Časopis pro pěstování matematiky

Pavla Bajáková

Polokanonický reper sítě na ploše v trojrozměrném afinním prostoru

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 101 (1976), No. 2, 176--187

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117904

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

POLOKANONICKÝ REPER SÍTĚ NA PLOŠE V TROJROZMĚRNÉM AFINNÍM PROSTORU

PAVLA BAJÁKOVÁ, Brno

(Došlo dne 30. června 1975)

1. ÚVOD

V tomto článku je užitím Cartanových metod konstruován polokanonický reper sítě na ploše v trojrozměrném afinním prostoru A^3. Tento reper závisí na parametrech plochy, tj. na hlavních parametrech, ale také na význačných parametrech sítě. Odtud název – polokanonický. V článku [1] je uvedena konstrukce kanonického reperu sítě na ploše, kde reper závisí pouze na hlavních parametrech. Obě konstrukce jsou odlišné, vychází se však ze stejných předpokladů. Tak jako v [1] uvažujme v prostoru A^3 obecný pohyblivý reper R s vrcholem M a třemi lineárně nezávislými vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Dále mějme libovolnou nerozvinutelnou plochu $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}(u, v)$ s obecnou sítí $S = \{S_1, S_2\}$. Nechť vrchol M reperu je ztotožněn s bodem plochy P a vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ reperu ať leží v tečné rovině plochy v tomto bodě. Takto specialisovaný reper závisí na dvou hlavních parametrech u, v a sedmi parametrech vedlejších. Označme jej R_7.

V článku [1] byl reper R_7 již další specialisací připojen k síti. Přímky $(M, \mathbf{e}_1)$, $(M, \mathbf{e}_2)$ se staly tečnami dvou křivek náležejících vrstvám S_1 a S_2 sítě S, procházejících bodem M. Toto připojení se děje volbou dvou vedlejších parametrů, tzv. význačných parametrů sítě, odpovídajících formám e_1^2, e_2^1. Při konstrukci polokanonického reperu musí zůstat význačné parametry volné, aby stále byla zachována možnost připojení reperu k libovolné síti S. Tedy volbu vedlejších parametrů provedeme tak, aby z nich v průběhu konstrukce nevyplynuly žádné závislosti mezi formami e_1^2, e_2^1. Pfaffovy formy ω_1^2, ω_2^1 se stanou hlavními až v závěru celé konstrukce.

Než přikročíme ke specialisaci reperu R_7, vedoucí k polokanonickému reperu, uvedeme rovnice, které pro reper R_7 platí. Jsou to

$$(1) \qquad \mathrm{d}\boldsymbol{M} = \omega^i \mathbf{e}_i\,, \quad \mathrm{d}\mathbf{e}_i = \omega_i^k \mathbf{e}_k\,; \quad i, k = 1, 2, 3\,,$$

pak rovnice struktury

$$d\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i\,, \quad d\omega_i^k = \omega_i^j \wedge \omega_j^k\,; \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

a

$$\omega^3 = 0\,,$$

$$(2) \qquad \omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2\,, \quad \omega_2^3 = b\omega^1 + c\omega^2\,,$$

z nichž prodloužením obdržíme

$$(3) \qquad \begin{aligned} da - a(2\omega_1^1 - \omega_3^3) - 2b\omega_1^2 \qquad\qquad &= m\omega^1 + n\omega^2\,, \\ db - b(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3) - a\omega_2^1 - c\omega_1^2 &= n\omega^1 + p\omega^2\,, \\ dc - c(2\omega_2^2 - \omega_3^3) - 2b\omega_2^1 \qquad\qquad &= p\omega^1 + q\omega^2\,. \end{aligned}$$

Podle předpokladu je uvažovaná plocha **P** nerozvinutelná, tj.

$$(4) \qquad b^2 - ac \neq 0\,,$$

což plyne z diferenciální rovnice asymptotických křivek na ploše **P**

$$(5) \qquad a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + c(\omega^2)^2 = 0\,.$$

