Časopis pro pěstování matematiky

Zdeněk Jankovský
$\mathcal{M}$-Bewegungen mit den (U)-Automorphismen

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 101 (1976), No. 2, 140--152

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117901`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 101 (1976), Praha

$\mathcal{M}$-BEWEGUNGEN MIT DEN (U)-AUTOMORPHISMEN

ZDENĚK JANKOVSKÝ, Praha

(Eingegangen am 22. Januar 1975)

EINLEITUNG

Im vorliegenden Artikel wird die Möbiussche ebene Geometrie ($\mathcal{M}$-Geometrie) als Geometrie im Kleinschen Sinn angesichts der 6-parametrigen Gruppe der direkten linearen gebrochenen Transformationen der Gaussschen Ebene ($\mathcal{M}$-Gruppe) aufgefaßt. Diese Geometrie ist auf die spezielle komplexe Mannigfaltigkeit Dim 2 ($\mathcal{M}$-Ebene) zu übertragen. Die $\mathcal{M}$-Geometrie hat manche bedeutende Eigenschaften (sie ist z. B. konform), s. [1], [3]. Auf der $\mathcal{M}$-Gruppe sind die kinematische Geometrie ($\mathcal{M}$-kinematische Geometrie) und die Kinematik ($\mathcal{M}$-Kinematik) analogisch zur klassischen kongruenten, bzw. afinnen, bzw. projektiven kinematischen Geometrie und Kinematik, die auf der kongruenten, bzw. afinnen, bzw. projektiven Gruppe aufgebaut werden, aufzubauen. Dieser Artikel beschäftigt sich mit den Eigenschaften der Bewegungen dieser $\mathcal{M}$-Kinematik ($\mathcal{M}$-Bewegungen) vom Standpunkt der Reproduktion der geometrischen Figur (U) der $\mathcal{M}$-Ebene ((U)-Automorphismen der $\mathcal{M}$-Bewegungen). Vom Standpunkt der $\mathcal{M}$-Differentialgeometrie handelt es sich um die Eigenschaften der $\mathcal{M}$-Bewegungen des Ranges 0.

1. GRUNDBEGRIFFE

Es sei R der Körper der reellen Zahlen und K der Körper der komplexen Zahlen; bezeichnen wir $\bar{K} = K \cup \{\infty\}$ die erweiterte Gausssche komplexe Ebene, der die Struktur einer komplexen Mannigfaltigkeit analytisch durch den Atlas

$$\{(K, w);\ (\bar{K} - \{0\}, w_1)\}$$

mit den Karten

$$w\ : K \to K\ ;\quad w = \mathrm{id}$$

$$w_1 : (\bar{K} - \{0\}) \to K\,,\quad w_1(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z} & \text{für} \quad z \neq 0\,, \quad z \in K\,, \\ 0 & \text{für} \quad z = \infty \end{cases}$$

zugeordnet wird.

Definition 1. Es sei $M \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathscr{F} : M \to \bar{K}$ eine bijektive Abbildung, dann nennen wir die Menge M mit der Struktur der komplexen Mannigfaltigkeit, die die Abbildung $\mathscr{F}$ in ihr induziert, die Möbiussche Ebene ($\mathscr{M}$-Ebene) und ihre Elemente $\mathscr{M}$-Punkte.

Es sei $\Gamma_3^1 = \{\mathscr{M} : \bar{K} \to \bar{K}|$

$$\mathscr{M}z = \begin{cases} \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}; \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1\,; \quad z, \alpha, \beta, \gamma \neq 0\,, \quad \delta \in K\,; & \text{für} \quad z \neq -\dfrac{\delta}{\gamma}\,, \\ \infty & \text{für} \quad z = -\dfrac{\delta}{\gamma}\,, \\ \dfrac{\alpha}{\gamma} & \text{für} \quad z = \infty\,, \end{cases}$$

für $\gamma = 0$ ist notwendig $\delta \neq 0$ und

$$\mathscr{M}z = \left\{\begin{matrix} \dfrac{\alpha}{\delta} z + \dfrac{\beta}{\delta} & \text{für} \quad z \in K\,, \\ \infty & \text{für} \quad z = \infty\,, \end{matrix}\right\}$$

die Gruppe der linearen gebrochenen Transformationen der erweiterten Gaussschen komplexen Ebene $\bar{K}$. Die Abbildung $\mathscr{F}^{-1}\mathscr{M}\mathscr{F}$ ist offenbar eine Punkttransformation der $\mathscr{M}$-Ebene M.

Definition 2. Die Gruppe Γ_3^1 wird die Möbiussche Gruppe ($\mathscr{M}$-Gruppe) genannt. Die Gruppe $\mathscr{F}^{-1}\Gamma_3^1\mathscr{F}$ wird die Möbiussche Gruppe der Punkttransformationen der $\mathscr{M}$-Ebene M genannt.

Bemerkung 1. Die $\mathscr{M}$-Gruppe ist linear durch die spezielle lineare Gruppe $SL(2, K)$ zu repräsentieren, denn es existiert der folgende Isomorphismus:

$$\psi : \Gamma_3^1 \to SL(2, K) : \psi(\mathscr{M}) = \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{M}| = 1\,; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in K\,.$$

