Jakub Beneš

Projektivní deformace přímkových kongruencí vnořených do šestirozměrných projektivních prostorů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 97 (1972), No. 1, 1--9

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117740`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 97 * PRAHA 16. II. 1972 * ČÍSLO 1

PROJEKTIVNÍ DEFORMACE PŘÍMKOVÝCH KONGRUENCÍ VNOŘENÝCH DO ŠESTIROZMĚRNÝCH PROJEKTIVNÍCH PROSTORŮ

JAKUB BENEŠ, Brno

(Došlo dne 19. září 1968)

Tento článek navazuje na výsledky získané v práci [3], kde jsou studovány projektivní deformace 3. řádu přímkových kongruencí vnořených do n-rozměrných projektivních prostorů. Je-li $n \geqq 7$, jsou uvedené deformace ekvivalentní s bodovou deformací 1. řádu obou kongruencí. Je-li však jedna z obou kongruencí, které jsou v projektivní deformaci 3. řádu, vnořená do projektivního prostoru o dimensi 6 a není-li vnořitelná do prostoru o dimensi menší, pak totéž platí i pro druhou kongruenci. Přitom nutně musí být splněny určité podmínky (viz [3], rovnice (37)), které jsou mnohem silnější než ty, které si vynucují bodovou deformaci 1. řádu. Nebylo účelem článku [3] sledovat podrobně tento zvláštní případ a proto se k němu vracím v tomto pojednání. Je tedy hlavním úkolem tohoto článku objasnění podmínek (37) z jiných geometrických hledisek, dále důkaz existence netriviálních deformací 3. řádu a stručná zmínka o singulární deformaci 3. řádu. Omezím se však pouze na nejobecnější typy neparabolických kongruencí charakteru 3, jejichž příslušné Laplaceovy transformace nedegenerují a jimž v duálním prostoru odpovídají Laplaceovy posloupnosti ploch s konjugovanými sítěmi.

1. ZÁKLADNÍ ROVNICE KONGRUENCE L A JEJÍ DUALIZACE L^*

Vycházíme-li z podmínek (1), (2), (3), (22) a (35) v [3], které doplníme podmínkou

$$[A_1, A_2, \ldots, A_7] = 1\,, \tag{1}$$

můžeme v případě $n = 6$ specializovat reper přímkové kongruence L obdobným způsobem jak tomu bylo v [2], takže platí

$$\omega_{12} = \alpha_1\omega_2\,, \quad \omega_{21} = \alpha_2\omega_1\,, \quad \omega_{14} = \omega_{23} = 0\,, \quad \omega_{1j} = \omega_{2j} = 0 \ (j = 5, 6, 7), \tag{2}$$
$$\omega_{31} = a_1\omega_2\,, \quad \omega_{35} = \omega_1\,, \qquad \omega_{32} = \omega_{34} = \omega_{36} = \omega_{37} = 0\,,$$

$$\omega_{42} = a_2\omega_1\,, \quad \omega_{46} = \omega_2\,, \qquad \omega_{41} = \omega_{43} = \omega_{45} = \omega_{47} = 0\,,$$

$$\omega_{57} = b_2\omega_1\,, \quad \omega_{67} = b_1\omega_2\,, \quad \omega_{75} = c_1\omega_2\,, \quad \omega_{76} = c_2\omega_1\,,$$

$$\omega_{52} = \omega_{54} = \omega_{56} = \omega_{61} = \omega_{63} = \omega_{65} = \omega_{73} = \omega_{74} = 0\,.$$

