Časopis pro pěstování matematiky

Milan Gera

Nichtoszillatorische und oszillatorische Differentialgleichungen dritter Ordnung

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 96 (1971), No. 3, 278--293

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117727`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

NICHTOSZILLATORISCHE UND OSZILLATORISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DRITTER ORDNUNG

MILAN GERA, Bratislava

(Eingelangt am 14. October 1969)

In dieser Arbeit sind die Bedingungen für die Nichtoszillationsfähigkeit und für die Oszillationsfähigkeit der linearen homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung abgeleitet.

Begriffe und Bezeichnungen. Wir sagen, dass die Differentialgleichung n-ter Ordnung im Intervall J *nichtoszillatorisch* ist, wenn jede ihre nichttriviale Lösung in demselben Intervall höchstens $n - 1$ Nullstellen, die Vielfachheit inbegriffen, hat. Im entgegengesetzten Falle sagen wir, dass sie im Intervall J *oszillatorisch* ist.

Die Menge der Funktionen, welche im Intervall J n stetige Ableitungen haben, bezeichnen wir $C^n(J)$.

Erwägen wir die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung

$$(1)\qquad L[y] \equiv y''' + p_1(x)\, y'' + p_2(x)\, y' + p_3(x)\, y = 0\,,$$

wo $p_i(x) \in C(\mathscr{I})$, $i = 1, 2, 3$; $\mathscr{I} = \langle x_0, b)$ bzw. $(a, x_0\rangle$, $-\infty \leqq a < x_0 < b \leqq \infty$.

Unter der zur linearen Differentialgleichung $L[y] = 0$ adjungierten Differentialgleichung verstehen wir die Differentialgleichung

$$(2)\qquad L^*[z] \equiv ((z' - p_1(x)\, z)' + p_2(x)\, z)' - p_3(x)\, z = 0\,.$$

Diese Differentialgleichung kann auf das folgende System von Differentialgleichungen überführt werden

$$\begin{aligned} z' &= p_1(x)\, z + u\,,\\ u' &= -p_2(x)\, z + v\,,\\ v' &= p_3(x)\, z\,. \end{aligned}$$

Es ist bekannt [1], dass unter den gegebenen Voraussetzungen über die Funktionen $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ dieses Differentialsystem genau eine Lösung im Intervall $\mathscr{I}$ hat, welche in der Zahl x_0 die gegebenen Anfangsbedingungen

$$z(x_0) = z_0\,,\quad u(x_0) = u_0\,,\quad v(x_0) = v_0$$

erfüllt.

Daraus folgt, dass die Differentialgleichung $L^*[z] = 0$ genau eine Lösung $z(x) \in C^1(\mathscr{I})$ hat, welche den gegebenen Anfangsbedingungen

$$z(x_0) = z_0\,,\quad z'(x_0) = z'_0\,,\quad (z' - p_1(x)\,z)'_{x=x_0} = z''_0$$

entspricht (siehe auch [2]).

Es sei $z(x)$ eine nichttriviale Lösung der Differentialgleichung $L^*[z] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$, für jede Funktion $y(x) \in C^3(\mathscr{I})$ auf diesem Intervall gilt dann

$$z\,L[y] \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(y, z)\,,$$

wo

$$F(y, z) \equiv zy'' + (p_1(x)\,z - z')\,y' + [p_2(x)\,z + (z' - p_1(x)\,z)']\,y\,.$$

Weiter bezeichnen wir:

$$\begin{aligned} l[y] &\equiv y''' + p_1(x)\,y'' + p_2(x)\,y'\,,\\ l^*[z] &\equiv ((z' - p_1(x)\,z)' + p_2(x)\,z)'\,; \end{aligned}$$

$C^3_*(J)$ – die Menge der Funktionen $f(x) \in C^1(J)$ für welche $L^*[f] \in C(J)$ ist; $I = \mathscr{I} - \{x_0\}$.

BEDINGUNGEN FÜR DIE NICHT-OSZILLATIONSFÄHIGKEIT

1. Zuerst führen wir Hilfssätze an, die wir weiterhin benötigen werden.

Lemma 1. [3]. *Es seien $g_1(x)$, $g_2(x)$ stetige Funktionen im offenen Intervall I und sie sollen in diesem Intervall keine gemeinsame Nullstelle haben. Wenn jede nichttriviale lineare Kombination der Funktionen $g_1(x), g_2(x)$ im Intervall I höchstens eine und zwar eine einfache Nullstelle hat, dann existiert unter diesen linearen Kombinationen eine solche, welche in I keine Nullstelle hat.*

Lemma 2. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass die Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$l_1[y] \equiv y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0 \tag{3}$$

mit den stetigen Koeffizienten $p(x)$, $q(x)$ im Intervall I nichtoszillatorisch im Intervall I sei, ist die Existenz der Funktion $u(x) \in C^2(I)$ mit der Eigenschaft $u(x) > 0$, $l_1[u] \leqq 0$ für $x \in I$.

Beweis. Notwendige Bedingung. Die Differentialgleichung $l_1[y] = 0$ sei im Intervall I nichtoszillatorisch. Das heisst, dass eine beliebige, nichttriviale lineare Kombination ihres Fundamentalsystems von Lösungen im Intervall I höchstens eine und zwar eine einfache Nullstelle hat. Gemäss Lemma 1 existiert deshalb unter diesen linearen Kombinationen eine solche, welche für $x \in I$ keine Nullstelle hat. Bezeichnen wir sie $y_0(x)$. Dann ist leicht zu sehen, dass die Funktion $u(x) = |y_0(x)|$ die verlangten Eigenschaften hat.

Hinreichende Bedingung. Es sei $u(x) \in C^2(I)$ mit der Eigenschaft $u(x) > 0$, $l_1[u] \leqq 0$ für $x \in I$. Setzen wir $y(x) = u(x)\, Y(x)$. Wenn $y(x)$ die Lösung der Gleichung (3) ist, dann ist $Y(x)$ die Lösung der Differentialgleichung

$$Y''u + (2u' + p(x)\, u)\, Y' + l_1[u]\, Y = 0\,, \quad x \in I\,. \tag{4}$$

Da $u^{-1}\, l_1[u] \leqq 0$ in I, ist die Differentialgleichung (4) nichtoszillatorisch im Intervall I [4]. Von dem Zusammenhang zwischen den Lösungen der Differentialgleichungen (3), (4) folgt, dass auch die Differentialgleichung (3) im Intervall I nichtoszillatorisch ist.

