta \in I \setminus \{\alpha, \beta, \gamma\}$ gilt, bzw. wenn in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs (γ) gilt.*

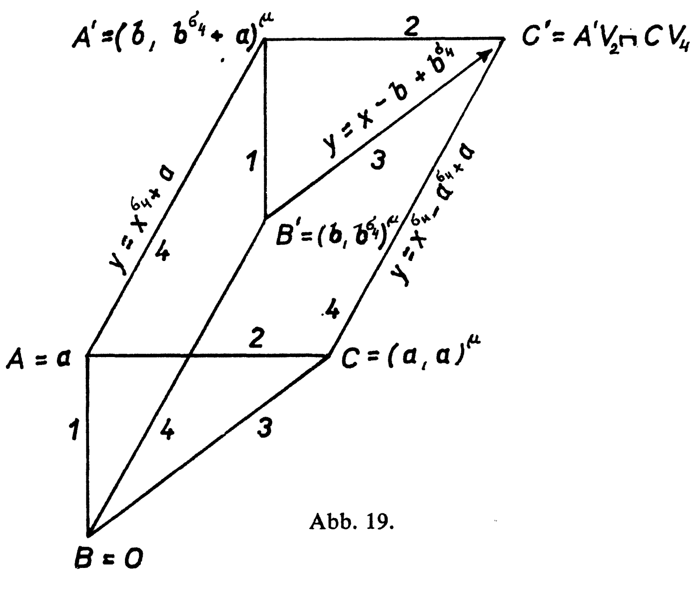

Abb. 19.

Beweis. Wir verwenden den Lehrsatz 12 und die Bemerkung hinter dem Lehrsatz 12 auf jedes $\mathbf{G}_{\alpha,\beta,\gamma,\iota}$, $\iota \in I \setminus \{\alpha, \beta, \gamma\}$ mit Hilfe der Folgerung des Satzes 1 und der Lehrsätze 6–7. ■

Bemerkung. Einen Teil des Satzes 4 bildet die folgende Behauptung, welche wir wegen ihrer rein geometrischen Gestalt getrennt aussprechen: Es sei **G** ein Gewebe des Grades $\geqq 4$ und α, β, γ voneinander verschiedene Indexe. Gilt in **G** die Desargues-Bedingung des Typs (α), des Typs (β) und des Typs $(\alpha, \beta, \delta, \gamma)$ für ein $\delta \in I \setminus \{\alpha, \beta, \gamma\}$, dann gilt in **G** die Desargues-Bedingung des Typs (γ).

Lehrsatz 13. *Es sei* **G** *ein Gewebe mit* $I = \{1, 2, 3, 4\}$ *und* $(O, 1, 2, 3)$ *eines seiner Bezugssysteme. Weiter gelte in* **G** *die Desargues-Bedingung des Typs* (1) *und* $(3, OV_3)$. *Dann gilt in* **G** *genau dann die Desargues-Bedingung des Typs* $(4, OV_4)$, *wenn für die Operationen* $+ := +_3$ *und* σ_4 *der Koordinatenalgebra bezüglich* $(O, 1, 2, 3)$ *die Gleichung* $b^{\sigma_4} + a = b + a - b + b^{\sigma_4}$ $\forall a, b \in M$ *gilt.*

Beweis (Abb. 19). Untersuchen wir beliebige Elemente $a, b \in M := OV_1 \setminus \{V_1\}$. Die Punkte $A := a$, $B := O$, $C := (a, a)^\mu$, $A' := (b, b^{\sigma_4} + a)^\mu$, $B' := (b, b^{\sigma_4})^\mu$, $C' := (c, b^{\sigma_4} + a)^\mu = A'V_2 \sqcap CV_4$ erfüllen die Voraussetzungen der Desargues-Bedingung des Typs (4) in **G** mit der Begrenzung $B = O$. Der Schluß $\overline{B', C', V_2}$ dieser Desargues-Bedingung ist mit $b^{\sigma_4} + a = c - b + b^{\sigma_4} = c^{\sigma_4} - a^{\sigma_4} + a$ äquivalent. Die Gleichung $b^{\sigma_4} + a = c^{\sigma_4} - a^{\sigma_4} + a$ kann zu $b^{\sigma_4} = c^{\sigma_4} - a^{\sigma_4}$ und weiter zu $b^{\sigma_4} + a^{\sigma_4} = c^{\sigma_4}$, $b + a = c$ vereinfacht werden. Aus $b^{\sigma_4} + a = b + a + b^{\sigma_4}$ folgt umgekehrt $b^{\sigma_4} + a = c^{\sigma_4} - a^{\sigma_4} + a$, wobei $c := b + a$ gesetzt ist. Hieraus und vom Lehrsatz 5 ist die weitere Beweisführung klar. ∎