2. KONSTRUKCE POLOKANONICKÉHO REPERU SÍTĚ NA PLOŠE

Z rovnic (3) obdržíme

$$(6) \qquad d(b^2 - ac) - 2(b^2 - ac)(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3) = 2F\omega^1 + 2G\omega^2\,,$$

kde

$$(7) \qquad F = \tfrac{1}{2}(2bn - ap - cm)\,, \quad G = \tfrac{1}{2}(2bp - aq - cn)\,.$$

Z (6) plyne

$$(8) \qquad \delta(b^2 - ac) = 2(b^2 - ac)(e_1^1 + e_2^2 - e_3^3)\,.$$

Vzhledem k uvažovanému předpokladu (4) lze bez újmy na obecnosti zvolit

$$(9) \qquad b^2 - ac = 1\,.$$

Dosazením do (6) dostaneme

$$(10) \qquad -(\omega_1^1 + \omega_2^2 - \omega_3^3) = F\omega^1 + G\omega^2\,.$$

Prodloužením poslední rovnice získáme

$$(11) \qquad \begin{aligned} dF - F\omega_1^1 - G\omega_1^2 - 2a\omega_3^1 - 2b\omega_3^2 &= -2h\omega^1 - 2k\omega^2\,, \\ dG - F\omega_2^1 - G\omega_2^2 - 2b\omega_3^1 - 2c\omega_3^2 &= -2k\omega^1 - 2l\omega^2\,. \end{aligned}$$

Odtud

$$(12) \qquad \delta F = Fe_1^1 + Ge_1^2 + 2ae_3^1 + 2be_3^2 ,$$

$$\delta G = Fe_2^1 + Ge_2^2 + 2be_3^1 + 2ce_3^2 .$$

Pro další specialisaci použijeme afinní normálu plochy. Určíme ji jako geometrické místo středů svazku Darbouxových kvadrik [4]. K určení rovnice svazku potřebujeme lokální rozvoj plochy $\boldsymbol{P}$ až do členů třetího řádu. Tento rozvoj v souřadnicích x, y, z je tvaru

$$(13) \qquad z = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 x^2 + 2\alpha_2 xy + \alpha_3 y^2) +$$

$$+ \tfrac{1}{6}(\beta_1 x^3 + 3\beta_2 x^2 y + 3\beta_3 xy^2 + \beta_4 y^3) + \dots .$$

Zvolíme nyní na ploše libovolný bod

$$(14) \qquad \boldsymbol{P}(x, y, z) = \boldsymbol{M} + x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 .$$

Určíme nejdříve podmínku pro to, aby tento bod byl pevný, tedy aby $\mathrm{d}\boldsymbol{P} = 0$. Zdiferencujeme (14), dosadíme (1) a srovnáme koeficienty u lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Dostaneme

$$(15) \qquad \mathrm{d}x + \omega^1 + x\omega_1^1 + y\omega_2^1 + z\omega_3^1 = 0 ,$$

$$\mathrm{d}y + \omega^2 + x\omega_1^2 + y\omega_2^2 + z\omega_3^2 = 0 ,$$

$$\mathrm{d}z + \omega^3 + x\omega_1^3 + y\omega_2^3 + z\omega_3^3 = 0 .$$

Diferencováním rovnice (13) obdržíme

$$\mathrm{d}z = (\alpha_1 x + \alpha_2 y)\,\mathrm{d}x + (\alpha_2 x + \alpha_3 y)\,\mathrm{d}y + \tfrac{1}{2}(\mathrm{d}\alpha_1 x^2 + 2\mathrm{d}\alpha_2 xy + \mathrm{d}\alpha_3 y^2) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}(\beta_1 x^2 + 2\beta_2 xy + \beta_3 y^2)\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}(\beta_2 x^2 + 2\beta_3 xy + \beta_4 y^2)\,\mathrm{d}y + \dots .$$

