Časopis pro pěstování matematiky

Bruno Budinský; Zbyněk Nádeník

Mehrdimensionales Analogon zu den Sätzen von Menelaos und Ceva

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 97 (1972), No. 1, 75--77

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117752`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

MEHRDIMENSIONALES ANALOGON ZU DEN SÄTZEN VON MENELAOS UND CEVA[1]

BRUNO BUDINSKÝ und ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Eingegangen am 29. Mai 1970)

Wir bezeichnen mit E_{n+1} den $(n + 1)$-dimensionalen euklidischen Raum, mit V_{n+1} seinen Vektorraum und mit $\{V_{n+1}\}$ die Menge aller Richtungen in V_{n+1}; $n \geqq 2$. Wir benutzen im ähnlichen Sinn die Bezeichnungen $E_n, V_n, \{V_n\}$ und nehmen an, daß $E_n \subset E_{n+1}$, $V_n \subset V_{n+1}$, $\{V_n\} \subset \{V_{n+1}\}$. Die Ergebnisse formulieren wir in der projektiven Erweiterung $\bar{E}_n = E_n \cup \{V_n\}$ von E_n.

Wir wählen einen Punkt $A_0 \in (E_{n+1} - E_n)$ und auf übliche Weise definieren wir die eineindeutige Abbildung $f : \bar{E}_n \to \{V_{n+1}\}$, nämlich $B \to \{B - A_0\}$ [2]) für $\forall B \in E_n$ und $B \to B$ für $\forall B \in \{V_n\}$. Mit B^* bezeichnen wir einen Repräsentanten der Richtung $f(B)$.

Im folgenden setzen wir stets voraus, daß $A_1, \ldots, A_{n+1}$ linear unabhängige Punkte in E_n sind. Dann gibt es immer solche Zahlen $b_0, b_1, \ldots, b_{n+1}$, daß

$$(1) \qquad B^* = b_0A_0 + b_1A_1 + \ldots + b_{n+1}A_{n+1}\,; \quad b_0 + b_1 + \ldots + b_{n+1} = 0\,.$$

Für $b_0 = 0$ ist $B^* \in V_n$ und B ist ein uneigentlicher Punkt in $\bar{E}_n$. Für $b_0 \neq 0$ ist $B = -b_1b_0^{-1}A_1 - \ldots - b_{n+1}b_0^{-1}A_{n+1}$ und demzufolge $B \in E_n$.

Die in $\bar{E}_n$ durch $B_i^* = \sum_{j=0}^{n+1} b_{ij}A_j$ $(i = 1, \ldots, n + 1)$ bestimmten Punkte $B_1, \ldots, B_{n+1}$ liegen dann und nur dann in einer Ebene, wenn $\det(b_{ij}) = 0$ $(i, j = 1, \ldots, n + 1)$. In der Tat, infolge (1) haben die Matrizen $\mathscr{B} = (b_{ij})$ mit $i, j = 1, \ldots, n + 1$ und $\mathscr{B}' = (b_{ij})$ für $i = 1, \ldots, n + 1; j = 0, 1, \ldots, n + 1$ denselben Rang. Also $\det \mathscr{B} = 0$ dann und nur dann, wenn B_i^* linear abhängig sind, d. h. wenn sich die Punkte B_i in einer Ebene befinden.

---

[1]) Mit den n-dimensionalen Seitenstücken zu diesen Sätzen haben sich fortschreitend K. K. MOKRIŠČEV [2], [3], Z. NÁDENÍK [5], [6], N. M. BESKIN [1], H. SASAYAMA [7] und F. MOLNÁR [4] beschäftigt. Es ist der Zweck der vorliegenden Note, die auf langwierige synthetische Weise hergeleitete Hauptergebnisse aus [5] und [6] kurz zu begründen. Das Verfahren kann auf sphärische Räume ausgedehnt werden.

[2]) $\{B - A_0\}$ bedeutet freilich die durch den Vektor $B - A_0$ bestimmte Richtung.

Wir wählen zwei Punkte $P, P' \in E_n$ und eine reelle Zahl k. Wir sagen, der durch $R^* = (k-1)A_0 + P - kP'$ definierte Punkt R teile die Strecke PP' im Verhältnis k; wir schreiben $(PP'R) = k$. Das ist in Übereinstimmung mit der üblichen Definition. Denn für $k \neq 1$ ergibt sich – als Spezialfall der obigen Bemerkungen, daß $R = (1-k)^{-1} P - k(1-k)^{-1} P'$. Für $k = 1$ ist freilich R der uneigentliche Punkt der Geraden PP'.

Weiter betrachten wir das $(n+1)$-Eck $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$. Wir wählen von Null verschiedene Zahlen $k_1, \ldots, k_{n+1}$ und auf jeder Seite $A_i A_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, n+1$; $A_{n+2} \equiv A_1)$ den Punkt $B_1 \in \bar{E}_n$ derart, daß $(A_i A_{i+1} B_i) = k_i$.

Der Satz von Menelaos. *Die Punkte $B_1, \ldots, B_{n+1}$ liegen in einer Ebene dann und nur dann, wenn $k_1 \ldots k_{n+1} = 1$.*

Da die Repräsentanten der Punkte B_i durch

(2) $$B_1^* = (k_i - 1)A_0 + A_i - k_i A_{i+1} \quad (i = 1, \ldots, n+1)$$

ausgedrückt werden können, so ergibt sich der Satz unmittelbar aus der obigen Behauptung als ihr spezieller Fall.