(3)
$$\begin{aligned}
&\omega_1 \wedge [\mathrm{d}\alpha_2 - \alpha_2(\omega_{33} - 2\omega_{11} + \omega_{22})] = 0\,,\\
&\omega_2 \wedge [\mathrm{d}\alpha_1 - \alpha_1(\omega_{44} - 2\omega_{22} + \omega_{11})] = 0\,,\\
&\omega_1 \wedge (2\omega_{33} - \omega_{55} - \omega_{11}) = 0\,,\\
&\omega_2 \wedge (2\omega_{44} - \omega_{66} - \omega_{22}) = 0\,,\\
&\omega_1 \wedge [\mathrm{d}b_2 - b_2(\omega_{33} - \omega_{11} + \omega_{55} - \omega_{77})] = 0\,,\\
&\omega_2 \wedge [\mathrm{d}b_1 - b_1(\omega_{44} - \omega_{22} + \omega_{66} - \omega_{77})] = 0\,,\\
&\omega_1 \wedge [\mathrm{d}c_2 - c_2(\omega_{33} - \omega_{11} + \omega_{77} - \omega_{66})] = 0\,,\\
&\omega_2 \wedge [\mathrm{d}c_1 - c_1(\omega_{44} - \omega_{22} + \omega_{77} - \omega_{55})] = 0\,,\\
&\omega_1 \wedge [\mathrm{d}a_2 - a_2(\omega_{33} - \omega_{11} + \omega_{44} - \omega_{22})] + \omega_2 \wedge \omega_{62} = 0\,,\\
&\omega_1 \wedge \omega_{51} + \omega_2 \wedge [\mathrm{d}a_1 - a_1(\omega_{44} - \omega_{22} + \omega_{33} - \omega_{11})] = 0\,,\\
&\alpha_2\omega_1 \wedge \omega_{62} - b_1\omega_2 \wedge \omega_{71} = 0\,, \quad c_2\omega_1 \wedge \omega_{64} - \omega_2 \wedge \omega_{72} = 0\,,\\
&b_2\omega_1 \wedge \omega_{72} - \alpha_1\omega_2 \wedge \omega_{51} = 0\,, \quad \omega_1 \wedge \omega_{71} - c_1\omega_2 \wedge \omega_{53} = 0\,.
\end{aligned}$$

Přitom naše předpoklady o typu uvažovaných kongruencí si vynucují podmínku

(4)
$$\alpha_1\alpha_2a_1a_2b_1b_2c_1c_2 \neq 0\,.$$

Základní rovnice kongruence L při platnosti (2) jsou

(5)
$$\mathrm{d}A_i = \sum_{j=1}^{7} \omega_{ij}A_j \quad (i = 1, 2, \ldots, 7)\,.$$

Označme symbolem P_6^* prostor duální k P_6. Repery v P_6^* jsou tvořeny analytickými nadrovinami E_k

(6)
$$E_k = (-1)^k\,[A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_7] \quad (k = 1, 2, \ldots, 7)$$

přitom $[A_i, E_j] = \delta_i^j$ (viz [1] str. 26).

Oskulačnímu prostoru $(A_1, A_2, \ldots, A_6)$ kongruence L podél přímky p je dualizací přiřazen bod E_7 duálního prostoru P_6^* a tedy kongruenci L v P_6 plocha L^* v P_6^*, jejíž základní rovnice jsou

(7)
$$\mathrm{d}E_i = -\sum_{j=1}^{7} \omega_{ji}E_j\,. \quad (i = 1, 2, \ldots, 7)$$

Ze (7) vyplývá, že $\omega_1\omega_2 = 0$ je rovnicí konjugované sítě na L^*, a že plochy (E_6) a (E_4) resp. (E_5) a (E_3) jsou Laplaceovými transformacemi plochy L^* ve směru $\omega_1 = 0$ resp. $\omega_2 = 0$. Snadno se přesvědčíme, že dualizace přiřazuje fokální ploše kongruence L, na níž leží hrany vratu vrstvy rozvinutelných ploch $\omega_1 = 0$ $(\omega_2 = 0)$, kongruenci duálního prostoru vytvořenou tečnami vrstvy čar $\omega_1 = 0$ $(\omega_2 = 0)$ konjugované sítě na L^*.

Dále budeme označovat:

Laplaceovu posloupnost kongruencí v P_6 jako

$$\ldots L_{-1}, L, L_1, \ldots,$$

Laplaceovu posloupnost příslušných fokálních ploch jako

$$\ldots S_{-1}, S_1, S_2, \ldots,$$

přičemž $S_{-1} = (A_2)$, $S_1 = (A_1)$, Laplaceovu posloupnost ploch v P_6^* jako

$$\ldots L^*_{-1}, L^*, L^*_1, \ldots,$$

a přidruženou posloupnost kongruencí v P_6^* jako

$$\ldots, S^*_{-1}, S^*_1, \ldots,$$

kde $S^*_{-1}(S^*_1)$ je vytvořena tečnami vrstvy čar $\omega_1 = 0$ $(\omega_2 = 0)$ na L^*.