Definition 3. Unter der Möbiusschen Geometrie der $\mathscr{M}$-Ebene M verstehen wir die Geometrie im Kleinschen Sinn angesichts der $\mathscr{M}$-Gruppe der Punkttransformationen der $\mathscr{M}$-Ebene M. Die geometrischen Grundobjekte in der $\mathscr{M}$-Geometrie sind die $\mathscr{M}$-Punkte und die $\mathscr{M}$-Kreise, d. h. die Menge $(\mathscr{K})$ der $\mathscr{M}$-Punkte $(z) \in M$, für welche bei der Matrixdarstellung (die Interpretation M auf der komplexen projektiven Geraden)

$$(z) \to (\mathbf{Z}) = \left(\left(\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}\right)\right) \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = z\,, \quad z_2 \neq 0\,; \quad (\infty) \to \left(\left(\begin{matrix} z_1 \\ 0 \end{matrix}\right)\right); \quad (z_1, z_2) \neq (0, 0)\,,$$

$$\mathscr{K} \equiv \mathbf{Z}^T \mathbf{K} \overline{\mathbf{Z}} = 0$$

gilt, wo

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} A & \bar{B} \\ B & C \end{pmatrix}; \quad A, B, C \in K\,; \quad (A, B, C) \neq (0, 0, 0)\,; \quad A = \bar{A}\,;$$

$$C = \bar{C}\,; \quad AC < B\bar{B}\,.$$

Das 1-parametrische System aller $\mathscr{M}$-Kreise, die mit 2 gegebenen, voneinander verschiedenen Punkten inzidieren (Grundpunkte), bzw. die mit dem gegebenen Kreis in seinem einzigen gegebenen Punkt inzidieren, bzw. die zu den Kreisen im ersten Fall orthogonal sind, heißt das hyperbolische, bzw. parabolische, bzw. elliptische Büschel der $\mathscr{M}$-Kreise.

Bemerkung 2. Vergleiche die Einführung dieser Grundbegriffe mit den ähnlich eingeführten Begriffen in [1], [2], [3], [6].

Definition 4. Das Koordinatensystem S der $\mathscr{M}$-Ebene M heißt jedes Tripel voneinander verschiedener $\mathscr{M}$-Punkte $(z_1), (z_2), (z_3) \in M$, bezeichnen wir $S = \langle (z_1), (z_2), (z_3) \rangle$, und unter den Koordinaten angesichts S verstehen wir jede bijektive Abbildung $\mathscr{F}$ von D1 (Definition 1), für welche

$$\mathscr{F}((z_1)) = 0\,; \quad \mathscr{F}((z_2)) = 1\,; \quad \mathscr{F}((z_3)) = j\,; \quad j^2 = -1$$

gilt. Ist S und $\mathscr{F}$ auf M gegeben, dann sagen wir, daß die $\mathscr{M}$-Ebene M auf S mittels $\mathscr{F}$ bezogen wird; wir bezeichnen sie $M_{\mathscr{F}}(S)$ oder kurz $M(S)$.

Operiert die $\mathscr{M}$-Gruppe $\mathscr{F}^{-1}\Gamma_3^1\mathscr{F}$ auf M, dann transformiert sich das gegebene Koordinatensystem $S = \langle (z_1), (z_2), (z_3) \rangle$ durch die beliebige $\mathscr{M}$-Transformation $\mathscr{F}^{-1}\mathscr{M}\mathscr{F} \in \mathscr{F}^{-1}\Gamma_3^1\mathscr{F}$ ins Koordinatensystem $\Sigma = \langle (\zeta_1), (\zeta_2), (\zeta_3) \rangle$. Die Koordinatentransformation ist in der Form

$$(1{,}1) \qquad \mathscr{F} = \mathscr{M} \circ {}'\mathscr{F}$$

darzustellen.

Bemerkung 3. Ist ${}'\mathscr{F} = \mathrm{id}$, dann $M \equiv K$ und (1,1) ist als $\mathscr{F} = \mathscr{M}$ zu schreiben. Wenn eine $\mathscr{M}$-Punktfigur durch eine $\mathscr{M}$-Transformation $\mathscr{F}^{-1}\mathscr{M}\mathscr{F}$ auf die andere $\mathscr{M}$-Punktfigur der $\mathscr{M}$-Ebene M abgebildet wird, dann sind diese 2 $\mathscr{M}$-Punktfiguren in der $\mathscr{M}$-Geometrie als gleichförmig zu betrachten.

Analogisch zur kongruenten Bewegung in der euklidischen Ebene, die auf der Kongruenzgruppe (gewöhnliche Bewegungsgruppe) aufgebaut wird, ist der Begriff der $\mathscr{M}$-Bewegung auf der $\mathscr{M}$-Gruppe der Punkttransformationen der $\mathscr{M}$-Ebene aufzubauen. Sind die Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Transformation $\mathscr{M}$ stetige komplexe Funktionen von einem reellwertigen Argument $t \in \mathscr{I} \subset R$ ($\mathscr{I}$ ist ein reelles Intervall), das als die physikalische Zeit zu interpretieren ist, d. h. $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in C^0(\mathscr{I})$ ($C^n(\mathscr{I})$ ist der lineare Raum aller n-mal stetig differenzierbaren komplexen Funktionen $\varphi : \mathscr{I} \to K$) und gilt $\forall t_0 \in \mathscr{I} : |\mathbf{M}(t_0)| = 1$, dann ist auszusprechen:

Definition 5. Das 1-parametrische System $\{\mathscr{M}(t)\}_{t \in \mathscr{I}}$ der Punkttransformationen $\mathscr{F}^{-1}\mathscr{M}\mathscr{F}$ der $\mathscr{M}$-Ebene $M_1(S)$ über die analytische Darstellung

$$\zeta = \frac{\alpha(t)\, z + \beta(t)}{\gamma(t)\, z + \delta(t)}, \quad |\mathbf{M}| = 1 \quad \text{auf} \quad \mathscr{I}, \tag{1,2}$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in C^0(\mathscr{I})$, wird die Möbiussche Bewegung $\mathscr{M}(S/\Sigma)$ der $\mathscr{M}$-Ebene $M_1(S)$ in $\mathscr{M}$-Ebene $M_2(\Sigma)$ auf $\mathscr{I}$ ($\mathscr{M}$-Bewegung $\mathscr{M}(S/\Sigma)$ auf $\mathscr{I}$) genannt, wobei man als Konvention $(z) \in M_1(S)$, $(\zeta) \in M_2(\Sigma)$ legt. $\mathscr{M}$-Ebene $M_1(S)$, bzw. $M_2(\Sigma)$ wird die Gangebene, bzw. Rastebene der $\mathscr{M}$-Bewegung $\mathscr{M}(S/\Sigma)$ auf $\mathscr{I}$ genannt. Fixieren wir in der gegebenen $\mathscr{M}$-Bewegung $\mathscr{M}(S/\Sigma)$ auf $\mathscr{I}$ $t_0 \in \mathscr{I}$, so bekommen wir eine $\mathscr{M}$-Transformation, die wir die Phase t_0 nennen.