Mit β_i bezeichnen wir die Ebene, welche durch den Punkt B_i der Verbindungslinie $A_i A_{i+1}$ und durch alle Ecken des betrachteten Polygons mit Ausnahme von A_i, A_{i+1} geht.

Der Satz von Ceva. *Die Ebenen $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}$ haben dann und nur dann einen gemeinsamen Punkt, wenn $k_1 \ldots k_{n+1} = (-1)^{n+1}$.*

Angenommen, alle Ebenen β_i gehen durch den Punkt $Q \in \bar{E}_n$. Es sei

(3) $$Q^* = q_0 A_0 + q_1 A_1 + \ldots + q_{n+1} A_{n+1}\,; \quad q_0 + q_1 + \ldots + q_{n+1} = 0\,;$$

dabei ist $q_i \neq 0$ für $i = 1, \ldots, n+1$, wie leicht zu zeigen ist.[3]) Für den Punkt B_1 haben wir zugleich $B_1^* = (k_1 - 1)A_0 + A_1 - k_1 A_2$ und $B_1^* = bQ^* + b'_0 A_0 + b'_3 A_3 + \ldots + b'_{n+1} A_{n+1}$; die Koeffizienten $b'_0, b'_3, \ldots, b'_{n+1}$ interessieren uns nicht. Setzt man für Q^* aus (3) ein und vergleicht man dann beide Darstellungen, so erhält man $1 = bq_1$, $-k_1 = bq_2$.

Auf Grund der zyklischen Vertauschung ergibt sich daraus

(4) $$k_1 = -q_2/q_1,\ k_2 = -q_3/q_2,\ \ldots,\ k_{n+1} = -q_1/q_{n+1}\,,$$

was freilich unmittelbar zu $k_1 \ldots k_{n+1} = (-1)^{n+1}$ führt. Daß bei $k_1 \ldots k_{n+1} = (-1)^{n+1}$ die Ebenen β_i einen gemeinsamen Punkt besitzen, beweist man auf bekannte elementare indirekte Weise.

Der gemeinsame Punkt der Ebenen $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}$ ist dann und nur dann uneigentlich, wenn

(5) $$K \equiv 1 - k_1 + k_1 k_2 - \ldots + (-1)^n k_1 \ldots k_n = 0\,.$$

[3]) Vgl. [5], S. 5.

In der Tat, wenn wir aus (4) fortschreitend $q_2, \ldots, q_{n+1}$ berechnen und in (3) einsetzen, so erhalten wir

$$(6) \qquad Q^* = -q_1 K A_0 + q_1 A_1 - q_1 k_1 A_2 + \ldots + (-1)^n q_1 k_1 \ldots k_n A_{n+1} .$$

Weil das Verschwinden des Koeffizienten von A_0 einen uneigentlichen Punkt kennzeichnet, ergibt sich daraus sofort (5).

Es sei n eine ungerade Zahl. Die Punkte $B_1, \ldots, B_{n+1}$ liegen dann und nur dann in einer Ebene β, wenn die Ebenen $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}$ einen gemeinsamen Punkt haben. Der Punkt Q und die Ebene β sind inzident. Q ist der Durchschnitt der durch die Punkte $B_1, B_3, \ldots, B_n$ und $B_2, B_4, \ldots, B_{n+1}$ bestimmten Unterräume.

Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus den Sätzen von Menelaos und Ceva. Für ungerades n kann man Q^* aus (6) unter Zuhilfenahme von (2) in dieser Form schreiben:

$$Q^* = (.)\, A_0 + B_1^* + k_1 k_2 B_3^* + \ldots + k_1 k_2 \ldots k_{n-1} B_n^* .$$

Folglich befindet sich der Punkt Q in dem durch die Punkte $B_1, B_3, \ldots, B_n$ bestimmten Unterraum.

Literatur

[1] *Н. М. Бескин:* Теоремы Чевы и Менелая в *n*-мерном пространстве. Математическое просвещение *1* (1957), 119—137.

[2] *К. К. Мокрищев:* Об одном обобщении теоремы Менелая. Ростов ун-т, Учён. зап. НИИ матем. и физ, *2* (1938), 38—39.

[3] *К. К Мокрищев:* Об одном пространственном аналогоне теоремы Чевы и ей обратной. Ebenda *2* (1938), 51—59.

[4] *F. Molnár:* Eine Verallgemeinerung des Satzes von Ceva. Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötrös Sect. Math. *3—4* (1960/61), 197—199.

[5] *Z. Nádeník:* Rozšíření věty Menelaovy a Cevovy na *n*-dimensionální útvary. Čas. pro pěst. mat. *81* (1956), 1—25.

[6] *Z. Nádeník:* Několik vlastností vrcholových nadrovin normálního mnohoúhelníka. Čas. pro pěst. mat. *81* (1956), 287—291.

[7] *Hiroyoshi Sasayama:* General coordinate geometries VI., Journal of spatial mathematics of the Sasayama research room. Japan, *3* (1960), 125—134.

Anschrift der Verfasser: Praha 2, Trojanova 13 (České vysoké učení technické).