Do této rovnice dosadíme z (13) a (15). Srovnáme-li členy při jednotlivých mocninách x a y, dostaneme

$$(16) \qquad \omega_1^3 = \alpha_1 \omega^1 + \alpha_2 \omega^2 , \quad \omega_2^3 = \alpha_2 \omega^1 + \alpha_3 \omega^2 ,$$

$$(17) \qquad \tfrac{1}{2}\alpha_1 \omega_3^3 = \alpha_1 \omega_1^1 + \alpha_2 \omega_1^2 - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}\alpha_1 + \tfrac{1}{2}\beta_1 \omega^1 + \tfrac{1}{2}\beta_2 \omega^2 ,$$

$$\alpha_2 \omega_3^3 = \alpha_1 \omega_2^1 + \alpha_2 \omega_1^1 + \alpha_2 \omega_2^2 + \alpha_3 \omega_1^2 - \mathrm{d}\alpha_2 + \beta_2 \omega^1 + \beta_3 \omega^2 ,$$

$$\tfrac{1}{2}\alpha_3 \omega_3^3 = \alpha_2 \omega_2^1 + \alpha_3 \omega_2^2 - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{d}\alpha_3 + \tfrac{1}{2}\beta_3 \omega^1 + \tfrac{1}{2}\beta_4 \omega^2 .$$

Porovnáním (16) s (2) vyjde

$$\alpha_1 = a , \quad \alpha_2 = b , \quad \alpha_3 = c$$

a obdobně z (17) a (3) obdržíme

$$\beta_1 = m\,, \quad \beta_2 = n\,, \quad \beta_3 = p\,, \quad \beta_4 = q\,.$$

Hledaný lokální rozvoj má tvar

$$z = \tfrac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \\ + \tfrac{1}{6}(mx^3 + 3nx^2y + 3pxy^2 + qy^3) + \dots \tag{18}$$

Pro stanovení rovnice svazku Darbouxových kvadrik odvoďme rovnici obecné oskulační kvadriky. Předpokládejme, že její rovnice má tvar

$$f(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + 2\, l(\mathbf{X}) + a_{00} = 0\,, \tag{19}$$

kde f je bilineární symetrická forma a l lineární forma. Přitom pro $\mathbf{X} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$ klademe $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = a_{ik} = a_{ki}$, $l(\mathbf{e}_i) = a_{i0}$. Požavavek, aby bod M plochy $\boldsymbol{P}$ ležel na této kvadrice, je vyjádřen rovnicí

$$f(\mathbf{M}, \mathbf{M}) + 2\, l(\mathbf{M}) + a_{00} = 0\,,$$

z níž $a_{00} = 0$. Podmínku dotyku prvního řádu obdržíme diferencováním rovnice (19):

$$f(\mathbf{X}, \mathrm{d}\mathbf{X}) + l(\mathrm{d}\mathbf{X}) = 0\,. \tag{20}$$

Tedy pro bod M platí

$$f(\mathbf{M}, \mathrm{d}\mathbf{M}) + l(\mathrm{d}\mathbf{M}) = 0\,,$$

čili

$$\omega^1 a_{10} + \omega^2 a_{20} = 0\,.$$

Odtud plyne

$$a_{10} = a_{20} = 0\,.$$

Dalším diferencováním rovnice (20) dostaneme

$$f(\mathrm{d}\mathbf{X}, \mathrm{d}\mathbf{X}) + f(\mathbf{X}, \mathrm{d}^2\mathbf{X}) + l(\mathrm{d}^2\mathbf{X}) = 0\,.$$

Dosadíme-li z derivačních vzorců reperu (1), vyjde

$$(aa_{30} + a_{11})(\omega^1)^2 + 2(ba_{30} + a_{12})\,\omega^1\omega^2 + (ca_{30} + a_{22})(\omega^2)^2 = 0\,,$$

takže

$$a_{11} = -aa_{30}\,, \quad a_{12} = -ba_{30}\,, \quad a_{22} = -ca_{30}\,.$$

Získáváme tak rovnici soustavy oskulačních kvadrik:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + a_{33}z^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz - 2z = 0\,, \tag{21}$$

kde a_{13}, a_{23}, a_{33} jsou libovolné parametry.