Damit ist das Lemma bewiesen.

In der Differentialgleichung

$$l_2[z] \equiv (z' - P(x)\, z)' + Q(x)\, z' + R(x)\, z = 0 \tag{5}$$

seien $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ stetige Funktionen im Intervall I. $C^2_*(I)$ bedeute eine solche Menge von Funktionen $f(x) \in C^1(I)$, dass $l_2[f] \in C(I)$. Durch die Substitution $z(x) = v(x) \exp \int_c^x P(\eta)\, d\eta$, wo c eine Zahl aus I ist, geht die Differentialgleichung $l_2[z] = 0$ in die Differentialgleichung

$$v'' + (P(x) + Q(x))\, v' + (R(x) + P(x)\, Q(x))\, v = 0$$

über, d. h. in eine Differentialgleichung der Form (3). Auf Grund dieser Tatsache können wir das Lemma 2 für die Differentialgleichung $l_2[z] = 0$ folgenderweise formulieren:

Lemma 2'. *Eine notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass die Differentialgleichung $l_2[z] = 0$ im Intervall I nichtoszillatorisch sei, ist, dass eine Funktion $u^*(x) \in C^2_*(I)$ mit der Eigenschaft $u^*(x) > 0$, $l_2[u^*] \leqq 0$ für $x \in I$ existiert.*

Bemerkung 1. Die Differentialgleichung der Form (2) betrachten wir neben den Differentialgleichungen der Form (1) als Differentialgleichung dritter Ordnung und die Differentialgleichungen der Form (5) neben den Differentialgleichungen der Form (3) als Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Bemerkung 2. Wenn die Funktionen $p(x)$, $q(x)$ bzw. $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ im Intervall $\mathscr{I}$ stetig sind, dann folgt aus der Nichtoszillationsfähigkeit der Differentialgleichung $l_1[y] = 0$ bzw. $l_2[z] = 0$ im Intervall I auch deren Nichtoszillationsfähigkeit im Intervall $\mathscr{I}$.

Lemma 3. *Die Differentialgleichung $L[y] = 0$ ist im Intervall $\mathscr{I}$ dann und nur dann nichtoszillatorisch, wenn eine solche Lösung $\bar{z}(x)$ der Differentialgleichung $L^*[z] = 0$ mit der Eigenschaft $\bar{z}(x) > 0$ für $x \in I$ existiert, dass die Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$F(y, \bar{z}) = 0$$

im Intervall I nichtoszillatorisch ist.

Folgerung 1. *Die Differentialgleichung $L[y] = 0$ ist im Intervall $\mathscr{I}$ dann und nur dann nichtoszillatorisch, wenn sie im Intervall I nichtoszillatorisch ist.*

Folgerung 2. *Die Differentialgleichung $L[y] = 0$ ist im Intervall $\mathscr{I}$ dann und nur dann nichtoszillatorisch, wenn die Lösung $\bar{y}(x)$ der Differentialgleichung $L[y] = 0$ und die Lösung $\bar{z}(x)$ der Differentialgleichung $L^*[z] = 0$ mit der Eigenschaft $[F(\bar{y}, \bar{z})]_{x=x_0} \leqq 0$, $\bar{y}(x) > 0$, $\bar{z}(x) > 0$ für $x \in \mathscr{I}$ existiert.*

Folgerung 3. *Die Differentialgleichung $L[y] = 0$ ist im Intervall $\mathscr{I}$ dann und nur dann nichtoszillatorisch, wenn die Differentialgleichung $L^*[z] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch ist.*

Das Lemma 3 und dessen Folgerungen sind in der Arbeit [3] (Satz 1 und seine Folgerungen) bewiesen.

Lemma 3'. *Die Differentialgleichung $L[y] = 0$ ist im Intervall $\mathscr{I}$ dann und nur dann nichtoszillatorisch, wenn so eine Lösung $\bar{y}(x)$ der Differentialgleichung $L[y] = 0$ mit der Eigenschaft $\bar{y}(x) > 0$ für $x \in I$ existiert, dass die Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$F(\bar{y}, z) = 0$$

im Intervall I nichtoszillatorisch ist.

Beweis. a) Die Differentialgleichung $L[y] = 0$ sei im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch. Wir zeigen, dass dann eine solche Lösung $\bar{y}(x)$ der Differentialgleichung $L[y] = 0$ mit der Eigenschaft $\bar{y}(x) > 0$ in I existiert, dass die Differentialgleichung $F(\bar{y}, z) = 0$ im Intervall I nichtoszillatorisch ist.

Da die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch ist, ist auch die Differentialgleichung $L^*[z] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch (Folgerung 3 des Lemma 3). Daraus folgt, dass die Lösungen der Differentialgleichungen $L[y] = 0$, $L^*[z] = 0$ mit der Eigenschaft $y_1(x_0) = y_1'(x_0) = 0$, $y_1''(x_0) = 1$; $z_1(x_0) = z_1'(x_0) = 0$, $(z_1' - p_1(x)\, z_1)'_{x=x_0} = 1$ im Intervall I positiv sind. Setzen wir $\bar{y}(x) = y_1(x)$ für $x \in \mathscr{I}$. Aus der Gleichung

$$0 = z_1\, L[\bar{y}] + \bar{y}\, L^*[z_1] \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(\bar{y}, z_1)\,, \quad x \in \mathscr{I}$$

erhalten, wir dann, dass

$$F(\bar{y}, z_1) = \text{Konst.}$$

in $\mathscr{I}$ ist. Da aber $[F(\bar{y}, z_1)]_{x=x_0} = 0$, ist $F(\bar{y}, z_1) = 0$ für jedes $x \in \mathscr{I}$.