Transformieren wir das Koordinatensystem in M_1, bzw. in M_2

$${}^1S \to {}^2S\,, \quad \text{bzw.} \quad {}^1\Sigma \to {}^2\Sigma$$

so, daß die Koordinatentransformation durch die konstante Matrix

$$\mathbf{C}, \text{ bzw. } \boldsymbol{\Gamma}\,; \quad |\mathbf{C}| = |\boldsymbol{\Gamma}| = 1 \tag{1,3}$$

dargestellt wird, dann geht die gegebene $\mathscr{M}$-Bewegung $\mathscr{M}_1({}^1S/{}^1\Sigma)$ auf $\mathscr{I}$ in so eine $\mathscr{M}$-Bewegung $\mathscr{M}_2({}^2S/{}^2\Sigma)$ auf $\mathscr{I}$ über, daß für ihre Matrixdarstellungen

$$\mathbf{M}_i(t) = \begin{pmatrix} \alpha_i(t) & \beta_i(t) \\ \gamma_i(t) & \delta_i(t) \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{M}_i(t)| = 1\,, \tag{1,4}$$

$t \in \mathscr{I}$, $i = 1, 2$

$$\mathbf{M}_2(t) = \boldsymbol{\Gamma}\, \mathbf{M}_1(t)\, \mathbf{C} \quad \text{auf} \quad \mathscr{I} \tag{1,5}$$

gilt. $\mathscr{M}$-Bewegungen $\mathscr{M}_i({}^iS/{}^i\Sigma)$ auf $\mathscr{I}$, deren die Matrixdarstellung (1,4) bei den gegebenen konstanten Matrixen (1,3) der Beziehung (1,5) genügen, werden äquivalente $\mathscr{M}$-Bewegungen genannt; (1,4) repräsentieren den einzigen, in den verschiedenen Koordinatensystemen dargestellten Bewegungsprozeß.

Definition 6. Die Klasse aller aneinander äquivalenten $\mathcal{M}$-Bewegungen $\mathcal{M}_i({}^iS/{}^i\Sigma)$ auf $\mathcal{I}$ wird $\mathcal{M}$-Bewegung $\mathcal{M}(t)$ auf $\mathcal{I}$ genannt.

2. (U)-AUTOMORPHISMEN DER $\mathcal{M}$-BEWEGUNG

Definition 7. Wir sagen, daß die Punktfigur $(U) \subset M(S)$ analytisch durch die Gleichung

$$f(z) = 0$$

dargestellt wird, wenn

$$f : \bar{K} \to \bar{K}\,, \quad f(z) \begin{cases} =0 & (z) \in (U)\,, \\ \neq 0 & (z) \notin (U)\,. \end{cases}$$

ist.

Bemerkung 4. Jede Punktfigur kann man analytisch durch unendlich vielen Gleichungen repräsentieren.

Definition 8. Die Gleichungen

$$f_i(z) = 0\,, \quad i = 1, 2$$

sind bezüglich (U) äquivalent, wenn jede von ihnen (U) repräsentiert. Die Funktionen f_i werden dann die äquivalenten Funktionen bezüglich (U) genannt und

$$f_1 \underset{(U)}{\widetilde{\ }} f_2$$

bezeichnet.

Definition 9. $(U) \subset M(S)$ wird die feste Punktfigur bezüglich der $\mathcal{M}$-Bewegung $\mathcal{M}(t)$ auf $\mathcal{I}$ genannt, wenn für ihre beliebige analytische Repräsentation f gilt:

$$f \circ \mathcal{M}(t) \underset{(U)}{\widetilde{\ }} f\,, \quad \text{auf} \quad \mathcal{I}\,. \tag{2,1}$$

Bemerkung 5. Gilt die stärkere Beziehung

$$f \circ \mathcal{M} = f\,, \quad \mathcal{M} \in \Gamma_3^1\,,$$

anstatt (2,1), dann ist die Funktion f die Automorphfunktion der Gruppe Γ_3^1 (siehe z. B. [4], [5]).

Definition 10. Die $\mathcal{M}$-Bewegung $\mathcal{M}(t)$ mit der festen Punktfigur (U) auf $\mathcal{I}$ heißt die $\mathcal{M}$-Bewegung mit dem (U)-Automorphismus auf $\mathcal{I}$.

Bei der Untersuchung der $\mathcal{M}$-Bewegungen mit den (U)-Automorphismen ist eine Aufgabe zu stellen:

Zur beliebigen gegebenen Punktfigur $(U) \subset M$ alle $\mathcal{M}$-Bewegungen finden, die (U) reproduzieren.