Folgerung. a) *Ist in den Voraussetzungen des Lehrsatzes* 13 *die Operation* $+$ *sogar kommutativ, dann gilt* $b^{\sigma_4} + a = b + a - b + b^{\sigma_4}$ $\forall a, b \in M$. b) *Wenn neben den Voraussetzungen des Lehrsatzes* 13 *noch die Desargues-Bedingung des Typs* $(3, OV_3)$ *in* **G** *gilt, dann gilt in* **G** *die Desargues-Bedingung des Typs* $(4, OV_3)$. c) *Ist* **G** *ein Gewebe mit* $I = \{1, 2, 3, 4\}$, *in welchem die Desargues-Bedingung des Typs* (1), (2) *und* (3) *gilt, dann gilt in* **G** *die Desargues-Bedingung des Typs* (4).

Beweis einfach.

Lehrsatz 14. *Es sei* **G** *ein Gewebe des Grades* $\geqq 4$, $(O, \alpha, \beta, \gamma)$ *eines seiner Bezugssysteme und* ϱ, σ, τ *Indexe, die voneinander und von* α, β *verschieden sind. Weiter gelte in* **G** *die Desargues-Bedingung des Typs* (α) *und* (β). *Dann gilt in* **G** *genau dann die Desargues-Bedingung des Typs* $(\alpha, \beta, \varrho, \tau, OV_\tau)$, *wenn in der Koordinatenalgebra bezüglich* $(O, \alpha, \beta, \gamma)$ *für die unären Operationen* σ_ϱ, σ_τ *und für die binäre Operation* $+ := +_\gamma$ *die Gleichung* $b^{\sigma_\tau} + a = b^{\sigma_\rho} + a - b^{\sigma_\varrho} + b^{\sigma_\tau}$ $\forall a, b \in M :=$ $:= OV_\alpha \setminus \{V_\alpha\}$ *gilt.*

Beweis (Abb. 20). Untersuchen wir beliebige Punkte $a, b \in M$. Die Punkte $A := a$, $B := O$, $C := (a^{\sigma_\varrho^{-1}}, a)^\mu$, $A' := (b, b^{\sigma_\tau} + a)^\mu$, $B' := (b, b^{\sigma_\tau})^\mu$, $C' :=$ $:= (c, b^{\sigma_\tau} + a)^\mu$ erfüllen die Voraussetzungen der Desargues-Bedingung des Typs (τ)

in **G** mit Einschränkung $B = O$. Der Schluß $\overline{B', C', V_\varrho}$ dieser Desargues-Bedingung gilt genau dann, wenn $b^{\sigma_\tau} + a = c^{\sigma_\varrho} - b^{\sigma_\varrho} + b^{\sigma_\tau} = b^{\sigma_\tau} - a^{\sigma_\varrho^{-1}\sigma_\tau} + a$. Wie beim Beweis des Lehrsatzes 13 überführen wir die Gleichung $b^{\sigma_\tau} + a = c^{\sigma_\tau} - a^{\sigma_\varrho^{-1}\sigma_\tau} + a$ schrittweise auf die Gestalt $b^{\sigma_\tau} = c^{\sigma_\tau} - a^{\sigma_\varrho^{-1}\sigma_\tau}$, $b^{\sigma_\tau} + a^{\sigma_\varrho^{-1}\sigma_\tau} = c^{\sigma_\tau}$, $b + a^{\sigma_\varrho^{-1}} = c$. Nach Einsetzen in die Gleichung $b^{\sigma_\varrho} + a = c^{\sigma_\varrho} - b^{\sigma_\varrho} + b^{\sigma_\tau}$ bekommen wir $b^{\sigma_\tau} + a = b^{\sigma_\varrho} + a - b^{\sigma_\varrho} + b^{\sigma_\tau}$. Umgekehrt folgt hieraus mit $c := b + a^{\sigma_\varrho^{-1}}$ die ursprüngliche Gleichung $b^{\sigma_\tau} + a = c^{\sigma_\varrho} - b^{\sigma_\varrho} + b^{\sigma_\tau}$. Mit Rücksicht auf den Lehrsatz 5 ist die weitere Beweisführung klar. ∎