Rovnice (18) a (21) určují průsečnou křivku libovolné kvadriky z (21) s plochou. Její průmět do tečné roviny má v bodě M trojnásobný bod s tečnami o rovnicích

$$(22) \qquad (3aa_{13} - m)\, x^3 + 3(2ba_{13} + aa_{23} - n)\, x^2 y + \\ + 3(ca_{13} + 2ba_{23} - p)\, xy^2 + (3ca_{23} - q)\, y^3 = 0\,, \quad z = 0\,.$$

Jak známo, jsou Darbouxovy tečny apolární k dvojici asymptotických tečen. Z rovnic (5), (22) obdržíme podmínku apolarity ve tvaru

$$a(ca_{13} + 2ba_{23} - p) - 2b(2ba_{13} + aa_{23} - n) + c(3aa_{13} - m) = 0\,,$$

$$a(3ca_{23} - q) - 2b(ca_{13} + 2ba_{23} - p) + c(2ba_{13} + aa_{23} - n) = 0\,.$$

Odtud a z (4) plyne

$$a_{13} = \frac{ap - 2bn + cm}{4(ac - b^2)}\,, \quad a_{23} = \frac{aq - 2bp + cn}{4(ac - b^2)}\,.$$

Dosazením těchto hodnot do (21) obdržíme rovnici svazku Darbouxových kvadrik ve tvaru

$$(23) \qquad ax^2 + 2bxy + cy^2 + \frac{cm - 2bn + ap}{2(ac - b^2)}\, xz + \\ + \frac{cn - 2bn + aq}{2(ac - b^2)}\, yz - 2z + a_{33}z^2 = 0\,.$$

Určíme nyní afinní normálu plochy. Střed libovolné středové kvadriky svazku (23) má souřadnice

$$x = \frac{bG - cF}{2D}\,, \quad y = \frac{bF - aG}{2D}\,, \quad z = -\frac{1}{D}\,,$$

kde

$$D = \begin{vmatrix} a & b & \frac{F}{2} \\ b & c & \frac{G}{2} \\ \frac{F}{2} & \frac{G}{2} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0\,.$$

Budeme specialisovat reper R_7 tak, aby vektor $\mathbf{e}_3$ měl směr afinní normály. Z posledních rovnic plyne

$$(24) \qquad F = G = 0\,.$$

Rovnice svazku Darbouxových kvadrik přejde pak ve tvar

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + a_{33}z^2 - 2z = 0 \,. \tag{25}$$

Určíme poláru k přímce $(M, \mathbf{e}_3)$ vzhledem k svazku (25). Je to průsečnice polární roviny bodu M s polární rovinou nevlastního bodu přímky $(M, \mathbf{e}_3)$, tedy průsečnice roviny $z = 0$ s rovinou $a_{33}z = 1$. Přímka $(M, \mathbf{e}_3)$ a nevlastní přímka tečné roviny $(M, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ jsou sdružené poláry vzhledem ke svazku Darbouxových kvadrik (25). To je další geometrický výsledek volby (24).

Rovnice (10) a (24) dávají

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 = \omega_3^3 \tag{26}$$

a relace (10) mají tvar

$$a\omega_3^1 + b\omega_3^2 = h\omega^1 + k\omega^2 \,, \qquad b\omega_3^1 + c\omega_3^2 = k\omega^1 + l\omega^2 \,. \tag{27}$$

Z těchto rovnic vyjádříme ω_3^1, ω_3^2. Je tedy

$$\omega_3^1 = A_1\omega^1 + A_2\omega^2 \,, \qquad \omega_3^2 = B_1\omega^1 + B_2\omega^2 \,, \tag{28}$$

kde

$$A_1 = bk - ch \,, \quad A_2 = bl - ck \,, \quad B_1 = bh - ak \,, \quad B_2 = bk - al \,.$$

Vzhledem k (26) a (28) je tedy $e_3^1 = e_3^2 = 0$ a

$$e_3^3 = e_1^1 + e_2^2 \,. \tag{29}$$

Získali jsme tak reper R_4, který závisí na čtyřech vedlejších parametrech odpovídajících čtyřem nezávislým formám $e_1^1, e_2^2, e_1^2, e_2^1$. V něm

$$\delta \mathbf{M} = 0 \,, \quad \delta \mathbf{e}_3 = e_3^3 \mathbf{e}_3 \,, \tag{30}$$

tedy směr vektoru $\mathbf{e}_3$ afinní normály $(M, \mathbf{e}_3)$ je pevný.