Wenn (U) analytisch durch die Funktion f repräsentiert wird, dann werden alle $\mathcal{M}$-Bewegungen $\mathcal{M}(t)$ auf $\mathcal{I}$ mit dem (U)-Automorphismus durch ihre kinematischen Parameter $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in C^0(\mathcal{I})$ bestimmt und diese kinematischen Parameter genügen der Funktionalgleichung

$$f\left(\frac{\alpha(t)\, z + \beta(t)}{\gamma(t)\, z + \delta(t)}\right) = 0 \quad \text{auf} \quad \mathcal{I} \tag{2,2}$$

genau für alle z, für welche

$$f(z) = 0 \quad \text{gilt}.$$

Angesichts der Schwierigkeit dieser Aufgabe begrenzen wir uns weiter nur auf ihre Lösung für einige spezielle Punktfiguren, besonders für die geometrischen Grundobjekte und ihre Systeme.

3. $\mathcal{M}$-BEWEGUNGEN MIT DEN (z_0)- UND $(z_1) \wedge (z_2)$-AUTOMORPHISMEN

Suchen wir die $\mathcal{M}$-Bewegungen mit dem (U)-Automorphismus auf $\mathcal{I}$ für

$$(U) \equiv (z_0), \quad (\text{ein } \mathcal{M}\text{-Punkt}).$$

Es ist S, Σ so auszuwählen, daß die Beziehung

$$\zeta_0 = \mathcal{M}(t)\, z_0 = z_0 = 0 \quad \text{auf} \quad \mathcal{I} \tag{3,1}$$

gilt. Aus (1,2) und (3,1) folgt

$$\beta(t) = 0$$

und daraus folgt

Satz 1. *Das System aller $\mathcal{M}$-Bewegungen mit dem (z_0)-Automorphismus auf $\mathcal{I}$ ist 4-parametrisch (die Parameter des Systems bei unserer Wahl S, Σ :* $\operatorname{Re}(\alpha/\delta)$, $\operatorname{Im}(\alpha/\delta)$, $\operatorname{Re}(\gamma/\delta)$, $\operatorname{Im}(\gamma/\delta)$) *und seine Repräsentation*

$$\zeta = \frac{\alpha(t)\, z}{\gamma(t)\, z + \delta(t)}; \quad \alpha\delta = 1 \quad \textit{auf} \quad \mathcal{I} \tag{3,2}$$

ist kanonisch.

Suchen wir die $\mathcal{M}$-Bewegungen mit dem (U)-Automorphismus auf $\mathcal{I}$ für

$$(U) \equiv \{(z_1), (z_2)\}\,; \quad (z_1) \neq (z_2)\,.$$

Es ist S, Σ so auszuwählen, daß die Beziehungen

$$z_i = \zeta_i = \varepsilon_i\,; \quad i = 1, 2\,; \quad \varepsilon_1 = 1\,, \quad \varepsilon_2 = -1 \tag{3,3}$$

gelten. Aus (1,2) und (3,3) folgt

$$\alpha = \delta\,; \quad \beta = \gamma \quad \text{in} \quad C^0(\mathcal{I})$$

und daraus folgt

Satz 2. *Das System aller $\mathcal{M}$-Bewegungen mit dem $(z_1) \wedge (z_2)$-Automorphismus auf $\mathcal{I}$ ist 2-parametrisch und seine Repräsentation*

$$\zeta = \frac{\alpha(t)\, z + \beta(t)}{\beta(t)\, z + \alpha(t)}\,; \quad \alpha(t) = \pm \sqrt{(1 + \beta^2(t))} \tag{3,4}$$

ist kanonisch. Für $\alpha(t) . \beta(t) = 0$ auf $\mathcal{I}$ hängt die Beziehung (3,4) von t nicht ab und es handelt sich um die $\mathcal{M}$-Ruhe.

Satz 3. Die $\mathcal{M}$-Bewegung mit dem $(z_1) \wedge (z_2) \wedge \ldots \wedge (z_n)$-Automorphismus, wo $z_i \neq z_j$, $i \neq j$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $n \geqq 3$, ist die $\mathcal{M}$-Ruhe.

Der Beweis folgt aus D5, D6 und dem Satz über die Bestimmung der $\mathcal{M}$-Transformation, siehe z. B. [2], S. 4–5.

4. $\mathcal{M}$-BEWEGUNGEN MIT DEM $(\mathcal{K})$-AUTOMORPHISMUS

Suchen wir die $\mathcal{M}$-Bewegungen $\mathcal{M}(t)$ mit dem (U)-Automorphismus auf $\mathcal{I}$ für

$$(U) \equiv (\mathcal{K})$$

Es ist S, Σ so auszuwählen, daß die Beziehungen

$$\mathcal{K} \equiv z - \bar{z} = 0 \tag{4,1}$$

und

$$\mathcal{M}(t)\,(\mathcal{K}) \equiv \zeta - \bar{\zeta} = 0 \quad \text{auf} \quad \mathcal{I} \tag{4,2}$$

gelten. Aus (2,2) und (4,1) folgt

$$\mathcal{M}(t)\,(\mathcal{K}) \equiv \frac{\delta\zeta - \beta}{-\gamma\zeta + \alpha} = \frac{\bar{\delta}\bar{\zeta} - \bar{\beta}}{-\bar{\gamma}\bar{\zeta} + \bar{\alpha}} \tag{4,3}$$

und aus (4,2) und (4,3)

$$\delta\bar{\gamma} - \bar{\delta}\gamma = 0\,, \quad \beta\bar{\alpha} - \bar{\beta}\alpha = 0\,, \quad \gamma\bar{\beta} - \delta\bar{\alpha} = \beta\bar{\gamma} - \alpha\bar{\delta} \quad \text{in} \quad C^0(\mathcal{I})\,. \tag{4,4}$$

