Jaroslav Morávek

O jednom extremálním problému pro grafy s $\alpha(G) \leq 2$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 98 (1973), No. 3, 269--273

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117809`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 98 (1973), Praha

O JEDNOM EXTREMÁLNÍM PROBLÉMU PRO GRAFY S $\alpha(G) \leqq 2$

JAROSLAV MORÁVEK, Praha

(Došlo dne 18. ledna 1972)

Známá Turánova věta, viz [1] str. 269, určuje minimální počet hran v neorientovaném grafu bez smyček a násobných hran, s daným počtem uzlů n a s číslem stability nepřesahujícím dané k. Dále udává tato věta všechny grafy s uvedenou extremální vlastností. Někteří autoři se zabývali jejími různými modifikacemi a zobecněními, viz např. [2] a [3]. V této poznámce vycházíme ze speciálního případu Turánovy věty pro $k = 2$ a ve tvaru domněnky formulujeme jeho jisté zobecnění pro grafy s kladně ohodnocenými uzly. Je získán jistý dolní odhad pro řešení příslušného extremálního problému. Použité definice a fakty z teorie grafů jsou převzaty z [1].

Nechť $n \geqq 2$ je dané, přirozené číslo a budiž K_n úplný, neorientovaný graf s n uzly, označenými $u_1, u_2, \ldots, u_n$, přičemž předpokládáme, že graf je bez smyček a násobných hran. Nechť dále jsou dána kladná reálná čísla $c_1, c_2, \ldots, c_n$, přiřazená uzlům $u_1, u_2, \ldots, u_n$ v uvedeném pořadí. Pro každý částečný graf G grafu K_n označme $\alpha(G)$ jeho číslo stability, tj.

$$\alpha(G) = \max \left\{ \operatorname{card}(S) \;\middle|\; \begin{array}{l} S \subset \{u_1, u_2, \ldots, u_n\};\ \text{žádné dva} \\ \text{uzly z } S \text{ nejsou sousední v } G \end{array} \right\}$$

a pomocí $d_1(G), d_2(G), \ldots, d_n(G)$ označme stupně uzlů $u_1, u_2, \ldots, u_n$ v G. Nakonec označme symbolem $\mathscr{G}_n$ množinu všech částečných grafů G grafu K_n, pro něž $\alpha(G) \leqq 2$ a položme

$$\tau_n(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \min_{G \in \mathscr{G}_n} \sum_{j=1}^{n} c_j \, . \, d_j(G) \, . \tag{1}$$

Problém, kterým se chceme zabývat, záleží v určení $\tau_n(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ a všech grafů $G \in \mathscr{G}_n$, pro něž platí

$$\tau_n(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j \, . \, d_j(G) \, .$$

Ve speciálním případě $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = \frac{1}{2}$ je

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \, . \, d_j(G) = \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} d_j(G)$$

rovno počtu hran G a odpověď na zformulovaný problém poskytuje speciální případ Turánovy věty, který lze vyslovit takto:

1. Platí

$$\tau_n(\tfrac{1}{2}, \ldots, \tfrac{1}{2}) = \left[\frac{(n-1)^2}{4}\right] = \left]\frac{n^2-2n}{4}\right[\ ^{1)},$$

2. Pro každý graf $G \in \mathscr{G}_n$ jsou následující dva výroky ekvivalentní

a) Počet hran G je $[(n-1)^2/4]$.

b) G se skládá ze dvou komponent, které jsou úplnými grafy, přičemž první obsahuje $[n/2]$ uzlů, druhá $]n/2[$ uzlů.

Zformulované tvrzení přivádí k následující domněnce; při její formulaci i v dalším textu předpokládáme, že $c_1 \geqq c_2 \geqq \ldots \geqq c_n > 0$, čehož lze bez újmy na obecnosti docílit přečíslováním uzlů K_n.

Domněnka. *Určeme $a \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ tak, aby výraz $(a-1) . (c_1 + \ldots + c_a) + (n-a-1) . (c_{a+1} + \ldots + c_n)$ byl minimální. Domníváme se, že graf sestávající ze dvou úplných komponent, kde první má uzly $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_a$ a druhá uzly $\mathbf{u}_{a+1}, \ldots \ldots, \mathbf{u}_n$, je řešením zformulovaného extremálního problému, tj. domníváme se, že platí*

$$\tau_n(c_1, c_2, \ldots, c_n) =$$
$$= \min_{a=1,\ldots,n-1} \left((a-1) . (c_1 + \ldots + c_a) + (n-a-1) . (c_{a+1} + \ldots + c_n)\right).$$

Domněnku se nám nepodařilo dokázat ani vyvrátit a cíl této poznámky je skromnější: V následující větě je nalezen v jistém smyslu nezlepšitelný odhad pro $\tau_n(c_1, c_2, \ldots \ldots, c_n)$.

