Časopis pro pěstování matematiky, roč. 97 (1972), Praha

RŮZNÉ

O JEDNOM ZOVŠEOBECNENÍ ČÍSELNOTEORETICKÉHO VZŤAHU $[a_1, a_2] = \dfrac{a_1 a_2}{(a_1, a_2)}$ A JEHO POUŽITÍ

PAVEL BARTOŠ, Bratislava

(Došlo dňa 30. septembra 1970)

V tomto článku odvodíme jedno zovšeobecnenie vzťahu

(1) $$[a_1, a_2] = \frac{a_1 a_2}{(a_1, a_2)}$$

a tento použijeme na riešenie diofantickej rovnice

(2) $$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y[x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

v prirodzených číslach.

Lema. *Vzťah* (1) *možno písať v tvare*

(3) $$[a_1, a_2] = (a_1, a_2)\left[\frac{[a_1, a_2]}{a_1}, \frac{[a_1, a_2]}{a_2}\right].$$

Dôkaz. Platí

$$[a_1, a_2] = \frac{a_1 a_2}{(a_1, a_2)} = (a_1, a_2)\frac{a_1}{(a_1, a_2)} \cdot \frac{a_2}{(a_1, a_2)} = (a_1, a_2)\left[\frac{a_1}{(a_1, a_2)}, \frac{a_2}{(a_1, a_2)}\right] =$$

$$= (a_1, a_2)\left[\frac{[a_1, a_2]}{a_1}, \frac{[a_1, a_2]}{a_2}\right],$$

lebo

$$\left(\frac{a_1}{(a_1, a_2)}, \frac{a_2}{(a_1, a_2)}\right) = 1.$$

Tým je lema dokázaná.

Vzťah (3) možno zovšeobecniť pre ľubovoľný počet prirodzených čísel $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n$, $n \geqq 2$.

Veta 1. *Nech $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $n \geqq 2$ sú ľubovoľné prirodzené čísla. Potom platí*

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\left[\frac{[a_1, a_2, \ldots, a_n]}{a_1}, \frac{[a_1, a_2, \ldots, a_n]}{a_2}, \ldots \right.$$
$$\left. \ldots, \frac{[a_1, a_2, \ldots, a_n]}{a_n}\right].$$

Dôkaz. Nech

$$a_i = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\alpha_{i,j}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

pričom p_i sú prvočísla, $\alpha_{i,j}$ je pre každé i a každé j nezáporné celé číslo a aspoň pre jedno i číslo prirodzené. Potom

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\max_i \alpha_{i,j}}$$

a teda

$$\left[\frac{[a_1, a_2, \ldots, a_n]}{a_1}, \ldots, \frac{[a_1, a_2, \ldots, a_n]}{a_n}\right] =$$

$$= \left[\prod_{j=1}^{k} p_j^{\max_i \alpha_{i,j} - \alpha_{1,j}}, \ldots, \prod_{j=1}^{k} p_j^{\max_i \alpha_{i,j} - \alpha_{n,j}}\right] = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\max_i \alpha_{i,j} - \min_i \alpha_{i,j}} = \frac{[a_1, a_2, \ldots, a_n]}{(a_1, a_2, \ldots, a_n)}$$

odkiaľ vyplýva tvrdenie vety.

Odvodenú vetu možno použiť pri riešení rovnice (2) v prirodzených číslach. O tejto rovnici pojednáva článok [1]. V ňom odvodenú vetu 1 môžeme pomocou tu odvodenej vety 1 doplniť.

Veta 2. *Všetky riešenia rovnice (2) v prirodzených číslach $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ dostaneme nasledovne:*

Nech $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ je ľubovoľné riešenie rovnice

$$\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_2} + \ldots + \frac{1}{\xi_n} = 1 \tag{5}$$

v prirodzených číslach. Potom

$$x_i = \frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]}{\xi_i}\, t, \quad y = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \tag{6}$$

je riešenie rovnice (2) v prirodzených číslach, keď t je ľubovoľné prirodzené číslo.

Důkaz. Podľa vety (1) v článku [1] treba len dokázať, že $y = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Keďže podľa (2) a (6) je

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]}{\xi_i} t}{\left[\frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]}{\xi_1} t, \ldots, \frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]}{\xi_n} t\right]} =$$

$$= \frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]\, t}{t\left[\frac{[\xi_1, \ldots, \xi_n]}{\xi_1}, \ldots, \frac{[\xi_1, \ldots, \xi_n]}{\xi_n}\right]} =$$

$$= \frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]}{\left[\frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]}{\xi_1}, \ldots, \frac{[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]}{\xi_n}\right]} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$$

podľa vety 1, keďže $\sum_{i=1}^{n} 1/\xi_i = 1$ a $[ta_1, ta_2, \ldots, ta_n) = t[a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Poznámka. Ak $\xi_1 \leqq \xi_2 \leqq \ldots \leqq \xi_n$, platí $\xi_1 \leqq n$ a $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \leqq \xi_1$, takže $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \leqq n$, čo hovorí veta (2) v článku [1].

Literatúra

[1] *Bartoš, P.:* O riešení rovnice $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = y[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ a rovnice $x_1 + x_2 + \ldots$ $\ldots + x_n = yx_1x_2 \ldots x_n$ v prirodzených číslach. Čas. pěst. mat. *94* (1971), 367—370.

Adresa autora: Bratislava, Sibírska 9.