Die Beziehungen (4,4) sind gleich den 3 auf die kinematischen Parameter der $\mathcal{M}$-Bewegung gelegten reellen Bedingungen. Diese Bedingungen sind z. B. durch den folgenden Fall

$$\operatorname{Arg} \alpha = \operatorname{Arg} \beta = \operatorname{Arg} \gamma = \operatorname{Arg} \delta$$

zu erfüllen und daraus folgt

Satz 4. *Das System aller $\mathscr{M}$-Bewegungen mit dem $(\mathscr{K})$-Automorphismus auf $\mathscr{I}$ ist 3-parametrisch und seine Repräsentation*

$$\zeta = \frac{\alpha^* z + \beta^*}{\gamma^* z + \delta^*}; \quad \alpha^*\delta^* - \beta^*\gamma^* = 1 \quad auf \ \mathscr{I}, \tag{4,5}$$

wo $\alpha^* = \bar{\alpha}^*$, $\beta^* = \bar{\beta}^*$, $\gamma^* = \bar{\gamma}^*$, $\delta^* = \bar{\delta}^*$, *ist kanonisch.*

Bemerkung 6. Die $\mathscr{M}$-Bewegungen mit dem $(\mathscr{K})$-Automorphismus sind eigentlich die auf der Gruppe $SL(2, R)$ aufgebauten Bewegungen.

Untersuchen wir den Fall der Reproduktion $(\mathscr{K})$ in den $\mathscr{M}$-Bewegungen (4,5) in ihren einzelnen Phasen, dann ist es nach den festen Punkten (z) in der Phase t_0 zu fragen, d. h. nach den Punkten, für welche

$$\zeta = z \quad \text{in der Phase } t_0 \tag{4,6}$$

gilt.

Satz 5. *In der Phase* $t_0 \in \mathscr{I}$ *der* $\mathscr{M}$*-Bewegung* (4,5) *gibt es einen einzigen Punkt* $(z_0) \in (\mathscr{K})$, *bzw. eben* 2 *feste Punkte* (z_0), $(\bar{z}_0) \notin (\mathscr{K})$, *bzw. eben* 2 *feste Punkte* $(z_1), (z_2) \in (\mathscr{K}), (z_1) \neq (z_2)$, *dann und nur dann, wenn* $\alpha^*(t_0) + \delta^*(t_0) = \operatorname{tr} \mathbf{M}^*(t_0) = \pm 2$, *bzw.* $|\operatorname{tr} \mathbf{M}^*(t_0)| < 2$, *bzw.* $|\operatorname{tr} \mathbf{M}^*(t_0)| > 2$ *gilt.*

Der Beweis folgt aus (4,5) und [5], Satz 1.12 und 1.13, S. 20–23.

Gilt (4,6) auf $\mathscr{I}$, dann bekommen wir angesichts S5 (Satz 5) 3 wichtige Unterklassen der $\mathscr{M}$-Bewegungen (4,5), die durch

$$\zeta = \frac{\alpha^* z}{\gamma^* z + \alpha^*}, \quad \alpha^{*2} = 1 \quad \text{auf} \ \mathscr{I} \tag{4,7.1}$$

$$\zeta = \frac{\alpha^* z + \beta^*}{-\beta^* z + \alpha^*}, \quad \alpha^{*2} + \beta^{*2} = 1 \quad \text{auf} \ \mathscr{I} \tag{4,7.2}$$

$$\zeta = \frac{\alpha^* z + \beta^*}{\beta^* z + \alpha^*}, \quad \alpha^{*2} - \beta^{*2} = 1 \quad \text{auf} \ \mathscr{I} \tag{4,7.3}$$

zu repräsentieren sind. Die Klassen der $\mathscr{M}$-Bewegungen (4.7) sind 1-parametrisch. Interpretieren wir die einzige beliebige reelle Funktion als einen neuen Zeitvorgang der $\mathscr{M}$-Bewegung, dann bekommen wir in jeder Klasse eine einzige $\mathscr{M}$-Bewegung. Vom Standpunkte der Geometrie werden diese $\mathscr{M}$-Bewegungen durch „die Kreisförmigkeit" aller ihrer Bahnkurven charakterisiert (wie aus (4,7) folgt).

5. $\mathcal{M}$-BEWEGUNGEN MIT DEN $(\mathcal{K}_1) \wedge (\mathcal{K}_2)$-AUTOMORPHISMEN

Suchen wir die $\mathcal{M}$-Bewegungen mit dem (U)-Automorphismus auf $\mathcal{S}$ für

$$(U) \equiv \{(\mathcal{K}_1), (\mathcal{K}_2)\} \; ; \quad (\mathcal{K}_1) \neq (\mathcal{K}_2) \ldots \mathcal{M}\text{-Kreise} \; ;$$

die Reproduktion $\{(\mathcal{K}_1), (\mathcal{K}_2)\}$ ist angesichts der Definition der $\mathcal{M}$-Bewegung und „der Kreisförmigkeit" der $\mathcal{M}$-Geometrie nur so möglich, daß jeder aus den $\mathcal{M}$-Kreisen $(\mathcal{K}_1)$, $(\mathcal{K}_2)$ im Ganzen sich reproduziert.

Untersuchen wir die $\mathcal{M}$-Bewegungen mit den $(\mathcal{K}_1) \wedge (\mathcal{K}_2)$-Automorphismen für 3 mögliche Fälle vom Standpunkte der Inzidenz von $(\mathcal{K}_1)$ und $(\mathcal{K}_2)$:

a) $\operatorname{card} \{(\mathcal{K}_1) \cap (\mathcal{K}_2)\} = 2$

b) $\operatorname{card} \{(\mathcal{K}_1) \cap (\mathcal{K}_2)\} = 1$

c) $\operatorname{card} \{(\mathcal{K}_1) \cap (\mathcal{K}_2)\} = 0$

a) Es ist S, Σ so auszuwählen, daß für

$$(z_i) \equiv (\mathcal{K}_1) \cap (\mathcal{K}_2) \; ; \quad (\zeta_i) \equiv \mathcal{M}(t)(\mathcal{K}_1) \cap \mathcal{M}(t)(\mathcal{K}_2) \; ; \quad i = 1, 2 \, ,$$