Věta. *Pro $\tau_n(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ platí*

$$\frac{3n-4}{4} \sum_{j=1}^{n} c_j - \frac{n\sqrt{n}}{4} . \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)} \leqq \tau_n(c_1, c_2, \ldots, c_n) \leqq$$
$$\leqq \min_{a=1,\ldots,[n/2]} \left((a-1) . (c_1 + \ldots + c_a) + (n-a-1) . (c_{a+1} + \ldots + c_n)\right).$$

Důkaz. 1. Horní odhad. Graf zkonstruovaný při formulaci domněnky poskytuje horní odhad

$$\tau_n(c_1, \ldots, c_n) \leqq \min_{a=1,\ldots,n-1} \left((a-1)(c_1 + \ldots + c_a) + (n-a-1)(c_{a+1} + \ldots + c_n)\right).$$

---

1) $[\xi]$ ::= největší celé číslo, $\leqq \xi$; $]\xi[$ ::= nejmenší c. č., $\geqq \xi$.

Z předpokladu $c_1 \geqq c_2 \geqq \ldots \geqq c_n > 0$ však vyplývá

$$\min_{a=1,\ldots,n-1} \left((a-1)(c_1 + \ldots + c_a) + (n-a-1)(c_{a+1} + \ldots + c_n)\right) =$$

$$= \min_{a=1,\ldots,[n/2]} \left((a-1)(c_1 + \ldots + c_a) + (n-a-1)(c_{a+1} + \ldots + c_n)\right).$$

2. Dolní odhad. Nechť $G \in \mathscr{G}_n$ a položme $\delta_j = d_j(G)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Dále označme E množinu všech hran grafu G. Řekneme, že $\mathbf{e} \in E$ *pokrývá* trojici uzlů $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_k)$, kde $1 \leqq i < j < k \leqq n$, právě když $\mathbf{e}$ spojuje některé dva z uzlů $\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_k$. Symbolem $T(\mathbf{e})$ označme množinu všech takových trojic, pokrytých hranou $\mathbf{e}$ a položme

(2) $$T = \bigcup_{\mathbf{e} \in E} T(\mathbf{e}).$$

Protože $\alpha(G) \leqq 2$, obsahuje T všechny trojice $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_k)$, kde $1 \leqq i < j < k \leqq n$, a tedy

(3) $$\operatorname{card}(T) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Ze vztahu (2) dostáváme

(4) $$\operatorname{card}(T) = \sum_{r=1}^{\operatorname{card}(E)} (-1)^{r-1} \sum\nolimits^{(r)} \operatorname{card}(T(\mathbf{e}_1) \cap \ldots \cap T(\mathbf{e}_r)),$$ [2]

kde symbolem $\sum^{(r)} \operatorname{card}(T(\mathbf{e}_1) \cap \ldots \cap T(\mathbf{e}_r))$ je označen součet čísel $\operatorname{card}(T(\mathbf{e}_1) \cap \ldots$ $\ldots \cap T(\mathbf{e}_r))$ pro všechny r-prvkové podmnožiny $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_r\}$ množiny E. Ze (4) však vyplývá vztah

(5) $$\operatorname{card}(T) = \sum\nolimits^{(1)} \operatorname{card}(T(\mathbf{e}_1)) -$$
$$- \sum\nolimits^{(2)} \operatorname{card}(T(\mathbf{e}_1) \cap T(\mathbf{e}_2)) + \sum\nolimits^{(3)} \operatorname{card}(T(\mathbf{e}_1) \cap T(\mathbf{e}_2) \cap T(\mathbf{e}_3)),$$

neboť všechny další členy na pravé straně (4) jsou nuly. (To vyplývá z faktu, že nejvýše tři různé hrany mohou pokrývat společnou trojici uzlů.)

Vyjádříme nyní první dva členy na pravé straně (5) a odhadneme člen třetí:

(6) $$\sum\nolimits^{(1)} \operatorname{card}(T(\mathbf{e}_1)) = (n-2)\operatorname{card}(E) = \frac{n-2}{2} \cdot \sum_{j=1}^{n} \delta_j$$

(protože každá hrana pokrývá přesně $(n-2)$ různých trojic uzlů),

(7) $$\sum\nolimits^{(2)} \operatorname{card}(T(\mathbf{e}_1) \cap T(\mathbf{e}_2)) = \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \delta_j(\delta_j - 1)$$

[2]) Podle tzv. „principu inkluse a exkluse“.

