Časopis pro pěstování matematiky

Josef Král

K jedné matematické úloze o vlasech

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 101 (1976), No. 3, 305--307

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117910`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

RŮZNÉ

K JEDNÉ MATEMATICKÉ ÚLOZE O VLASECH

JOSEF KRÁL, Praha

(Došlo dne 29. října 1975)

Nechť μ značí Lebesgueovu míru v euklidovské rovině R^2. Dokážeme následující

Tvrzení. *Ke každé otevřené množině $G \subset R^2$ existuje množina $H \subset G$ plné míry* (tj. $\mu(G \setminus H) = 0$) *a zobrazení přiřazující každému $x \in H$ oblouk*)* $A(x) \subset G$ *s koncovým bodem x tak, že*

(1) $$x \neq y \Rightarrow A(x) \cap A(y) = \emptyset .$$

Poznámka. Z tohoto tvrzení plyne kladná odpověď na otázku a) problému 3, který předložil L. ZAJÍČEK v [1], str. 13–14 (srv. též [2], str. 16 a [3], str. 17–18).

Nejprve dokážeme

Lemma. *Buď $Q \subset R^2$ uzavřený čtverec. Pak ke každému $\lambda \in (0, 1)$ existují kompaktní množiny $H \subset K \subset Q$ a zobrazení přiřazující každému $x \in H$ oblouk $A(x) \subset K$ s koncovým bodem x tak, že platí* (1) *a*

(2) $$\mu(H) > \lambda\, \mu(Q)\,, \quad \mu(K \setminus H) = 0\,.$$

Důkaz. Můžeme předpokládat, že

$$Q = \{[\xi_1, \xi_2] \in R^2;\ |\xi_1 - \tfrac{1}{2}| + |\xi_2| \leqq \tfrac{1}{2}\}\,.$$

Z Osgoodovy konstrukce [5] plyne existence oblouku $A \subset Q$ s koncovými body $[0, 0]$, $[1, 0]$ takového, že

$$A^0 \subset \{[\xi_1, \xi_2] \in Q;\ |\xi_1 - \tfrac{1}{2}| + |\xi_2| < \tfrac{1}{2}\},\ \mu(A) > \lambda\, \mu(Q)\,.$$

Nechť $S \subset A^0$ je spočetná množina hustá v A a uspořádejme její prvky do prosté posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Položme $\delta = \mu(A) - \lambda\, \mu(Q)$, $A_1 = A$ a předpokládejme, že

*) Množina $A \subset R^2$ se nazývá obloukem, existuje-li homeomorfní zobrazení f intervalu $\langle 0, 1\rangle$ na A. Množina $\{f(0), f(1)\}$ tvořená tzv. koncovými body pak nezávisí na volbě homeomorfismu f; píšeme $A^0 = A \setminus \{f(0), f(1)\}$.

pro dané $n \geqq 1$ už byla sestrojena množina $A_n \subset A$ tak, že $\mu(A \setminus A_n) < \sum_{j=1}^{n} 2^{-j}\delta$ a A_n je sjednocením disjunktních oblouků $K_1, \ldots, K_{2^{n-1}}$. Zvolme v $K_j^0 \cap S$ bod x_{n_j} s nejmenším indexem n_j a sestrojme oblouky $C_j \subset K_j^0$ tak, aby $x_{n_j} \in C_j^0$ a $\sum_{j=1}^{2^{n-1}} \mu(C_j) < 2^{-n-1}\delta$. Pak množina $A_{n+1} = \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} (K_j \setminus C_0^j)$ je disjunktním sjednocením 2^n oblouků a $\mu(A \setminus A_{n+1}) < \sum_{j=1}^{n+1} 2^{-j}\delta$. Sestrojujeme-li takto postupně množiny A_n $(n = 1, 2, \ldots)$, pak množina $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ je řídká v A a $\mu(H) > \lambda\,\mu(Q)$. Popsaná konstrukce zaručuje existenci homeomorfního zobrazení f úsečky $I = \langle 0, 1\rangle \times \{0\}$ na A takového, že pro Cantorovo diskontinuum $C \subset \langle 0, 1\rangle$ platí $f(C \times \{0\}) = H$, $f(0, 0) = [0, 0]$, $f(1, 0) = [1, 0]$. Z tvrzení 3,6 v [4] plyne úvahou popsanou tamtéž v oddílu II, že f lze rozšířit na homeomorfní zobrazení množiny Q na sebe tak, aby platilo