die Beziehungen

$$z_i = \zeta_i = \varepsilon_i \tag{5,1}$$

$$\mathcal{K}_1 \equiv z - \bar{z} = 0 \; ; \quad \mathcal{M}(t)(\mathcal{K}_1) \equiv \zeta - \bar{\zeta} = 0 \tag{5,2}$$

gelten. Die gesuchte $\mathcal{M}$-Bewegung gehört angesichts (5,2) in das System der $\mathcal{M}$--Bewegungen (4,5) und angesichts (5,1) in das System $\mathcal{M}$-Bewegungen von der Repräsentation

$$\zeta = \frac{\alpha^* z + \beta^*}{\beta^* z + \alpha^*} \; ; \quad \alpha^{*2} - \beta^{*2} = 1 \, , \tag{5,3}$$

wo $\alpha^* = \bar{\alpha}^*$, $\beta^* = \bar{\beta}^*$ auf $\mathcal{S}$ ist. Beschränken wir uns auf $\alpha^* \beta^* \neq 0$ auf $\mathcal{S}$ (reguläre Phasen), dann ist (5,3)

$$\zeta = \frac{\vartheta z + 1}{z + \vartheta} \; ; \quad \vartheta = \vartheta(t) = \bar{\vartheta} = \frac{\alpha^*}{\beta^*} \tag{5,4}$$

zu schreiben. Durch die Ausschließung des Parameters ϑ bekommen wir die nichtparametrische Repräsentation der $\mathcal{M}$-Karte (des Systems aller $\mathcal{M}$-Bahnkurven) dieser $\mathcal{M}$-Bewegung:

$$(z - \bar{z})(\zeta\bar{\zeta} - 1) + (1 - z\bar{z})(\zeta - \bar{\zeta}) = 0 \, . \tag{5,5}$$

Aus (5,5) folgt: die $\mathcal{M}$-Karte bildet das hyperbolische Büschel der $\mathcal{M}$-Kreise mit den Grundpunkten (-1), (1); zu diesem Büschel gehört auch $(\mathcal{K}_2)$ und daraus folgt weiter:

Satz 6. *Das System aller $\mathcal{M}$-Bewegungen mit den $(\mathcal{K}_1) \wedge (\mathcal{K}_2)$-Automorphismen auf $\mathcal{S}$ im Falle sub* a) *ist* 1-*parametrisch und seine Repräsentation* (5,3), *bzw.* (5,4) (*Beschränkung auf die regulären Phasen*) *ist kanonisch. Bei diesen $\mathcal{M}$-Bewegungen reproduzieren sich alle $\mathcal{M}$-Kreise und beide Grundpunkte des hyperbolischen Büschels* (5,5), *aber keine andere $\mathcal{M}$-Punkte und $\mathcal{M}$-Kreise.*

Satz 7. *Das System aller $\mathcal{M}$-Bewegung mit den $(\mathcal{K}_1) \wedge (\mathcal{K}_2)$-Automorphismen auf $\mathcal{S}$ im Falle sub* a) *ist mit dem System der Bewegungen mit dem $(\mathcal{K}_1)$-Automorphismus* (4,7.3) *identisch.*

Der Beweis folgt aus (5,3) und aus der (4,7.3).

b) Es ist S, Σ so auszuwählen, daß die Beziehungen

$$\mathcal{K}_1 \equiv z - \bar{z} = 0\,; \quad \mathcal{M}(t)(\mathcal{K}_1) \equiv \zeta - \bar{\zeta} = 0\,, \tag{5,6}$$

$$\mathcal{K}_2 \equiv Az\bar{z} - Bz + B\bar{z} = 0\,; \quad \mathcal{M}(t)(\mathcal{K}_2) \equiv A\zeta\bar{\zeta} - B\zeta + B\bar{\zeta} = 0\,,$$

$$A = \bar{A} \neq 0\,; \quad B = -\bar{B} \neq 0\,,$$

also auch

$$(\mathcal{K}_1) \cap (\mathcal{K}_2) \equiv \mathcal{M}(t)(\mathcal{K}_1) \cap \mathcal{M}(t)(\mathcal{K}_2) \equiv (0) \tag{5,7}$$

gelten. Die gesuchte $\mathcal{M}$-Bewegung gehört angesichts (5,6) in das System der $\mathcal{M}$-Bewegungen (4,5) und angesichts (5,7) in das System der $\mathcal{M}$-Bewegungen (3,2). Da $(0) \in (\mathcal{K}_1)$ der einzige feste Punkt auf $\mathcal{S}$ ist, gehört die gesuchte $\mathcal{M}$-Bewegung in das System der $\mathcal{M}$-Bewegung mit der Repräsentation:

$$\zeta = \frac{\alpha^* z}{\gamma^* z + \alpha^*}\,; \quad \alpha^{*2} = 1\,. \tag{5,8}$$

Beschränken wir uns auf $\gamma^* \neq 0$ auf $\mathcal{S}$ (reguläre Phasen), dann ist (5,8)

$$\zeta = \frac{\vartheta z}{z + \vartheta}\,; \quad \vartheta = \vartheta(t) = \bar{\vartheta} = \frac{\alpha^*}{\gamma^*}\,. \tag{5,9}$$

zu schreiben.