Deshalb ist auf Grund des Lemma 2' die Differentialgleichung $F(\bar{y}, z) = 0$ im Intervall I nichtoszillatorisch.

b) Es sei $\bar{y}(x)$ die Lösung der Differentialgleichung $L[y] = 0$ mit der Eigenschaft $\bar{y}(x) > 0$ für $x \in I$ und die Lösung sei so beschaffen, dass die Differentialgleichung $F(\bar{y}, z) = 0$ im Intervall nichtoszillatorisch sei. Wir zeigen, dass dann eine solche Lösung $\bar{z}(x)$ der Differentialgleichung $L^*[z] = 0$ mit der Eigenschaft $\bar{z}(x) > 0$ in I exstiert, dass die Differentialgleichung $F(y, \bar{z}) = 0$ im Intervall I nichtoszillatorisch ist. Auf Grund des Lemma 3 wird damit gezeigt, dass die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch ist.

Mit Rücksicht darauf, dass die Differentialgleichung $F(\bar{y}, z) = 0$ im Intervall I nichtoszillatorisch ist, hat die beliebige, nichttriviale lineare Kombination ihres Fundamentalsystems von Lösungen höchstens eine und zwar eine einfache Nullstelle in I. Gemäss Lemma 1 existiert deshalb unter diesen linearen Kombinationen so eine, welche keine Nullstelle hat. Bezeichnen wir diese mit $\bar{z}(x)$. Dabei können wir offenbar voraussetzen, dass im Intervall I $\bar{z}(x) > 0$ ist.

Da $\bar{y}(x) > 0$, $\bar{z}(x) > 0$ und $F(\bar{y}, \bar{z}) = 0$ im Intervall I, ist die Differentialgleichung $F(y, \bar{z}) = 0$ im Intervall I nichtoszillatorisch (Lemma 2).

Wir zeigen noch, dass $\bar{z}(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung $L^*[z] = 0$ in I ist. Tatsächlich, aus der Gleichung

$$\frac{d}{dx} F(\bar{y}, \bar{z}) = 0$$

und aus der Eigenschaft der Funktionen $\bar{y}(x)$, $\bar{z}(x)$ in I ist ersichtlich, dass $\bar{z}(x) \in C_*^3(I)$ ist. Weiter erhalten wir aus der Identität für die Differentialausdrücke $L[\bar{y}]$, $L^*[\bar{z}]$

$$\bar{z}\, L[\bar{y}] + \bar{y}\, L^*[\bar{z}] \equiv \frac{d}{dx} F(\bar{y}, \bar{z})$$

sowie daraus, dass $L[\bar{y}] = 0$, $F(\bar{y}, \bar{z}) = 0$ für $x \in I$ ist, dass $\bar{z}(x)$ die Lösung der Differentialgleichung $L^*[z] = 0$ in I (sogar in $\mathscr{I}$) ist.

Damit ist das Lemma bewiesen.

Lemma 4. *Es sei $p_{3i}(x) \in C(J)$, $i = 1, 2$. Die Differentialgleichungen*

$$l[y] + p_{31}(x)\, y = 0\,, \quad l[y] + p_{32}(x)\, y = 0$$

seien nichtoszillatorisch im Intervall J und es sei $p_{31}(x) \leqq p_3(x) \leqq p_{32}(x)$ für $x \in J$. Dann ist auch die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall J nichtoszillatorisch ([5], Folgerung 1 des Satzes 2).

2. **Satz 1.** *Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch sei, ist die Existenz solcher Funktionen $w(x)$, $w^*(x)$; $w(x) \in C^3(I)$, $w^*(x) \in C^3_*(I)$ mit den Eigenschaften*

$$w(x) > 0\,, \quad w^*(x) > 0\,; \quad L[w] \leqq 0 \ (\geqq 0)\,, \quad L^*[w^*] \leqq 0 \ (\geqq 0)$$

für $x \in I$, dass die Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$F(y, w^*) = 0\,, \quad F(w, z) = 0$$

im Intervall I nichtoszillatorisch seien.

Beweis. Hinreichende Bedingung. Es sollen die Funktionen $w(x)$, $w^*(x)$; $w(x) \in C^3(I)$, $w^*(x) \in C^3_*(I)$ mit den Eigenschaften

$$w(x) > 0\,, \quad w^*(x) > 0\,; \quad L[w] \leqq 0\,, \quad L^*[w^*] \leqq 0$$

für $x \in I$ derart existieren, dass die Differentialgleichungen $F(y, w^*) = 0$, $F(w, z) = 0$ in I nichtoszillatorisch sind. (Im Falle, dass $L[w] \geqq 0$, $L^*[w^*] \geqq 0$ für $x \in I$ ist, wird der Beweis ähnlich durchgeführt.) Wir zeigen, dass dann die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch ist. Zu diesem Zweck, zeigen wir zuerst, dass die Differentialgleichungen

$$L_1[y] \equiv l[y] - \frac{l[w]}{w}\,y = 0\,, \quad L_2[y] \equiv l[y] + \frac{l^*[w^*]}{w^*}\,y = 0$$

im Intervall I nichtoszillatorisch sind.

Es sei

$$L_2^*[z] \equiv l^*[z] - \frac{l^*[w^*]}{w^*}\,z = 0$$

eine zu der Differentialgleichung $L_2[y] = 0$ adjungierte Differentialgleichung. Da $L_1[w] = 0$, $L_2^*[w^*] = 0$ für $x \in I$ ist und die Differentialgleichungen $F(w, z) = 0$, $F(y, w^*) = 0$ im Intervall I nichtoszillatorisch sind (der Differentialausdruck $F(y, z)$ ist vom Koeffizienten $p(x)$ bei y der gegebenen Differentialgleichung $l[y] + p(x)\,y = 0$ explizit unabhängig), sind die Differentialgleichungen $L_1[y] = 0$, $L_2[y] = 0$ auf Grund des Lemma 3' und des Lemma 3 nichtoszillatorisch im Intervall $\langle x_1, b)$ bzw. $(a, x_1\rangle$ für eine beliebige Zahl $x_1 \in I$ d. h. dass diese auch im Intervall I nichtoszillatorisch sind. Da $L[w] \leqq 0$, $L^*[w^*] \leqq 0$ in I gilt, haben wir für den Koeffizient $p_3(x)$ im Intervall I

$$\frac{l^*[w^*]}{w^*} \leqq p_3(x) \leqq -\frac{l[w]}{w}\,.$$

Aus der letzten Ungleichheit und daraus, dass die Differentialgleichungen $L_1[y] = 0$, $L_2[y] = 0$ im Intervall I nichtoszillatorisch sind, ergibt sich gemäss Lemma 4, dass auch die Differentialgleichung $L[y] = 0$ in I nichtoszillatorisch ist. Auf Grund der Folgerung 1 des Lemma 3 ist deshalb die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch.