$$(M \subset Q \setminus I,\ \mu(M) = 0) \Rightarrow \mu(f(M)) = 0\,. \tag{3}$$

Je-li bod $x \in H$ obrazem (v homeomorfismu f) bodu $[\xi_1, 0]$ $(\xi_1 \in C)$, přiřadíme mu oblouk $A(x)$, jenž je obrazem úsečky

$$\{[\xi_1, \xi_2];\ 0 \leqq \xi_2 \leqq \tfrac{1}{2} - |\xi_1 - \tfrac{1}{2}|\} \quad \text{v případě} \quad |\xi_1 - \tfrac{1}{2}| < \tfrac{1}{2}\,,$$

úsečky $\{[t, -t];\ 0 \leqq t \leqq \frac{1}{4}\}$ v případě $\xi_1 = 0$ a úsečky $\{[t, t-1];\ \frac{1}{2} \leqq t \leqq 1\}$ v případě $\xi_1 = 1$. Protože množina $\{[\xi_1, \xi_2] \in Q;\ \xi_1 \in C\}$ je μ-nulová, platí pro $K = \bigcup_{x \in H} A(x)$ podle (3) vztah $\mu(K \setminus H) = 0$ a lemma je dokázáno.

Nyní můžeme podat

Důkaz tvrzení. Zřejmě stačí uvažovat omezenou otevřenou množinu $G \neq \emptyset$. Zvolme pevně $\varepsilon \in (0, 1)$. Položme $G_0 = G$ a předpokládejme, že pro dané $n \geqq 1$ už byla sestrojena otevřená množina $G_{n-1} \neq \emptyset$. Pak existuje množina $Q_n \subset G_{n-1}$, jež je sjednocením konečně mnoha disjunktních uzavřených čtverců, pro niž $\mu(G_{n-1} \setminus Q_n) < \varepsilon\,\mu(G_{n-1})$. Pomocí dokázaného lemmatu sestrojíme kompakty $H_n \subset K_n \subset Q_n$ a zobrazení přiřazující každému $x \in H_n$ oblouk $A(x) \subset K_n$ s koncovým bodem x tak, že platí (1) a

$$\mu(G_{n-1} \setminus H_n) < \varepsilon\,\mu(G_{n-1})\,, \quad \mu(K_n \setminus H_n) = 0\,.$$

Konečně položíme $G_n = G_{n-1} \setminus K_n$. Tak získáme postupně množiny G_n, H_n, K_n $(n = 1, 2, \ldots)$ a zobrazení $x \mapsto A(x)$ definované na $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$, jehož hodnotami jsou oblouky obsažené v $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Zřejmě $\mu(K \setminus H) = 0$. Protože pro $m < n$ je $K_n \subset G \setminus K_m$, je na H splněna podmínka (1). Jelikož pro každé n platí $G \setminus H \subset G_n \cup (K \setminus H)$ a $\mu(G_n) \leqq \varepsilon^n\,\mu(G)$, je H množina plné míry v G.

Závěrečná poznámka. Výše konstruovaná množina $H \subset G$ je sice plné míry v G, ale první kategorie. Nesplňuje tedy požadavky úloh b), c) z [1], str. 14 (viz též [3], str. 17–18).

Chceme-li, aby vlasy $A(x)$ splňující podmínku (1) vyrůstaly z reziduální množiny, je třeba užít jiného postupu. Lze však dokonce docílit toho, že vlasy vyrůstají z reziduální množiny plné míry.

K této složitější otázce se vrátíme na jiném místě.

Literatura

[1] Informace matematické vědecké sekce JČMF č. 3, listopad 1974.

[2] Informace mat. věd. sekce JČMF č. 5, březen 1975.

[3] Informace mat. věd. sekce JČMF, prázdninové dvojčíslo 6/7, 1975.

[4] *J. Král:* Note on strong generalized jacobians, Čechosl. mat. žur. *9* (1959), 429–439.

[5] *W. F. Osgood:* A Jordan curve of positive area, Trans. Amer. Math. Soc. *4* (1903), 107–112

Adresa autora: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).