(protože každé dvě hrany, pokrývající společnou trojici uzlů, incidují v jednom uzlu),

$$(8) \qquad \sum^{(3)} \operatorname{card}(T(\mathbf{e}_1) \cap T(\mathbf{e}_2) \cap T(\mathbf{e}_3)) \leqq$$

$$\leqq \tfrac{1}{3} \sum^{(2)} \operatorname{card}(T(\mathbf{e}_1) \cap T(\mathbf{e}_2)) = \tfrac{1}{6} \sum_{j=1}^{n} \delta_j \,.\, (\delta_j - 1)$$

(protože každým třem hranám, pokrývajícím společnou trojici uzlů, odpovídají tři dvouprvkové množiny hran, uvažované v $\sum^{(2)} \operatorname{card}(T(\mathbf{e}_1) \cap T(\mathbf{e}_2))$.

Spojením (3), (5), (6), (7) a (8) dostáváme vztah

$$\frac{n-2}{2} \sum_{j=1}^{n} \delta_j - \tfrac{1}{3} \sum_{j=1}^{n} \delta_j(\delta_j - 1) \geqq \frac{n(n-1)(n-2)}{6},$$

a po jednoduché úpravě s ním ekvivalentní vztah

$$(9) \qquad \sum_{j=1}^{n} \left(\delta_j - \frac{3n-4}{4}\right)^2 \leqq \frac{n^3}{16}.$$

Z (9) vyplývá použitím Cauchy-Lagrangeovy nerovnosti

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \delta_j = \frac{3n-4}{4} \sum_{j=1}^{n} c_j + \sum_{j=1}^{n} c_j \,.\, \left(\delta_j - \frac{3n-4}{4}\right) \geqq \frac{3n-4}{4} \sum_{j=1}^{n} c_j -$$

$$- \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)} \,.\, \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} \left(\delta_j - \frac{3n-4}{4}\right)^2\right)} \geqq \frac{3n-4}{4} \,.\, \sum_{j=1}^{n} c_j - \frac{n\sqrt{n}}{4} \,.\, \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)}$$

což dokončuje důkaz.

Poznámka 1. Získané odhady jsou těsné v tom smyslu, že v případě $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = \frac{1}{2}$ z nich vyplývá vzhledem k celočíselnosti $\tau_n(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$, že $\tau_n(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}) = [(n-1)^2/4]$.

Poznámka 2. Z dokázané věty vyplývá, že nerovnost

$$\frac{3n-4}{4} \sum_{j=1}^{n} c_j - \frac{n\sqrt{n}}{4} \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} c_j^2\right)} \leqq$$

$$\leqq \min_{a=1,\ldots,[n/2]} ((a-1)(c_1 + \ldots + c_a) + (n-a-1)(c_{a+1} + \ldots + c_n))$$

platí jestliže $c_1 \geqq c_2 \geqq \ldots \geqq c_n \geqq 0$ a $n \geqq 2$.

Poznámka 3. Vztah (9) představuje nutnou podmínku pro to, aby celá nezáporná čísla $\delta_1, \ldots, \delta_n$ byla stupni nějakého grafu $G \in \mathcal{G}_n$. Bylo by zajímavé nalézt nějaké další nutné nebo postačující, resp. nutné a postačující podmínky.

Literatura

[1] *Berge C.:* Graphes et hypergraphes, DUNOD, Paris, 1970.

[2] *Motzkin T. S.* and *E. G. Straus:* Maxima of Graphs and a New Proof of a Theorem of Turán, Canadian Journal of Mathematics, Vol. *XVII*, p. 533—540.

[3] *Sauer N.:* A Generalization of a Theorem of Turán, Journal of Combinatorial Theory *10*, 109—112 (1971).

Adresa autora: 115 67 Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV v Praze).

Summary

ON AN EXTREMAL PROBLEM FOR GRAPHS WITH $\alpha(G) \leqq 2$

JAROSLAV MORÁVEK, Praha

Let $n \geqq 2$ be a given integer, and let K_n denote a complete, undirected graph with n nodes $u_1, u_2, \ldots, u_n$, where it is assumed the graph not to contain loops and multiple edges. Further, let be given positive real numbers $c_1, c_2, \ldots, c_n$ assigned respectively to $u_1, u_2, \ldots, u_n$. For any partial graph G of K_n let us denote $\alpha(G)$ its number of stability (see [1]), and put $d_1(G), \ldots, d_n(G)$ for the degrees of $u_1, \ldots, u_n$ in G. At last, let $\mathscr{G}_n$ denote the family of all partial graphs G of K_n such that $\alpha(G) \leqq 2$, and put

$$\tau_n(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \min_{G \in \mathscr{G}_n} \sum_{j=1}^{n} c_j \, d_j(G) .$$

Certain bounds for $\tau_n(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ are obtained, and they are shown to be best possible. The author conjectures that

$$\tau_n(c_1, \ldots, c_n) = \min_{a=1,\ldots,[n/2]} \left((a-1)(c_1 + \ldots + c_a) + (n-a-1)(c_{a+1} + \ldots + c_n)\right)$$

if $c_1 \geqq c_2 \geqq \ldots \geqq c_n > 0$.