Die notwendige Bedingung folgt aus Lemma 3 und aus Lemma 3'.

Satz 1'. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch sei, ist die Existenz der Funktionen $w(x)$, $w^*(x)$; $w(x) \in C^3(\mathscr{I})$, $w^*(x) \in C^3_*(\mathscr{I})$ mit den Eigenschaften:*

a) $[F(w, w^*)]_{x=x_0} \leqq 0$, $w(x) > 0$, $w^*(x) > 0$;

b) $(x - x_0) L[w] \leqq 0$, $(x - x_0) L^*[w^*] \leqq 0$

für $x \in I$.

Beweis. Hinreichende Bedingung. Es sollen die Funktionen $w(x)$, $w^*(x)$; $w(x) \in C^3(\mathscr{I})$, $w^*(x) \in C^3_*(\mathscr{I})$ mit den Eigenschaften *a)* und *b)* existieren. Wir zeigen, dass dann die Differentialgleichungen $F(w, z) = 0$, $F(y, w^*) = 0$ im Intervall I nichtoszillatorisch sind. Auf Grund des Satzes 1 wird damit gezeigt sein, dass die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch ist.

Aus der Lagrangeschen Identität

$$\int_{x_0}^{x} \{w^* L[w] + w L^*[w^*]\} \, dt = F(w, w^*) - [F(w, w^*)]_{x=x_0}$$

und aus den Eigenschaften *a)* und *b)* erhalten wir tatsächlich, dass $F(w, w^*) \leqq 0$ für $x \in I$ ist. Daraus erhalten wir auf Grund des Lemma 2 und des Lemma 2', dass die Differentialgleichungen $F(y, w^*) = 0$, $F(w, z) = 0$ im Intervall I nichtoszillatorisch sind.

Die notwendige Bedingung ergibt sich aus der Folgerung 2 des Lemma 3.

Folgerung 1'. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch sei, ist die Existenz der Funktionen $w(x)$, $w^*(x)$; $w(x) \in C^3(\mathscr{I})$, $w^*(x) \in C^3_*(\mathscr{I})$ mit den Eigenschaften:*

a) $w(x_0) = w^*(x_0) = 0$, $w(x) > 0$, $w^*(x) > 0$;

b) $(x - x_0) L[w] \leqq 0$, $(x - x_0) L^*[w^*] \leqq 0$

für $x \in I$.

Bemerkung 3. Wenn $p_2'(x)$, $p_1''(x)$ stetige Funktionen im Intervall $\mathscr{I}$ sind, dann erhalten wir aus der Folgerung 1' den in der Arbeit [6] bewiesenen Satz 6.

Folgerung 2'. *Es sei $(x - x_0) p_3(x) \leqq 0$ für $x \in \mathscr{I}$ und es existiere die Funktion $w^*(x) \in C^*_3(\mathscr{I})$ mit der Eigenschaft $[(w^{*\prime} - p_1(x) w^*)' + p_2(x) w^*]_{x=x_0} \leqq 0$, $w^*(x) > 0$, $(x - x_0) L^*[w^*] \leqq 0$ für $x \in I$. Dann ist die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch.*

Beweis. Setzen wir $w(x) = 1$. Wir haben dann

$$(x - x_0)\, L[w] = (x - x_0)\, p_3(x)\,,$$
$$[F(w, w^*)]_{x=x_0} = [(w^{*\prime} - p_1(x)\, w^*)' + p_2(x)\, w^*]_{x=x_0}\,.$$

Daraus und aus den gegebenen Voraussetzungen ist ersichtlich, dass die Voraussetzungen des Satzes 1′ erfüllt sind und also die Differentialgleichung $L[y] = 0$ ist unter den gegebenen Voraussetzungen im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch.

Wir beachten noch die folgende Umstände: die Funktion $w^*(x) \in C^3_*(\mathscr{I})$ mit der in der Folgerung 2′ erwähnten Eigenschaft existiert und dabei ist $(x - x_0)\, p_3(x) \leqq 0$ in $\mathscr{I}$.

Mit Rücksicht darauf, dass $(x - x_0)\, L^*[w^*] \leqq 0$ für $x \in I$ ist, erhalten wir durch Integration des Differentialausdruckes $L^*[w^*]$ von x_0 bis x, nach gegebener Berichtigung

$$(w^{*\prime} - p_1(x)\, w^*)' + p_2(x)\, w^* \leqq$$
$$\leqq [(w^{*\prime} - p_1(x)\, w^*)' + p_2(x)\, w^*]_{x=x_0} + \int_{x_0}^{x} p_3(t)\, w^*(t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Aus dieser Ungleichheit und aus den Voraussetzungen über die Funktionen $w^*(x)$ und $p_3(x)$ haben wir dann

$$(w^{*\prime} - p_1(x)\, w^*)' + p_2(x)\, w^* \leqq 0$$

für $x \in I$. Gemäss Lemma 2′ ist deshalb die Differentialgleichung

$$(z' - p_1(x)\, z)' + p_2(x)\, z = 0 \tag{6}$$

nichtoszillatorisch im Intervall I. Da $p_i(x) \in C(\mathscr{I})$, $i = 1, 2$, ist diese Differentialgleichung auch im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch. Die Differentialgleichung (6) geht durch die Substitution $z = v \exp \int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\, \mathrm{d}\eta$ in die Differentialgleichung

$$v'' + p_1(x)\, v' + p_2(x)\, v = 0 \tag{6′}$$

über. Damit erhielten wir dieses Ergebnis:

Es sei $(x - x_0)\, p_3(x) \leqq 0$ für $x \in \mathscr{I}$. Dann ist die notwendige Bedingung dazu, dass die Funktion $w^*(x) \in C^3_*(\mathscr{I})$ mit der Eigenschaft $[(w^{*\prime} - p_1(x)\, w^*)' + p_2(x)\, w^*]_{x=x_0} \leqq 0$, $w^*(x) > 0$, $(x - x_0)\, L^*[w^*] \leqq 0$ für $x \in I$ existiere, die Nichtoszillationsfähigkeit der Differentialgleichung (6) bzw. (6′) im Intervall $\mathscr{I}$.