Prodloužením rovnic (27) získáme vztahy

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}h - 2h\omega_1^1 - 2k\omega_1^2 = A\omega^1 + (B - mA_2 - nB_2 + nA_1 + pB_1)\,\omega^2 \,, \\ &\mathrm{d}k - k(\omega_1^1 + \omega_2^2) - h\omega_2^1 - l\omega_1^2 = B\omega^1 + C\omega^2 \,, \\ &\mathrm{d}l - 2l\omega_2^2 - 2k\omega_2^1 = (C + nA_1 + pB_2 - pA_1 - qB_1)\,\omega^1 + D\omega^2 \,. \end{aligned} \tag{31}$$

Odtud

$$\begin{aligned} &\delta h - 2he_1^1 - 2ke_1^2 = 0 \,, \\ &\delta k - k(e_1^1 + e_2^2) - he_2^1 - le_1^2 = 0 \,, \\ &\delta l - 2le_2^2 - 2ke_2^1 = 0 \,. \end{aligned} \tag{32}$$

Na základě rovnic (30) provedeme takovou specialisaci, která normalisuje vektor $\mathbf{e}_3$. Uvažujme za tím účelem kongruenci afinních normál $(M, \mathbf{e}_3)$. Bod

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{M} + \lambda \mathbf{e}_3$$

je ohniskem této přímky, když pro něj platí $[\mathrm{d}\boldsymbol{F}, \mathbf{e}_3] = 0$. Z této podmínky obdržíme rovnice

$$\omega^1 + \lambda\omega_3^1 = 0\,, \quad \omega^2 + \lambda\omega_3^2 = 0\,, \tag{33}$$

z nichž po vyloučení λ získáme rovnici rozvinutelných ploch kongruence

$$\omega^1\omega_3^2 - \omega^2\omega_3^1 = 0\,.$$

Rovnice (33) přejdou po dosazení výrazů (28) ve tvar

$$\begin{aligned}(1 + \lambda\overline{bk - ch})\,\omega^1 + (bl - ck)\,\omega^2 &= 0\,,\\ \lambda(bh - ak)\,\omega^1 + (1 + \lambda\overline{bk - al})\,\omega^2 &= 0\end{aligned} \tag{34}$$

a z nich vyloučením forem ω^1, ω^2 obdržíme pro λ rovnici

$$(k^2 - hl)\,\lambda^2 - (al - 2bk + ch)\,\lambda + 1 = 0\,. \tag{35}$$

Její kořeny λ_1, λ_2 jsou souřadnice ohnisek F_1, F_2. V důsledku rovnic (32) platí

$$\delta(al - 2bk + ch) = (al - 2bk + ch)\,(e_1^1 + e_2^2)\,, \tag{36}$$

$$\delta(k^2 - hl) = 2(k^2 - hl)\,(e_1^1 + e_2^2) \tag{37}$$

a odtud je patrno, že $(al - 2bk + ch)$ a $(k^2 - hl)$ jsou relativní invarianty. Budeme o nich předpokládat, že

$$al - 2bk + ch \neq 0\,, \quad k^2 - hl \neq 0\,. \tag{38}$$

Z rovnic (36), (37) získáme

$$\delta\,\frac{al - 2bk + ch}{k^2 - hl} = -\,\frac{al - 2bk + ch}{k^2 - hl}\,(e_1^1 + e_2^2)\,. \tag{39}$$

Je tedy $(al - 2bk + ch)/(k^2 - hl)$ rovněž relativní invariant. Tyto tři relativní invarianty nás vedou ke třem různým specialisacím reperu R_4. Spočívají v tom, že koncovým bodem vektoru $\mathbf{e}_3$ budeme volit tři různé body. Závěrem pak získáme tři různé polokanonické repery obecné sítě S.