Durch die Ausschließung des Parameters ϑ bekommen wir die nichtparametrische Repräsentation der $\mathcal{M}$-Karte der $\mathcal{M}$-Bewegung

$$(z - \bar{z})\,\zeta\bar{\zeta} - z\bar{z}(\zeta - \bar{\zeta}) = 0\,. \tag{5,10}$$

Aus (5,10) folgt: die $\mathcal{M}$-Karte bildet das parabolische Büschel der $\mathcal{M}$-Kreise mit dem Grundpunkt (0); zu diesem Büschel gehört auch $(\mathcal{K}_1)$ und $(\mathcal{K}_2)$ und daraus folgt weiter:

Satz 8. *Das System aller $\mathcal{M}$-Bewegungen mit den $(\mathcal{K}_1) \wedge (\mathcal{K}_2)$-Automorphismen auf $\mathcal{S}$ in Falle sub* b) *ist* 1-*parametrisch und seine Repräsentation* (5,8), *bzw.* (5,9)

(Beschränkung auf die regulären Phasen) ist kanonisch. Bei diesen $\mathcal{M}$-Bewegungen reproduzieren sich alle $\mathcal{M}$-Kreise und der Grundpunkt des parabolischen Büschels (5,10), *aber keine andere $\mathcal{M}$-Punkte und $\mathcal{M}$-Kreise.*

Satz 9. *Das System aller $\mathcal{M}$-Bewegungen mit den $(\mathcal{K}_1) \wedge (\mathcal{K}_2)$-Automorphismen auf $\mathcal{I}$ im Falle sub* b) *ist mit dem System der Bewegungen mit $(\mathcal{K}_1)$-Automorphismus* (4,7.1) *identisch.*

Der Beweis folgt aus (5,8) und (4,7.1).

c) Angesichts der Anwendung S5 auf $(\mathcal{K}_1)$ und $(\mathcal{K}_2)$ auf $\mathcal{I}$ und [6], S. 32, gibt es in dieser Bewegung 2 feste Punkte auf $\mathcal{I}$. Es ist S, Σ so auszuwählen, daß

$$\mathcal{K}_1 \equiv z - \bar{z} = 0\,; \quad \mathcal{M}(t)(\mathcal{K}_1) \equiv \zeta - \bar{\zeta} = 0 \tag{5,11}$$

und

$$z_i = \mathcal{M}(t)(z_i) = \zeta_i = {}'\varepsilon_i\,, \quad {}'\varepsilon_1 = j\,, \quad {}'\varepsilon_2 = -j\,, \tag{5,12}$$

$j^2 = -1$, $i = 1, 2$, ist.

Die gesuchte $\mathcal{M}$-Bewegung gehört angesichts (5,11) in das System der $\mathcal{M}$-Bewegungen (4,5) und angesichts (5,12) in das System der $\mathcal{M}$-Bewegungen von der Repräsentation

$$\zeta = \frac{\alpha z + \beta}{-\beta z + \alpha}\,; \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1\,;$$

im Ganzen gehört sie in das System der $\mathcal{M}$-Bewegungen von der Repräsentation

$$\zeta = \frac{\alpha^* z + \beta^*}{-\beta^* z + \alpha^*}\,; \quad \alpha^{*2} + \beta^{*2} = 1\,. \tag{5,13}$$

Beschränken wir uns auf $\alpha^* \,.\, \beta^* \neq 0$ auf $\mathcal{I}$ (reguläre Phasen), dann ist (5,13)

$$\zeta = \frac{\vartheta z + 1}{-z + \vartheta}\,; \quad \vartheta = \vartheta(t) = \bar{\vartheta} = \frac{\alpha^*}{\beta^*} \tag{5,14}$$

zu schreiben. Durch die Ausschließung des Parameters ϑ bekommen wir die nichtparametrische Repräsentation der $\mathcal{M}$-Karte der $\mathcal{M}$-Bewegung

$$(z - \bar{z})(\zeta\bar{\zeta} + 1) - (z\bar{z} + 1)(\zeta - \bar{\zeta}) = 0\,. \tag{5,15}$$

Aus (5,15) folgt: die $\mathcal{M}$-Karte bildet das elliptische Büschel der $\mathcal{M}$-Kreise mit den Grundpunkten (j), $(-j)$; zu diesem Büschel gehört auch $(\mathcal{K}_1)$ und $(\mathcal{K}_2)$ und daraus folgt weiter:

Satz 10. *Das System aller $\mathcal{M}$-Bewegungen mit den $(\mathcal{K}_1) \wedge (\mathcal{K}_2)$-Automorphismen auf $\mathcal{I}$ im Falle sub* c) *ist 1-parametrisch und seine Repräsentation* (5,13), *bzw.* (5,14) (*Beschränkung auf die regulären Phasen*) *ist kanonisch. Bei diesem* $\mathcal{M}$*-Bewegungen reproduzieren sich alle* $\mathcal{M}$*-Kreise und beide Grundpunkte des elliptischen Büschels* (5,15), *aber keine andere* $\mathcal{M}$*-Punkte und* $\mathcal{M}$*-Kreise.*

Satz 11. *Das System aller* $\mathcal{M}$*-Bewegungen mit den* $(\mathcal{K}_1) \wedge (\mathcal{K}_2)$*-Automorphismen auf* $\mathcal{I}$ *im Falle sub* c) *ist mit dem System der Bewegungen mit* $(\mathcal{K}_1)$*-Automorphismus* (4,7.2) *identisch.*

Der Beweis folgt aus (5,13) und (4,7.2).

6. $\mathcal{M}$-BEWEGUNGEN MIT DEM $(\mathcal{L}_\omega)$-AUTOMORPHISMUS

In den vorangehenden Absätzen haben wir alle Möglichkeiten der Zusammensetzung der festen Punktfigur (U) aus den $\mathcal{M}$-Punkten und $\mathcal{M}$-Kreisen ausgenutzt, denn wir bekommen nach dem Beifügen von weiteren festen $\mathcal{M}$-Punkten, bzw. $\mathcal{M}$-Kreisen keine neue $\mathcal{M}$-Bewegung sondern nur die höher angeführten Bewegungen oder $\mathcal{M}$-Ruhe.