Folgerung 3′. *Es seien $p_1(x)$, $p_2'(x)$, $p_3(x)$ stetige Funktionen im Intervall $\mathscr{I}$. Es sei $(x - x_0)\,[p_3(x) - p_2'(x) - p_1(x)\, p_2(x)] \geqq 0$ für $x \in \mathscr{I}$ und es existiere die Funktion $w(x) \in C^3(\mathscr{I})$ mit der Eigenschaft*

$$(w'' + p_2(x)\, w)_{x=x_0} \leqq 0\,, \quad w(x) > 0\,, \quad (x - x_0)\, L[w] \leqq 0$$

für $x \in I$. Dann ist die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch.

Beweis. Setzen wir $w^*(x) = \exp \int_{x_0}^x p_1(\eta)\, d\eta$. Dann ist

$$(x - x_0)\, L^*[w^*] = (x - x_0)\, [p_2'(x) + p_1(x)\, p_2(x) - p_3(x)]\,,$$
$$[F(w, w^*)]_{x=x_0} = (w'' + p_2(x)\, w)_{x=x_0}\,.$$

Aus diesen Beziehungen und aus den Voraussetzungen der Folgerung ist ersichtlich, dass die Voraussetzungen des Satzes 1′ erfüllt sind. Aus diesem Grunde ist die Differentialgleichung $L[y] = 0$ unter den gegebenen Voraussetzungen im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch.

Jetzt beachten wir die Umstände: die Funktion $w(x) \in C^3(\mathscr{I})$ mit der in der Folgerung 3′ erwähnten Eigenschaft existiert und dabei ist $(x - x_0)\, [p_3(x) - p_2'(x) - - p_1(x)\, p_2(x)] \geqq 0$ für $x \in \mathscr{I}$.

Es seien $p_1(x)$, $p_2'(x)$, $p_3(x)$ stetige Funktionen in $\mathscr{I}$. Dann gilt

$$\exp\left(\int_{x_0}^x p_1(\eta)\, d\eta\right) L[w] = \left[(w'' + p_2(x)\, w) \exp\left(\int_{x_0}^x p_1(\eta)\, d\eta\right)\right]' +$$
$$+ (p_3(x) - p_2'(x) - p_1(x)\, p_2(x))\, w \exp\left(\int_{x_0}^x p_1(\eta)\, d\eta\right).$$

Da $(x - x_0)\, L[w] \leqq 0$ für $x \in I$ ist, erhalten wir aus der letzten Gleichheit durch Integration von x_0 bis x nach gegebener Berichtung

$$w'' + p_2(x)\, w \leqq \exp\left(-\int_{x_0}^x p_1(\eta)\, d\eta\right)\left\{(w'' + p_2(x)\, w)_{x=x_0} +\right.$$
$$\left. + \int_{x_0}^x [p_2'(t) + p_1(t)\, p_2(t) - p_3(t)] \exp\left(\int_{x_0}^t p_1(\eta)\, d\eta\right) w(t)\, dt\right\}.$$

Aus dieser Ungleichheit und mit Rücksicht auf die Eigenschaft der Funktionen $w(x)$ und $p_3(x) - p_1(x)\, p_2(x) - p_2'(x)$ erhalten wir:

$$w'' + p_2(x)\, w \leqq 0$$

für $x \in I$. Auf Grund des Lemma 2 ist deshalb die Differentialgleichung

$$(6'') \qquad y'' + p_2(x)\, y = 0$$

im Intervall I nichtoszillatorisch. Da $p_2(x) \in C(\mathscr{I})$, ist diese Differentialgleichung auch im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch. Damit haben wir gezeigt:

Es seien $p_1(x)$, $p_2'(x)$, $p_3(x)$ stetige Funktionen im Intervall $\mathscr{I}$ und es sei $(x - x_0)$. . $[p_3(x) - p_2'(x) - p_1(x)\, p_2(x)] \geqq 0$ für $x \in \mathscr{I}$. Dann ist die notwendige Bedingung *dazu, dass die Funktion* $w(x) \in C^3(\mathscr{I})$ *mit der Eigenschaft* $(w'' + p_2(x)\, w)_{x=x_0} \leqq 0$ $w(x) > 0$, $(x - x_0)\, L[w] \leqq 0$ *für* $x \in I$ *existiere, die Nichtoszillationsfähigkeit der Differentialgleichung* (6″) *im Intervall* $\mathscr{I}$.

Satz 2. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass die Differentialgleichung* $L[y] = 0$ *im Intervall* $\mathscr{I}$ *nichtoszillatorisch sei, ist die Existenz solcher Funktionen* $w_1(x)$, $w_2(x)$ *aus der Menge* $C^3(I)$ *mit den Eigenschaften*

$$w_1(x) > 0\,, \quad w_2(x) > 0\,; \quad L[w_1] \leqq 0\,, \quad L[w_2] \geqq 0$$

für $x \in I$, *dass die Differentialgleichungen zweiter Ordnung*

$$F(w_1, z) = 0\,, \quad F(w_2, z) = 0$$

im Intervall I nichtoszillatorisch seien.

Beweis. Erster Beweis der hinreichenden Bedingung. Es sollen die Funktionen $w_1(x)$, $w_2(x)$ aus der Menge $C^3(I)$ mit den gegebenen Eigenschaften existieren. Wir zeigen, dass dann eine solche Funktion $w_1^*(x) \in C_*^3(I)$ mit der Eigenschaft $w_1^*(x) > 0$, $L^*[w_1^*] \leqq 0$ für $x \in I$ existiert, dass die Differentialgleichung $F(y, w_1^*) = 0$ im Intervall I nichtoszillatorisch ist. Auf Grund des Satzes 1 zeigen wir damit, dass die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch ist.