V prvním případě bude normalisace vektoru $\mathbf{e}_3$ provedena tak, že koncový bod vektoru $\mathbf{e}_3$ zvolíme ve středu Lieovy kvadriky. Střed L je určen dvojpoměrem

$$(F_1F_2ML) = -1\,, \tag{40}$$

přičemž

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M} + \lambda_1 \mathbf{e}_3\,, \quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{M} + \lambda_2 \mathbf{e}_3\,, \quad \mathbf{L} = \mathbf{M} + s\mathbf{e}_3\,.$$

Ze vztahu (40) plyne pro s rovnice

$$(41) \qquad 2\lambda_1\lambda_2 - s(\lambda_1 + \lambda_2) = 0\,,$$

která užitím rovnice (35) přejde ve tvar

$$\frac{2}{k^2 - hl} - s\,\frac{al - 2bk + ch}{k^2 - hl} = 0\,.$$

Při uvažované specialisaci je však $s = 1$ a z předcházející rovnice vyjde

$$(42) \qquad al - 2bk + ch = 2\,.$$

Ze vztahu (36) obdržíme rovnici

$$(43) \qquad e_1^1 + e_2^2 = 0\,,$$

a tedy také $e_3^3 = 0$. Z rovnic (3), (31) vyjde

$$(44) \qquad \mathrm{d}(al - 2bk + ch) = (al - 2bk + ch)(\omega_1^1 + \omega_2^2) - 2R_1\omega^1 - 2T_1\omega^2\,,$$

kde

$$(45) \qquad \begin{aligned} R_1 &= \tfrac{1}{2}(-lm - aC - anA_2 + ap\overline{A_1 - B_2} + aqB_1 + 2kn + \\ &\quad + 2bB - hp - cA)\,, \\ T_1 &= \tfrac{1}{2}(-ln - aD - cpB_1 + cn\overline{B_2 - A_1} + cmA_2 + 2kp + \\ &\quad + 2bC - hq - cB)\,. \end{aligned}$$

Z rovnice (44) užitím vztahu (42) dostaneme

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 = R_1\omega^1 + T_1\omega^2\,.$$

Takto specialisovaný reper R_4 označíme R_1.

V druhém případě budeme vektor $\mathbf{e}_3$ normalisovat tak, aby jeho koncovým bodem byl bod E mající vlastnost, že s bodem E', symetricky položeným vzhledem k bodu M, odděluje harmonicky ohniska F_1, F_2. Tedy

$$(46) \qquad (F_1F_2EE') = -1\,,$$

kde

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M} + \lambda_1\mathbf{e}_3\,, \quad \mathbf{E} = \mathbf{M} + u\mathbf{e}_3\,,$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{M} + \lambda_2\mathbf{e}_3\,, \quad \mathbf{E}' = \mathbf{M} - u\mathbf{e}_3\,.$$

Podle (46) je u určeno rovnicí

$$\lambda_1\lambda_2 - u^2 = 0\,,$$

která použitím rovnice (35) přejde ve tvar

$$u^2 = \frac{1}{k^2 - hl}\,.$$

Při uvažované volbě koncového bodu vektoru $\mathbf{e}_3$ je však $u = 1$ a odtud plyne, že

$$k^2 - hl = 1\,. \tag{47}$$

Z rovnice (37) obdržíme

$$e_1^1 + e_2^2 = 0\,.$$

Z (31) dostaneme

$$d(k^2 - hl) = 2(k^2 - hl)(\omega_1^1 + \omega_2^2) - 2R_2\omega^1 - 2T_2\omega^2\,, \tag{48}$$

kde

$$R_2 = \tfrac{1}{2}(-2kB + lA + hC + hnA_2 + hp\overline{B_1 - A_1} - hqB_1)\,, \tag{49}$$

$$T_2 = \tfrac{1}{2}(-2kC + lB + hD + lpB_1 + ln\overline{A_1 - B_1} - lmA_2)\,.$$

Z rovnice (48) po dosazení (47) obdržíme

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 = R_2\omega^1 + T_2\omega^2\,.$$

Reper R_4 specialisovaný volbou (47) přejde v reper, který označíme R_{II}.