Fragen wir also weiter angesichts des vorangehenden Absatzes und der Konformigkeit der $\mathcal{M}$-Geometrie (siehe z. B. [3]) nach den $\mathcal{M}$-Bewegungen mit (U)-Automorphismus für

$$(U) \equiv (\mathcal{L}_\omega),$$

wo

$$\mathcal{L}_\omega \equiv \zeta(t) = \frac{`\alpha + `\beta \exp(\chi t)}{`\gamma + `\delta \exp(\chi t)}, \tag{6,1}$$

$`\alpha, `\beta, `\gamma, `\delta \in K$, konst., $`\alpha`\delta \neq `\beta`\gamma$, $\chi \neq 0$, konst., $\omega = \operatorname{Arg} \chi$, $t \in R$, die ω-Loxodrome (Doppelspirale) des hyperbolischen Büschel der $\mathcal{M}$-Kreise mit den Grundpunkten $(`\alpha/`\gamma)$, $(`\beta/`\delta)$ ist. Für $\chi = \bar{\chi}$, bzw. $\chi = -\bar{\chi}$ repräsentiert (6,1) den Bogen des $\mathcal{M}$-Kreises des hyperbolischen, bzw. elliptischen Büschels der Kreise mit den Grundpunkten $(`\alpha/`\gamma)$, $(`\beta/`\delta)$.

Es ist das Koordinatensystem S so auszuwählen, daß

$$\left(\frac{`\alpha}{`\gamma}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{`\beta}{`\delta}\right) = -1$$

ist. Dann ist (6,1)

$$\mathcal{L}_\omega \equiv \zeta(t) = \frac{``\alpha - ``\beta \exp(\chi t)}{``\alpha + ``\beta \exp(\chi t)}, \quad ``\alpha \,.\, ``\beta \neq 0, \tag{6,2}$$

zu schreiben. Die notwendige Bedingung für die $\mathcal{M}$-Bewegung mit dem $(\mathcal{L}_\omega)$-Automorphismus (6,2) heißt:

(6,2) Bußm eine ahnkurve dieser $\mathcal{M}$-Bewegungen bis auf die Parametrisation repräsentieren.

Die gesuchten $\mathcal{M}$-Bewegungen gehören also in das System der Bewegungen von der Repräsentation

$$(6,3) \qquad \zeta = \frac{z - \exp(\chi`t)}{z + \exp(\chi`t)}; \quad \chi \neq 0, \quad \text{konst.},$$

$$`t \doteq `\bar{t} = `t(t) \in C^1(\mathcal{I}), \quad `t \in `\mathcal{I}, \quad \frac{\mathrm{d}`t}{\mathrm{d}t} \neq 0 \quad \text{auf} \quad \mathcal{I}.$$

Bemerkung 7. In (6,3) ist $|\mathbf{M}| \neq 1$, und $|\mathbf{M}| \neq 0$. Die Repräsentation (6,3) ist in diesem Falle einfacher als die normale Repräsentation und deshalb wird sie hier angewandt.

Durch die Transformationen S, bzw. Σ, bei welchen $(0) \to (-1)$; $(\infty) \to (1)$, bzw. $(0) \leftrightarrow (\infty)$ ist, bekommen wir die Repräsentation der $\mathcal{M}$-Bewegungen (6,3) in folgender Form:

$$(6,4) \qquad \zeta = \frac{(z + 1) + (z - 1)\exp(\chi`t)}{(z + 1) - (z - 1)\exp(\chi`t)}; \quad \chi \neq 0, \text{konst.}$$

Das Bild $(\mathcal{L}_\omega)$ von der Repräsentation (6,2) bei den Transformationen (6,4) ist wieder $(\mathcal{L}_\omega)$ von der Repräsentation (6,2). Daraus folgt:

Satz 12. *Das System aller $\mathcal{M}$-Bewegungen mit dem $(\mathcal{L}_\omega)$-Automorphismus ist 1-parametrisch und seine Repräsentation (6,4) ist kanonisch. Bei diesen $\mathcal{M}$-Bewegungen reproduzieren sich alle ω-Loxodromen des hyperbolischen Büschels der $\mathcal{M}$-Kreise mit den Grundpunkten (-1), (1) und beide Grundpunkte.*

Bemerkung 8. $\mathcal{M}$-Bewegungen mit $(\mathcal{L}_0)$-Automorphismus sind mit den Bewegungen mit $(\mathcal{K}_1) \wedge (\mathcal{K}_2)$-Automorphismen im Fall sub a) identisch; die $\mathcal{M}$-Bewegungen mit $(\mathcal{L}_{\pi/2})$-Automorphismus sind mit den Bewegungen mit $(\mathcal{K}_1) \wedge (\mathcal{K}_2)$-Automorphismen im Falle sub c) identisch.

Literatur

[1] *Blaschke, W., Thomsen, G.:* Vorlesungen über Differentialgeometrie III. (Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln). Berlin, Springer, 1929.

[2] *Benz, W.:* Vorlesungen über Geometrie der Algebren. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1973.

[3] *Бушманова, Г. В., Норден, А. П.:* Элементы конформной геометрии. Казань, Из. каз. унив., 1972 (russisch).

[4] *Forsyth, A. R.:* Theory of functions of a complex variable. Cambridge, University Press, 1900.

[5] *Shimura, G.:* Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Princeton, University Press, 1971 (russisch: Moskva, Mir, 1973).

[6] *Jankovský, Z.:* Základy $\mathcal{M}$-kinematiky a $\mathcal{M}$-kinematické geometrie v rovině (Grundlagen der $\mathcal{M}$-Kinematik und der $\mathcal{M}$-kinematischen Geometrie in der Ebene) — tschechisch. Kandidatdissertation FJFI, ČVUT, Praha, 1974.

Anschrift des Verfassers: 166 27 Praha 6, Suchbátarova 2 (FEL ČVUT).