Mit Rücksicht darauf, dass die Differentialgleichung $F(w_2, z) = 0$ im Intervall I nichtoszillatorisch ist, hat die beliebige, nichttriviale, lineare Kombination ihres Fundamentalsystems von Lösungen höchstens eine und zwar einfache Nullstelle in I. Auf Grund des Lemma 1 existiert deshalb unter diesen linearen Kombinationen eine solche, welche in I keine Nullstelle hat. Bezeichnen wir sie $w_1^*(x)$. Dabei können wir selbstverständlich voraussetzen, dass $w_1^*(x) > 0$ für $x \in I$ ist. Da $w_2(x) > 0$, $w_1^*(x) > 0$ für $x \in I$ und $F(w_2, w_1^*) = 0$ in I, ist die Differentialgleichung $F(y, w_1^*) = 0$ nichtoszillatorisch im Intervall I (Lemma 2). Wir zeigen noch, dass $w_1^*(x) \in C_*^3(I)$ und $L^*[w_1^*] \leqq 0$ für $x \in I$ ist.

Tatsächlich, aus der Gleichheit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(w_2, w_1^*) = 0$$

und aus den Eigenschaften der Funktionen $w_2(x)$, $w_1^*(x)$ in I ist ersichtlich, dass $w_1^*(x) \in C_*^3(I)$. Weiter, aus der Identität für die Differentialausdrücke $L[w_2]$, $L^*[w_1^*]$

$$w_1^*\, L[w_2] + w_2\, L^*[w_1^*] \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(w_2, w_1^*)$$

und daraus, dass $F(w_2, w_1^*) = 0$, $L[w_2] \geqq 0$ für $x \in I$ ist, erhalten wir

$$L^*[w_1^*] = -\frac{w_1^*}{w_2}\, L[w_2] \leqq 0, \quad x \in I\,.$$

Zweiter Beweis der hinreichenden Bedingung. Um zu beweisen, dass die Differentialgleichung $L[y] = 0$ unter den gegebenen Voraussetzungen in $\mathcal{I}$ nichtoszillatorisch ist, genügt es zu zeigen, dass die Differentialgleichungen

$$\mathscr{L}_i[y] \equiv l[y] - \frac{l[w_i]}{w_i} y = 0\,, \quad (i = 1, 2)$$

in I nichtoszillatorisch sind.

Tatsächlich, die Differentialgleichungen $\mathscr{L}_1[y] = 0$, $\mathscr{L}_2[y] = 0$ seien nichtoszillatorisch in I. Mit Rücksicht darauf, dass $w_1(x) > 0$, $w_2(x) > 0$; $L[w_1] \leqq 0$, $L[w_2] \geqq 0$ im Intervall I, ist

$$-\frac{l[w_2]}{w_2} \leqq p_3(x) \leqq -\frac{l[w_1]}{w_1}$$

für $x \in I$. Aus dieser Ungleichheit und aus der Nichtoszillationsfähigkeit der Differentialgleichungen $\mathscr{L}_1[y] = 0$, $\mathscr{L}_2[y] = 0$ in I folgt, dass die Differentialgleichung $L[y] = 0$ auch in I nichtoszillatorisch ist (Lemma 4).

Auf Grund der Folgerung 1 des Lemma 3 ist dann die Differentialgleichung $L[y] = 0$ auch in $\mathcal{I}$ nichtoszillatorisch.

Wir zeigen jetzt, dass die Differentialgleichungen $\mathscr{L}_1[y] = 0$, $\mathscr{L}_2[y] = 0$ in I nichtoszillatorisch sind. Da $\mathscr{L}_i[w_i] = 0$, $w_i(x) > 0$ für $x \in I$ und die Differentialgleichungen $F(w_i, z) = 0$, $(i = 1, 2)$ im Intervall I nichtoszillatorisch sind, gemäss Lemma 3' sind die Differentialgleichungen $\mathscr{L}_1[y] = 0$, $\mathscr{L}_2[y] = 0$ nichtoszillatorisch im Intervall $\langle x_1, b)$ bzw. $(a, x_1\rangle$ für eine beliebige Zahl $x_1 \in I$. Das bedeutet aber, dass die Differentialgleichungen $\mathscr{L}_1[y] = 0$, $\mathscr{L}_2[y] = 0$ auch im Intervall I nichtoszillatorisch sind.

Die notwendige Bedingung folgt ersichtlich aus dem Lemma 3'.

Damit ist der Beweis beendet.

Folgerung 1. *Es sollen die Funktionen $w_1(x)$, $w_2(x)$ aus der Menge $C^3(I)$ mit den Eigenschaften:*

(a) $$w_1(x) > 0\,, \quad w_2(x) > 0\,, \quad \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} > 0\,;$$

(b) $$L[w_1] \geqq 0\,, \quad L[w_2] \leqq 0$$

für $x \in I$ existieren. Dann ist die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathcal{I}$ nichtoszillatorisch.

Beweis. Wir zeigen, dass aus den Eigenschaften (a) und (b) die Nichtoszillationsfähigkeit der Differentialgleichungen $F(w_1, z) = 0$, $F(w_2, z) = 0$ folgt. Auf Grund des Satzes 2 wird damit gezeigt sein, dass die Differentialgleichung $L[y] = 0$ in $\mathcal{I}$ nichtoszillatorisch ist.

Setzen wir

$$w_{1,2} = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} \exp\left(\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right).$$

Dann haben wir

$$F(w_i, w_{1,2}) = w_i(w_1\,L[w_2] - w_2\,L[w_1]) \exp\left(\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right) \leqq 0 \quad (i = 1, 2)$$

für $x \in I$. Nach dem Lemma 2′ sind deshalb die Differentialgleichungen $F(w_1, z) = 0$, $F(w_2, z) = 0$ nichtoszillatorisch in I. Damit ist der Beweis beendet.