V posledním případě budeme specialisovat reper R_4 tak, aby koncový bod vektoru $\mathbf{e}_3$ splynul se středem S úsečky F_1F_2. Pro bod S musí tedy platit

$$(F_1F_2S) = -1\,, \tag{50}$$

přičemž

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{M} + \lambda_1\mathbf{e}_3\,, \qquad \mathbf{F}_2 = \mathbf{M} + \lambda_2\mathbf{e}_3\,, \qquad \mathbf{S} = \mathbf{M} + s\mathbf{e}_3\,.$$

Z (50) dostáváme pro s rovnici

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2s\,.$$

Vyjádřením $\lambda_1 + \lambda_2$ z (35) přejde poslední rovnice ve tvar

$$2s = \frac{al - 2bk + ch}{k^2 - hl}\,.$$

Odtud vychází

$$\frac{al - 2bk + ch}{k^2 - hl} = 2, \tag{51}$$

protože při uvažované specialisaci reperu je $s = 1$. Rovnice (39) nyní dává

$$e_1^1 + e_2^2 = 0$$

a užitím vztahů (44), (48) obdržíme

$$d\frac{al - 2bk + ch}{k^2 - hl} = -\frac{al - 2bk + ch}{k^2 - hl}(\omega_1^1 + \omega_2^2) + 2R_3\omega^1 + 2T_3\omega^2, \tag{52}$$

kde

$$R_3 = \frac{1}{2(k^2 - hl)}[lm - hp - 2kn - 2B(b + 2k) + A(c + 2l) + \\ + (a + 2h)(C + nA_2 + pB_2 - pA_1 - qB_1)], \tag{53}$$

$$T_3 = \frac{1}{2(k^2 - hl)}[ln + hq - 2kp - 2C(b + 2k) + D(a + 2h) + \\ + (c + 2l)(B - mA_2 - nB_2 + nA_1 + pB_1)].$$

V důsledku volby (51) z rovnice (52) vyjde

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 = R_3\omega^1 + T_3\omega^2.$$

Uvedenou specialisací jsme získali reper R_{III}.

Předcházející rovnice, které jsme obdrželi v důsledku tří různých normalisací vektoru $\mathbf{e}_3$, lze zapsat jedinou rovnicí

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 = R_i\omega^1 + T_i\omega^2, \quad i = 1, 2, 3, \tag{54}$$

v níž R_i, T_i jsou pro jednotlivé hodnoty i vyjádřeny v (45), (49) a (53). Ve všech třech případech dostáváme pro e_1^1, e_2^2 vztah

$$e_1^1 + e_2^2 = 0. \tag{55}$$

Volme dále vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ v tečné rovině tak, aby $(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$ a $(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$ byly tečnými vektory vrstev asociované konjugované sítě. Asociovaná konjugovaná síť přiřazená k parametrické síti má tu vlastnost, že její tečny v každém bodě harmonicky oddělují parametrické a asymptotické tečny [2]. Snadným výpočtem zjistíme, že rovnice asociované konjugované sítě k parametrické síti s rovnicí $\omega^1\omega^2 = 0$ [1] má tvar

$$a(\omega^1)^2 - c(\omega^2)^2 = 0.$$

Rovnice vyjde za předpokladu, že síť není konjugovaná. Tento předpoklad je vyjádřen podle (5) vztahem $b \neq 0$. Tečné vektory křivek asociované konjugované sítě jsou $(\sqrt{(c)}\, e_1 + \sqrt{(a)}\, e_2)$, $(\sqrt{(c)}\, e_1 - \sqrt{(a)}\, e_2)$. Uvažovaná specialisace reperů R_{I}, R_{II}, R_{III} tedy vyjde, položíme-li $a = c$. Pak z rovnic (3) obdržíme

$$(56) \qquad a(\omega_1^1 - \omega_2^2) = b(\omega_2^1 - \omega_1^2) + \frac{p - m}{2}\,\omega^1 + \frac{q - n}{2}\,\omega^2$$

a při změně vedlejších parametrů platí

$$(57) \qquad a(e_1^1 - e_2^2) = b(e_2^1 - e_1^2)\,.$$

Z (55) a (57) vyjdou e_1^1, e_2^2 v závislosti na e_1^2, e_2^1.