Je-li L' kongruence v P'_6, pak o ní i o specializaci jejího reperu budeme předpokládat totéž co o kongruenci L a jejím reperu, pouze odpovídající symboly či rovnice budeme odlišovat čárkou.

Při označení $\tau_{ik} = \omega'_{ik} - \omega_{ik}$ platí o kongruencích L, L' v rozvinutelné korespondenci

$$\tau_{13} = 0\,, \quad \tau_{24} = 0\,. \tag{8}$$

Z (3), (3') a (8) vyplývají rovnice:

$$\tau_{33} - \tau_{11} = s_1\omega_1\,, \quad \tau_{44} - \tau_{22} = s_2\omega_2\,, \quad \tau_{55} - \tau_{33} = s_3\omega_1\,, \tag{9}$$
$$\tau_{66} - \tau_{44} = s_4\omega_2\,,$$

$$\mathrm{d}\frac{\alpha'_2}{\alpha_2} - \frac{\alpha'_2}{\alpha_2}(\tau_{22} - \tau_{11}) = m_2\omega_1\,, \quad \mathrm{d}\frac{\alpha'_1}{\alpha_1} - \frac{\alpha'_1}{\alpha_1}(\tau_{11} - \tau_{22}) = m_1\omega_2\,,$$

$$\mathrm{d}\frac{b'_2}{b_2} - \frac{b'_2}{b_2}(\tau_{55} - \tau_{77}) = n_2\omega_1\,, \quad \mathrm{d}\frac{b'_1}{b_1} - \frac{b'_1}{b_1}(\tau_{66} - \tau_{77}) = n_1\omega_2\,,$$

$$\mathrm{d}\frac{c'_2}{c_2} - \frac{c'_2}{c_2}(\tau_{77} - \tau_{66}) = p_2\omega_1\,, \quad \mathrm{d}\frac{c'_1}{c_1} - \frac{c'_1}{c_1}(\tau_{77} - \tau_{55}) = p_1\omega_2\,.$$

2. PROJEKTIVNÍ DEFORMACE 3. ŘÁDU

Nutné a postačující podmínky projektivní deformace 3. řádu kongruencí L, L' uvedené v [3] (Prop. 6) se zjednoduší vzhledem k naší specializaci reperů na

$$(10) \qquad \alpha'_1 = \varrho^{-2}\alpha_1\,, \quad \alpha'_2 = \varrho^2\alpha_2\,, \quad b_1b'_2 = \varrho^{-2}b'_1b_2\,, \quad \varrho \neq 0\,,$$
$$2s_1 + s_3 = 0\,, \quad 2s_2 + s_4 = 0\,.$$

Diferenciálními důsledky rovnic (10) jsou pak relace

$$(11) \qquad b'_1c'_2 = b_1c_2\,, \quad b'_2c'_1 = b_2c_1\,, \quad a'_1 = a_1\,, \quad a'_2 = a_2$$
$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = m_1 = n_1 = p_1 = m_2 = n_2 = p_2 = 0\,.$$

Odtud a podle [3], rovnice (36), nalezeneme nejobecnější kolineaci K realizující uvedenou deformaci ve tvaru

$$(12) \qquad KA_1 = \varrho A'_1\,, \quad KA_2 = \varrho^{-1}A'_2\,, \quad KA_3 = \varrho A'_3\,, \quad KA_4 = \varrho^{-1}A'_4\,,$$
$$KA_5 = \alpha_{51}A'_1 + \varrho A'_5\,, \qquad KA_6 = \alpha_{62}A'_2 + \varrho^{-1}A'_6\,,$$
$$KA_7 = \alpha_{71}A'_1 + \alpha_{72}A'_2 + \varrho\frac{b'_2}{b_2}A'_7\,,$$

přičemž

$$(13) \qquad 3\varrho^{-1}\alpha_{51}\omega_1 = \tau_{53}\,, \quad 3\varrho\alpha_{62}\omega_2 = \tau_{64}\,.$$