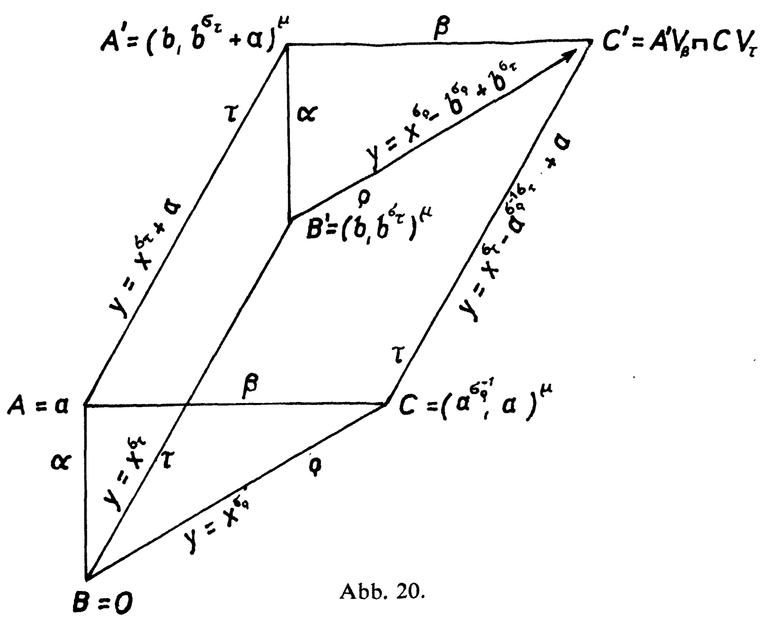

Abb. 20.

Folgerung. a) *Ist in den Voraussetzungen des Lehrsatzes* 14 *die Operation* $+$ *kommutativ, dann gilt* $b^{\sigma_\tau} + a = b^{\sigma_\varrho} + a - b^{\sigma_\varrho} + b^{\sigma_\tau}$ $\forall a, b \in M$. b) *Es gelten die Voraussetzungen des Lehrsatzes* 14 *und darüber hinaus noch die Desargues-Bedingung des Typs* $(\alpha, \beta, \bar{\delta}, \gamma)$ *in* **G** *für ein* $\bar{\delta} \in I \setminus \{\alpha, \beta, \gamma\}$. *Dann gilt in* **G** *auch die Desargues-Bedingung des Typs* (δ) *für jedes* $\delta \in I \setminus \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Beweis. Für a) klar, für b) folgt aus der Bemerkung nach dem Satz 4, aus dem Lehrsatz 14 und aus der Folgerung des Satzes 1. ∎

In den Schlußbetrachtungen führen wir noch einige Ergänzungen durch, in denen die sog. Diagonalbedingung auftritt (Abb. 21): Es sei **G** ein Gewebe des Grades $\geqq 4$ und es seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Indexe, so daß α, β, γ voneinander verschieden sind und $\delta \in I \setminus \{\alpha, \beta\}$. Unter der *Diagonalbedingung* in **G** verstehen wir dann die Implikation der Gestalt $(\forall A, B, C, P \in \mathscr{P} \setminus v)$ $(\overline{A, B, V_\beta} \,\&\, \overline{C, D, V_\beta} \,\&\, \overline{A, D, V_\alpha} \,\&\, \overline{B, C, V_\alpha} \,\&\, \overline{A, C, V_\gamma} \Rightarrow \overline{B, D, V_\delta})$.

Lehrsatz 15. *Es sei* **G** *ein Gewebe des Grades* $\geqq 4$ *und* $(O, \alpha, \beta, \gamma)$ *eines seiner Bezugssysteme. Weiter gelte für die Koordinatenalgebra bezüglich* $(O, \alpha, \beta, \gamma)$, *daß* $+ := +_\gamma$ *eine Gruppenoperation ist, welche mit sämtlichen* $+_\iota$, $\iota \in I \setminus \{\alpha, \beta\}$, *zusammenfällt. Dann gibt es ein* $\delta \in I \setminus \{\alpha, \beta\}$ *mit* $x^{\sigma\delta} + x = O$ $\forall x \in M := := OV_\alpha \setminus \{V_\alpha\}$ *genau dann, wenn in* **G** *die Diagonalbedingung des Typs* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *mit der Begrenzung* $A = O$ *gilt.*

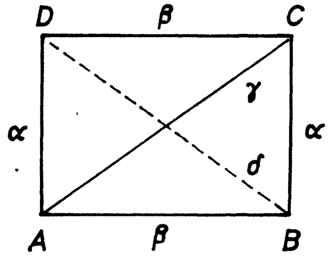

Abb. 21.

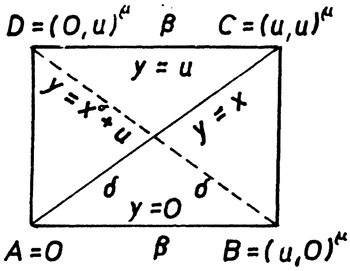

Abb. 22.