Nyní již připojíme reper k síti S. Zvolíme tedy

$$\omega_1^2 = t\omega^1 + v\omega^2\,, \quad \omega_2^1 = f\omega^1 + g\omega^2\,,$$

takže $e_1^2 = 0$, $e_2^1 = 0$. Pak také $e_1^1 = e_2^2 = e_3^3 = 0$ a formy ω_1^1, ω_2^2, ω_3^3 jsou hlavní. Vypočteme je z rovnic (54), (56) a (26).

$$(58) \quad \omega_1^1 = \frac{1}{2}\left[R_i + \frac{p - m}{2a} + \frac{b}{a}(f - t)\right]\omega^1 + \frac{1}{2}\left[T_i + \frac{q - n}{2a} + \frac{b}{a}\,(g - v)\right]\omega^2\,,$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left[R_i - \frac{p - m}{2a} - \frac{b}{a}(f - t)\right]\omega^1 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[T_i - \frac{q - n}{2a} - \frac{b}{a}(g - v)\right]\omega^2\,, \quad i = 1, 2, 3\,.$$

Všimneme-li si geometrického významu vektorů $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, vidíme, že v tomto reperu vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ jsou ve směru tečen libovolné sítě, protože pro význačné parametry odpovídající formám e_1^2, e_2^1 nevyplynuly během specialisace reperu žádné závislosti.

Získaný reper je polokanonický reper obecné sítě na ploše. Je dán soustavou diferenciálních rovnic

$$\mathrm{d}\boldsymbol{M} = \omega^1\mathbf{e}_1 + \omega^2\mathbf{e}_2\,,$$

$$\mathrm{d}\mathbf{e}_1 = \omega_1^1\mathbf{e}_1 + (t\omega^1 + v\omega^2)\,\mathbf{e}_2 + (a\omega^1 + b\omega^2)\,\mathbf{e}_3\,,$$

$$\mathrm{d}\mathbf{e}_2 = (f\omega^1 + g\omega^2)\,\mathbf{e}_1 + \omega_2^2\mathbf{e}_2 + (b\omega^1 + c\omega^2)\,\mathbf{e}_3\,,$$

$$\mathrm{d}\mathbf{e}_3 = \omega_3^1\mathbf{e}_1 + \omega_3^2\mathbf{e}_2 + (\omega_1^1 + \omega_2^2)\,\mathbf{e}_3\,,$$

kde ω_1^1, ω_2^2, ω_3^3 jsou určeny rovnicemi (58), (26) a ω_3^1, ω_3^2 rovnicemi (28).

Literatura

[1] *Bajáková P.:* Reper sítě na ploše v trojrozměrném afinním prostoru. Čas. pro pěst. mat. 1975, svazek *100*, 384—390.

[2] *Kolář I.:* Užití Cartanových metod ke studiu obecné sítě křivek na ploše v trojrozměrném projektivním prostoru. Rozpravy Čes. ak. věd 1967, ročník *77*, sešit 5, Praha.

[3] *Marková L.:* Reper sítě na ploše. Čas. pro pěst. mat. 1973, svazek *98*, 369—374.

[4] *Щербаков Р. Н.:* Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Томск 1960.

Adresa autorky: 602 00 Brno, Hilleho 6 (Vysoké učení technické).

Zusammenfassung

DAS HALBKANONISCHE BEWEGLICHE BEZUGSSYSTEM DES NETZES AUF EINER FLÄCHE IM DREIDIMENSIONALEN AFFINEN RAUM

PAVLA BAJÁKOVÁ, Brno

In diesem Artikel wird mittels der Cartanschen Methoden das halbkanonische bewegliche Bezugssystem des allgemeinen Netzes von Kurven auf einer Fläche im dreidimensionalen affinen Raum konstruiert. Bei der angegebenen Konstruktion ist das bewegliche Bezugssystem dem Netz erst in der letzten Etappe der Spezialisierung zugeordnet. Die Spezialisierungen des beweglichen Bezugssystems sind geometrisch charakterisiert.