Protože $a_1\omega_1\omega_2$ $(a_2\omega_1\omega_2)$ je bodová forma kongruence L_1, (L_{-1}) (viz [3], rov. (20)) a $b_1c_2\omega_1\omega_2$ $(b_2c_1\omega_1\omega_2)$ bodová forma kongruence S^*_1 (S^*_{-1}), vyplývá z (11) a z [3], Prop. 1, 2, 3, tvrzení:

Věta 1. *Nechť $C : L \to L'$ je projektivní deformace 3. řádu. Pak C i indukované korespondence $C_i : L_i \to L'_i$ a $c^*_i : S^*_i \to S^*_i$ $(i = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ jsou bodovými deformacemi 2. řádu.*

Poznámka 1. Mnohé vlastnosti kongruencí vnořených do šestirozměrných projektivních prostorů jsou podobné těm, které byly zjištěny ve [2]. Všechny důkazy lze provést metodami užitými ve [2], proto jsou v dalším většinou vypuštěny, nebo jen naznačeny.

3. EXISTENČNÍ VĚTA

Podle (1), (1') a (12) je $\varrho a'/a = 1$. Repery kongruencí lze zvolit tak, že $\varrho = 1$. Za tohoto předpokladu se podmínky (10) zjednoduší, takže trojice (C, L, L'), kde $C : L \to L'$ je projektivní deformace 3. řádu, je dána uzavřeným systémem (2), (3) a

$$\tau_{1i} = \tau_{2i} = \tau_{3i} = \tau_{4i} = 0 \; (i = 1, 2, \dots, 7), \quad \tau_{52} = \tau_{54} = \tau_{61} = \tau_{63} = 0,$$
$$\tau_{5j} = \tau_{6j} = 0 \; (j = 5, 6, 7), \quad \tau_{7k} = 0 \; (k = 3, 4, 7),$$
$$\omega_1 \wedge \tau_{53} = 0, \quad \omega_2 \wedge \tau_{64} = 0, \quad \omega_1 \wedge \tau_{51} = 0, \quad \omega_2 \wedge \tau_{62} = 0,$$
$$\alpha_2\omega_1 \wedge \tau_{64} - b_1\omega_2 \wedge \tau_{71} = 0, \quad b_2\omega_1 \wedge \tau_{72} - \alpha_1\omega_2 \wedge \tau_{51} = 0,$$
$$\omega_1 \wedge \tau_{71} - c_1\omega_2 \wedge \tau_{53} = 0, \quad c_2\omega_1 \wedge \tau_{64} - \omega_2 \wedge \tau_{72} = 0.$$

Systém není v involuci, proto jej prodloužíme rovnicemi:

$$\tau_{53} = a_{53}\omega_1, \quad \tau_{64} = b_{64}\omega_2, \quad \tau_{51} = b_2 a_{51}\omega_1, \quad \tau_{62} = b_1 b_{62}\omega_2,$$
$$\tau_{71} = -\alpha_2 b_{62}\omega_1 - c_1 a_{53}\omega_2, \quad \tau_{72} = -c_2 b_{64}\omega_1 - \alpha_1 a_{51}\omega_2.$$

Snadno se přesvědčíme, že systém ani teď není v involuci. Dalším prodlužováním jej lze už poměrně snadno uvést do involuce, je však nutno odlišit případ, kdy a_{53} a b_{64} je současně rovné nule.

Věta 2. *Trojice (C, L, L'), kde $C : L \to L'$ je projektivní deformace 3. řádu, existují a závisí na 18 libovolných funkcích jedné proměnné. V singulárním případě, $a_{53} = b_{64} = 0$, trojice (C, L, L') existují a závisí na 14 libovolných funkcích jedné proměnné.*

Poznámka 2. K singulárnímu případu se vrátíme podrobněji v odst. 6.