Folgerung 1′. *Es existiere die Funktion $w(x) \in C^3(I)$ mit der Eigenschaft $w(x) > 0$, $w'(x) > 0\,(<0)$, $L[w] \leqq 0\,(\geqq 0)$ in I und dabei sei $p_3(x) \geqq 0\,(\leqq 0)$ für $x \in \mathscr{I}$. Dann ist die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch.*

Beweis. Setzen wir $w_2(x) = 1$, $w_1(x) = w(x)$ für $x \in I$. Dann haben wir

$$L[w_2] = p_3(x) \geqq 0 \;(\leqq 0), \quad L[w_1] \leqq 0 \;(\geqq 0)$$

$$\begin{vmatrix} w_2 & w_1 \\ w_2' & w_1' \end{vmatrix} = w_1'(x) > 0 \quad \left(\begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ w_1' & w_2' \end{vmatrix} = -w_1'(x) > 0\right)$$

für $x \in I$. Auf Grund der Folgerung 1 des Satzes 2 ist deshalb die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch.

Beachten wir diese Tatsache: die Funktion $w(x) \in C^3(I)$ mit der Eigenschaft $w(x) > 0$, $w'(x) > 0\,(<0)$, $L[w] \leqq 0\,(\geqq 0)$ in I existiert und dabei ist $p_3(x) \geqq 0\,(\leqq 0)$ für $x \in \mathscr{I}$.

Daraus, dass $L[w] \leqq 0\,(\geqq 0)$, $w'(x) > 0\,(<0)$ und $p_3(x) \geqq 0\,(\leqq 0)$ in I ist, folgt:

$$(w''' + p_1(x)\,w'' + p_2(x)\,w')\operatorname{sgn} w' \leqq -p_3(x)\,w \operatorname{sgn} w' \leqq 0$$

für $x \in I$. Daraus erhalten wir gemäss Lemma 2, dass die Differentialgleichung (6′) in I nichtoszillatorisch ist. Da $p_i(x) \in C(\mathscr{I})$, $i = 1, 2$, ist die Differentialgleichung (6′) auch in $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch.

Wir erhielten dieses Ergebniss:

Es sei $p_3(x) \geqq 0\,(\leqq 0)$ für $x \in \mathscr{I}$. Die notwendige Bedingung für die Existenz der Funktion $w(x) \in C^3(I)$ mit der Eigenschaft $w(x) > 0$, $w'(x) > 0\,(<0)$, $L[w] \leqq 0\,(\geqq 0)$ für $x \in I$ ist, dass die Differentialgleichung (6′) im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch sei.

Bemerkung 4. Das Funktionenpaar $w_1(x)$, $w_2(x)$ aus der Menge $C^3(I)$ mit der Eigenschaft (a) aus der Folgerung 1 des Satzes 2 ist vom Koeffizienten der Differentialgleichung $L[y] = 0$ unabhängig und daher kann es schon vorher konstruiert werden. Solche Paare sind zum Beispiel: e^{-x}, e^x; 1, e^x; e^{-x}, 1; 1, $|x - x_0|$ für $x \in I$ usw. Wenn wir für derartige konkrete Funktionenpaare $w_1(x)$, $w_2(x)$ auch die Erfüllung der Eigenschaft (b) aus der Folgerung 1 des Satzes 2 verlangen, erhalten wir konkrete Kriterien der Nichtoszillationsfähigkeit für die Differentialgleichung $L[y] = 0$. Wenn wir zum Beispiel das Funktionenpaar e^{-x}, e^x nehmen und verlangen, dass für dieses auch die Eigenschaft (b) erfüllt sei, erhalten wir folgendes Kriterium der Nichtoszillationsfähigkeit für die Differentialgleichung $L[y] = 0$ in $\mathscr{I}$:

Es sei

$$1 + p_2(x) + |p_1(x) + p_3(x)| \leqq 0$$

für $x \in \mathscr{I}$. Dann ist die Differentialgleichung $L[y] = 0$ nichtoszillatorisch im Intervall $\mathscr{I}$.

Ähnlich, wenn wir das Funktionenpaar 1, $|x - x_0|$ für $x \in I$, nehmen, erhalten wir:

Es sei

$$0 \leqq (x - x_0)\, p_3(x) \leqq -p_2(x)$$

für $x \in \mathscr{I}$. Dann ist die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch. (Wir sehen, dass in diesem Falle der Koeffizient $p_1(x)$, auf die Nichtoszillationsfähigkeit der Differentiagleichung $L[y] = 0$ keinen Einfluss hat.)

Satz 2′. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch sei, ist die Existenz solcher Funktionen $w_1^*(x)$, $w_2^*(x)$ aus der Menge $C_*^3(I)$ mit den Eigenschaften*

$$w_1^*(x) > 0\,, \quad w_2^*(x) > 0\,; \quad L^*[w_1^*] \leqq 0\,, \quad L^*[w_2^*] \geqq 0$$

für $x \in I$, dass die Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$F(y, w_1^*) = 0\,, \quad F(y, w_2^*) = 0$$

im Intervall I nichtoszillatorisch seien.

Folgerung. *Es sollen die Funktionen $w_1^*(x)$, $w_2^*(x)$ aus der Menge $C_*^3(I)$ mit den Eigenschaften:*

1° $w_1^*(x) > 0$, $w_2^*(x) > 0$, $\begin{vmatrix} w_1^* & w_2^* \\ w_1^{*\prime} & w_2^{*\prime} \end{vmatrix} > 0$;

2° $L^*[w_1^*] \geqq 0$, $L^*[w_2^*] \leqq 0$

für $x \in I$ existieren. Dann ist die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\mathscr{I}$ nichtoszillatorisch.

Der Beweis des Satzes 2′ und seiner Folgerung wird ähnlich dem Beweis des Satzes 2 und seiner Folgerung 1 durchgeführt.

Wir führen jetzt eine der Applikationen des Satzes 1 an.