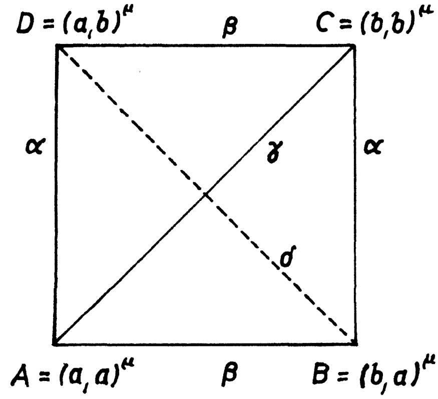

Abb. 23.

Beweis (Abb. 22). Für jedes $u \in M$ setzen wir

$$A := O\,, \quad B := (u, O)^\mu\,, \quad C := (u, u)^\mu\,, \quad D := (O, u)^\mu\,.$$

Diese Punkte erfüllen die Voraussetzungen der Diagonalbedingung des Typs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ in **G** mit Einschränkung $A = O$ und ihr Schluß $\overline{B, D, V_\delta}$ gilt genau dann, wenn $O = u^{\sigma\delta} + u$ gilt. Daraus folgt schon der Rest des Beweises. ■

Lehrsatz 16. *Es sei* **G** *ein Gewebe, welches dieselbe Voraussetzungen erfüllt wie im Lehrsatz 15. Dann gibt es ein* $\delta \in I \setminus \{\alpha, \beta\}$ *mit* $x^{\sigma\delta} + x = O$ $\forall x \in M := OV_\alpha \setminus \setminus \{V_\alpha\}$ *und* $+$ *ist kommutativ genau dann, wenn in* **G** *die Diagonalbedingung des Typs* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ *mit der Begrenzung* $A \in OV_\gamma$ *erfüllt ist.*

Beweis (Abb. 23). Untersuchen wir beliebige Elemente $a, b \in M$. Die Punkte $A := (a, a)^\mu$, $B := (b, a)^\mu$, $C := (b, b)^\mu$, $D := (a, b)^\mu$ erfüllen die Voraussetzungen der Diagonalbedingung des Typs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ in $\mathbf{G}$ mit der Begrenzung $A \in OV_\gamma$. Ihr Schluß $\overline{B, D, V_\delta}$ gilt genau dann, wenn $b = a^{\sigma\delta} + u$, $a = b^{\sigma\delta} + u$ für ein $u \in M$ gilt. Für $a = O$ bekommt man $b^{\sigma\delta} + b = O$ und beide Gleichungen lauten dann $a + b = u = b + a$, woraus schon der Rest des Beweises folgt. ■

Folgerung. *Es sei $\mathbf{G}$ ein Gewebe des Grades $\geqq 4$, $(O, \alpha, \beta, \gamma)$ eines seiner Bezugssysteme und $\delta \in I \setminus \{\alpha, \beta\}$. Weiter gelte in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs (α) und (β). Dann gilt in $\mathbf{G}$ die Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ mit der Einschränkung $A \in OV_\gamma$ genau dann, wenn in $\mathbf{G}$ die Diagonalbedingung des Typs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ mit der Einschränkung $A = O$ zusammen mit der Desargues-Bedingung des Typs $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, OV_\gamma)$ gilt.*

Beweis. Folgt aus den Lehrsätzen 16, 15 und Satz 4. ■

Literaturverzeichnis

[1] *В. Д. Белоусов:* Алгебраические сети и квазигруппы, Кишинев 1971.

[2] *В. Д. Белоусов:* Одно условие замыкания в κ-сетях, Мат. иссл. (Кишинев) *6* (1971), вып. 3 (21), 33—44.

[3] *В. Д. Белоусов—Г. Б. Белявская:* Взаимосвязь некоторых условий замыкания в κ-сетях, Изв. Ак. наук Молд. ССР, № 2, 1974, 41—51.

[4] *V. Havel:* Homomorphisms of nets of fixed degree with singular points on the same line, Czech. Math. Journ. *26 (101)*, 1976, 43—54.

[5] *V. Havel:* 3-Gewebe und Loops, 60 S., Abteilung für Geometrie des Mathematischen Instituts der Karlsuniversität, Praha 1975 (tschechisch; litographiert).

[6] *V. Havel:* Generalization of one Baer's theorem for nets, Čas. pěst. mat. *101* (1976), 375—378.

[7] *G. Pickert:* Projektive Ebenen, Berlin—Heidelberg—New York 1975.

[8] *K. Reidemeister:* Grundlagen der Geometrie, Berlin—Heidelberg—New York 1965.

Anschrift des Verfassers: 602 00 Brno, Hilleho 6 (VUT).