4. DEFORMACE FOKÁLNÍCH PLOCH A LAPLACEOVÝCH TRANSFORMACÍ

Korespondence $C : L \to L'$ vynucuje přirozeným způsobem korespondence $c_1 : S_1 \to S'_1$, $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1}$, $C^* : L^* \to L'^*$. Korespondence c_1, c_{-1}, C^* jsou projektivními deformacemi 2. řádu, právě když jsou konjugované nebo C rozvinutelná. Uvažme dále, že příslušné oskulační kolineace, které realizují uvedené deformace, jsou obecně různé. Platí:

Věta 3. *Korespondence $C : L \to L'$ je projektivní deformací 3. řádu (bodovou deformací 1. řádu), právě když projektivní deformace 2. řádu $c_1 : S_1 \to S'_1$, $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1}$ a $C^* : L^* \to L'^*$ ($c_1 : S_1 \to S'_1$ a $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1}$) jsou současně realizovány společnou oskulační kolineací.*

Nutné a postačující podmínky, aby $c_1 : S_1 \to S'_1$ byla projektivní deformací 3. řádu i příslušnou oskulační kolineací 3. řádu K_1, vypočteme z rovnic

$$K_1 \, d^m A_1 = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \, {}^1\vartheta_k \, d^{m-k} A'_1 \qquad \text{pro } m = 0, 1, 2, 3,$$

kde ${}^1\vartheta_k$ je vhodná k-forma, ${}^1\vartheta_0 = \varrho_1 \neq 0$.

Vychází: c_1 je konjugovaná a

$$\alpha'_1\alpha'_2 - \alpha_1\alpha_2 = 0\,, \quad a'_1 - a_1 = 0\,. \tag{14}$$

Poněvadž c_1 je konjugovaná, je C rozvinutelná a podle (14) jsou si rovny bodové formy kongruencí L, L' a L_1, L'_1. Ze (14) a (9) obdržíme jako diferenciální důsledky vztahy $a'_2 = a_2$, $m_1 = m_2 = 0$. Tedy také bodové formy kongruencí L_{-1} a L'_{-1} jsou si rovny. Nejobecnější oskulační kolineace 3. řádu realizující projektivní deformaci 3. řádu c_1 je vyjádřena rovnicemi:

$$K_1A_1 = \varrho_1 A'_1\,, \quad K_1A_2 = \varrho\frac{\alpha'_1}{\alpha_1}A'_2\,, \quad K_1A_3 = \varrho_1 A'_3\,, \tag{15}$$

$$K_1A_4 = \varrho_1\frac{\alpha'_1}{\alpha_1}A'_4\,, \quad K_1A_5 = \varrho_1 s_1 A'_3 + \varrho_1 A'_5\,,$$

$$K_1A_6 = {}^1\alpha_{61}A'_1 + \varrho_1\frac{\alpha'_1}{\alpha_1}s_2A'_4 + \varrho_1\frac{\alpha'_1}{\alpha_1}A'_6\,,$$

$$K_1A_7 = {}^1\alpha_{71}A'_1 + {}^1\alpha_{73}A'_3 + \varrho_1\frac{2s_1 + s_3}{b_2}A'_5 + \varrho_1\frac{b'_2}{b_2}A'_7\,,$$

$$b_2{}^1\alpha_{73} = \varrho_1[\mathrm{d}s_1 - s_1(\omega_{33} - \omega_{11}) + \tau_{53}] + \varrho_1 s_1(2\omega_{33} - \omega_{11} - \omega_{53}) + \varrho_1 s_1^2\omega_1\,.$$

Analytické podmínky pro projektivní deformaci 3. řádu $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1}$ a příslušnou oskulační kolineaci K_{-1} obdržíme ze (14) a (15) záměnou indexů

$$1 \text{ za } 2\,, \quad 3 \text{ za } 4\,, \quad 5 \text{ za } 6 \tag{16}$$

a naopak.

Obdržené výsledky můžeme s použitím Prop. 1, 2 a 3 z [3] shrnout ve věty:

Věta 4. *Korespondence $c_1 : S_1 \to S'_1$ je projektivní deformací 3. řádu, právě když $C : L \to L'$ je bodovou deformací 2. řádu.*

Věta 5. *Nechť $c_1 : S_1 \to S'_1$ je projektivní deformací 3. řádu. Pak také $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1}$ a všechny indukované korespondence $c_i : S_i \to S'_i$ $(i = \pm 2, \pm 3, \ldots)$ jsou projektivními deformacemi 3. řádu.*

Souvislost mezi projektivními deformacemi 2. řádu C, C_1 a C_{-1} a projektivní deformací 3. řádu $C : L \to L'$ je vyjádřena následující větou:

Věta 6. *Nechť $C : L \to L'$ a indukované korespondence $C_1 : L_1 \to L'_1$ a $C_{-1} : L_{-1} \to L'_{-1}$ jsou projektivními deformacemi 2. řádu. Tyto deformace jsou současně realizovatelné společnou oskulační kolineací, právě když C je projektivní deformací 3. řádu.*

5. DEFORMACE DUÁLNÍCH ÚTVARŮ

Korespondence $C : L \to L'$ vynucuje prostřednictvím dualizace korespondence mezi plochami $C^* : L^* \to L'^*$, $C_i^* : L_i^* \to L_i'^*$ a mezi přidruženými kongruencemi c_i^* : : $S_i^* \to S_i'^*$, kde $i = \pm 1, \pm 2, \ldots$ Aby c_1^* byla projektivní deformací 3. řádu, je nutnou a postačující podmínkou její rozvinutelnost a splnění vztahů

$$(17) \qquad b'_1 c'_2 = b_1 c_2 \,, \quad \alpha'_1 b'_1 b_2 = \alpha_1 b_1 b'_2 \,, \quad 2b_2 n_2 + b'_2 s_3 = 0 \,,$$
$$2s_4 + s_2 = 0 \,.$$

Zkoumáním diferenciálních důsledků zjistíme, že tyto podmínky jsou ekvivalentní s (11). Platí tedy:

Věta 7. *Korespondence $C : L \to L'$ je projektivní deformací 3. řádu, právě když $c_1^* : S_1^* \to S_1'^*$ je projektivní deformací 3. řádu.*

Nejobecnější kolineace K_1^*, realizující projektivní deformaci 3. řádu c_1^* je dána rovnicemi:

(18)

$$K_1^* E_7 = {}^1\alpha_{77}^* E'_7 \,, \quad K_1^* E_6 = {}^1\alpha_{66}^* E'_6 \,, \quad K_1^* E_5 = {}^1\alpha_{77}^* \frac{b'_2}{b_2} E'_5 \,, \quad K_1^* E_4 = {}^1\alpha_{66}^* E'_4 \,,$$

$$K_1^* E_3 = {}^1\alpha_{37}^* E'_7 + {}^1\alpha_{77}^* \frac{b'_2}{b_2} E'_3 \,, \quad K_1^* E_2 = {}^1\alpha_{26}^* E'_6 + {}^1\alpha_{66}^* E'_2 \,,$$

$$K_1^* E_1 = {}^1\alpha_{17}^* E'_7 + {}^1\alpha_{16}^* E'_6 + {}^1\alpha_{77}^* \frac{b'_2}{b_2} E'_1 \,,$$

$${}^1\alpha_{77}^* \tau_{53} + 3b_2 {}^1\alpha_{37}^* \omega_1 = 0 \,, \quad 2 {}^1\alpha_{66}^* \tau_{64} - 3 \, {}^1\alpha_{26}^* \omega_2 = 0 \,,$$
$${}^1\alpha_{66}^* \, {}^1\alpha_{77}^* = \varrho_1^* \neq 0 \,.$$

Nutné a postačující podmínky pro projektivní deformaci 3. řádu $c_{-1}^* : S_{-1}^* \to S_{-1}'^*$ i příslušnou oskulační kolineaci 3. řádu K_{-1}^* obdržíme z (17) a (18) záměnou indexů podle (16). Tyto podmínky jsou však ekvivalentní s (17). Platí tedy věty:

Věta 8. *Korespondence $c_{-1}^* : S_{-1}^* \to S_{-1}'^*$ je projektivní deformací 3. řádu, právě když $c_1^* : S_1^* \to S_1'^*$ je projektivní deformací 3. řádu.*

Věta 9. *Nechť $C : L \to L'$ nebo $c_1^* : S_1^* \to S_1'^*$ jsou projektivními deformacemi 3. řádu. Pak také indukované korespondence $C_i : L_i \to L'_i$ a $c_i^* : S_i^* \to S_i'^*$ $(i = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ jsou projektivními deformacemi 3. řádu.*

6. SINGULÁRNÍ PROJEKTIVNÍ DEFORMACE 3. ŘÁDU

Je-li $C : L \to L'$ projektivní deformací 3. řádu, pak podle vět 1, 4 a 5 jsou také korespondence $c_1 : S_1 \to S'_1$ a $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1}$ projektivními deformacemi 3. řádu. Oskulační kolineace 3. řádu K, K_1, K_{-1} realizující tyto deformace jsou obecně různé (viz (12), (15)). Aby kolineace K a K_1 resp. K a K_{-1} mohly splynout, pak nutně musí být

$$\tau_{53} = 0\,, \quad \tau_{64} = 0\,. \tag{19}$$

Odtud máme:

Věta 10. *Nechť $C : L \to L'$ je projektivní deformace 3. řádu, $c_1 : S_1 \to S'_1$ a $c_{-1} :$ $: S_{-1} \to S'_{-1}$ jsou vynucené projektivní deformace 3. řádu. Pak deformace C a c_1 jsou realizovatelné společnou oskulační kolineací právě tehdy, jsou-li takto realizovatelné deformace C a c_{-1}.*

Definice. Projektivní deformaci 3. řádu $C : L \to L'$ nazýváme *singulární,* jestliže vynucené projektivní deformace 3. řádu $c_1 : S_1 \to S'_1$ a $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1}$ jsou realizovány kolineací K (podle E. Čecha).

Na základě věty 2, 10 a vztahů (19) můžeme vyslovit tvrzení:

Věta 11. *Trojice (C, L, L'), kde $C : L \to L'$ je singulární projektivní deformace 3. řádu, existují a závisí na 14 funkcích jedné proměnné.*

Porovnáním kolineací K_1 a K_{-1} ihned obdržíme:

Věta 12. *Korespondence $C : L \to L'$ je singulární projektivní deformací 3. řádu, právě když indukované korespondence $c_1 : S_1 \to S'_1$ a $c_{-1} : S_{-1} \to S'_{-1}$ jsou současně projektivními deformacemi 3. řádu a jsou realizovatelné společnou oskulační kolineací.*

7. SINGULÁRNÍ DEFORMACE LAPLACEOVÝCH TRANSFORMACÍ

Dále chceme určit nutné a postačující podmínky pro to, aby projektivní deformace 3. řádu $c_1^* : S_1^* \to S_1'^*$ byla singulární. Nalezneme proto známým způsobem kolineaci K^*, která realizuje projektivní deformaci 3. řádu $C^* : L^* \to L'^*$ a provonáme ji s kolineací K_1^*. Zjistíme:

Věta 13. *Korespondence $C : L \to L'$ je singulární projektivní deformací 3. řádu, právě když indukovaná korespondence $c_1^* : S_1^* \to S_1'^*$ je singulární projektivní deformací 3. řádu.*

Analogické tvrzení platí též o korespondencích C a c^*_{-1}, takže máme:

Věta 14. *Korespondence* $c_1^* : S_1^* \to S_1'^*$ *je singulární projektivní deformací, právě když* $c^*_{-1} : S^*_{-1} \to S'^*_{-1}$ *je singulární projektivní deformací 3. řádu.*

Aplikováním této věty na celou posloupnost c_i^* $(i = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ a užitím vět 13 a 9 obdržíme:

Věta 15. *Nechť* $C : L \to L'$ *je singulární projektivní deformace 3. řádu. Pak všechny indukované korespondence* $C_i : L_i \to L_i'$ *a* $c_i^* : S_i^* \to S_i^{*\prime}$ $(i = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *jsou singulárními projektivními deformacemi 3. řádu.*

Literatura

[1] *Švec A.*: Projective differential geometry of line congruences, Prague 1965.

[2] *Beneš J.*: Projective deformation of line congruences in five-dimensional projective spaces. Czech. Math. J., *18* (*93*) 1968, Praha.

[3] *Beneš J.*: Point deformation of 2nd order and projective deformation of 3rd order of congruences in projective spaces of *n* dimensions. Spisy přír. fakulty UJEP, Brno, A *31* (1967), 505—516.

Adresa autora: Brno 16, Klímova 10.

Summary

PROJECTIVE DEFORMATION OF LINE CONGRUENCES IN SIX-DIMENSIONAL PROJECTIVE SPACES

JAKUB BENEŠ, Brno

The contents of this paper consist in study of projective deformation of the third order of line congruences in six-dimensional projective spaces. In the first part of this paper the existence theorem is proved. Latter the projective deformation of the third order is studied in the connection with deformations of associated and dual objects. The last part contains some results on singular projective deformation.