Satz 3. *Es seien* $p_1(x)$, $p'_2(x)$, $p_3(x)$ *stetige Funktionen im Intervall* $(-\infty, \infty)$. *Die Differentialgleichungen zweiter Ordnung*

$$v'' + p_2(x)\, v = 0\,, \tag{7}$$

$$v'' + p_1(x)\, v' + p_2(x)\, v = 0 \tag{7'}$$

seien im Intervall $(-\infty, \infty)$ *nichtoszillatorisch und es sei* $p'_2(x) + p_1(x)\, p_2(x) \leqq \leqq p_3(x) \leqq 0$ *oder* $p'_2(x) + p_1(x)\, p_2(x) \geqq p_3(x) \geqq 0$ *für* $x \in (-\infty, \infty)$. *Dann ist die Differentialgleichung* $L[y] = 0$ *im Intervall* $(-\infty, \infty)$ *nichtoszillatorisch.*

Beweis. Setzen wir $w(x) = 1$, $w^*(x) = \exp \int_c^x p_1(\eta)\, d\eta$, wo c eine beliebige reale Zahl ist. Dann haben wir $L[w] = p_3(x)$, $L^*[w^*] = [p'_2(x) + p_1(x)\, p_2(x) - p_3(x)]\,.$ $.\exp \int_c^x p_1(\eta)\, d\eta$. Aus den gegebenen Voraussetzungen ist ersichtlich, dass $L[w] \leqq 0$, $L^*[w^*] \leqq 0$ bzw. $L[w] \geqq 0$, $L^*[w^*] \geqq 0$ für $x \in (-\infty, \infty)$.

Weiter haben wir

$$\begin{aligned} F(w, z) &= (z' - p_1(x)\, z)' + p_2(x)\, z\,, \\ F(y, w^*) &= (y'' + p_2(x)\, y) \exp \int_c^x p_1(\eta)\, d\eta\,. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung $F(w, z) = 0$ geht durch Substitution $z = v \exp \int_c^x p_1(\eta)\, d\eta$ in die Differentialgleichung (7') über.

Aus dieser Tatsache und aus der Nichtoszillationsfähigkeit der Differentialgleichungen (7), (7') im Intervall $(-\infty, \infty)$ erhalten wir, dass die Differentialgleichungen $F(w, z) = 0$, $F(y, w^*) = 0$ für jede Zahl $\bar{x}_0 \in (-\infty, \infty)$ im Intervall $\langle \bar{x}_0, \infty)$ bzw. $(-\infty, \bar{x}_0\rangle$ nichtoszillatorisch sind. Auf Grund des Satzes 1 ist deshalb die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $\langle \bar{x}_0, \infty)$ bzw. $(-\infty, \bar{x}_0\rangle$ nichtoszillatorisch. Da $\bar{x}_0$ eine beliebige reelle Zahl ist, ist die Differentialgleichung $L[y] = 0$ im Intervall $(-\infty, \infty)$ nichtoszillatorisch.

Damit ist der Satz bewiesen.

Im Falle, dass $p_1(x) \equiv 0$ in $(-\infty, \infty)$ erhalten wir aus Satz 3 das Kriterium der Nichtoszillationsfähigkeit für die Differentialgleichung

$$y''' + p_2(x)\, y' + p_3(x)\, y = 0\,,$$

welches auch von M. Hanan [7] (Satz 5.11) abgeleitet wurde.

BEDINGUNGEN FÜR DIE OSZILLATIONSFÄHIGKEIT

3. Satz 4. *Es existiere eine solche Funktion* $w(x) \in C^3(\mathscr{I})$ *mit der Eigenschaft* $w(x_0) = 0$, $w(x) > 0$, $(x - x_0)\, L[w] \leqq 0$ *für* $x \in I$, *dass die Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$F(w, z) = 0$$

im Intervall I oszillatorisch ist. Dann ist die Differentialgleichung $L[y] = 0$ *oszillatorisch im Intervall* $\mathcal{I}$.

Beweis. Dieser wird indirekt durchgeführt. Setzen wir voraus, dass die Differentialgleichung $L[y] = 0$ in $\mathcal{I}$ nichtoszillatorisch ist. Aus der Folgerung 3 des Lemma 3 geht hervor, dass auch die adjungierte Differentialgleichung $L^*[z] = 0$ in $\mathcal{I}$ nichtoszillatorisch ist. Aus diesem Grunde ist die Lösung $z_1(x)$ der Differentialgleichung $L^*[z] = 0$ mit der Eigenschaft $z_1(x_0) = z_1'(x_0) = 0$, $(z_1' - p_1(x)\,z_1)'_{x=x_0} = 1$ in I positiv. Aus der Lagrangeschen Identität für die Differentialausdrücke $L[w]$ und $L^*[z_1]$ haben wir dann

$$0 \geqq \int_{x_0}^{x} z_1\, L[w]\, dt = F(w, z_1) - [F(w, z_1)]_{x=x_0} \tag{8}$$

für $x \in I$. Da $[F(w, z_1)]_{x=x_0} = 0$ ist, erhalten wir aus der Beziehung (8) $F(w, z_1) \leqq 0$ für $x \in I$. Deshalb ist auf Grund des Lemma 2' die Differentialgleichung $F(w, z) = 0$ in I nichtoszillatorisch, was im Widerspruch mit der Oszillationsfähigkeit der Differentialgleichung $F(w, z) = 0$ in I ist.

Ähnlich beweisen wir den folgenden

Satz 4'. *Es existiere eine solche Funktion* $w^*(x) \in C_*^3(\mathcal{I})$ *mit der Eigenschaft* $w^*(x_0) = 0$, $w^*(x) > 0$, $(x - x_0)\, L^*[w^*] \leqq 0$ *für* $x \in I$, *dass die Differentialgleichung zweiter Ordnung*

$$F(y, w^*) = 0$$

im Intervall I oszillatorisch ist. Dann ist die Differentialgleichung $L[y] = 0$ *im Intervall* $\mathcal{I}$ *oszillatorisch.*

Bemerkung 5. Durch die Substitution $z = v \exp \int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\, d\eta$ geht die Differentialgleichung $L^*[z] = 0$ in die Differentialgleichung der Form

$$\bar{L}^*[v] \equiv \left((v'' + p_1(x)\, v' + p_2(x)\, v) \exp\left(\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\, d\eta\right)\right)' - p_3(x)\, v \exp\left(\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\, d\eta\right) = 0$$

über und der Differentialausdruck $F(y, z) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} p_1(\eta)\, d\eta\right)$ in den Differentialausdruck der Form

$$\bar{F}(y, v) \equiv v y'' - v' y' + (v'' + p_1(x)\, v' + p_2(x)\, v)\, y\,.$$

Deshalb ist es möglich in den betreffenden Sätzen und Hilfssätzen die Differentialausdrücke $L^*[z]$, $F(y, z)$ mit den Differentialausdrücken $\bar{L}^*[v]$, $\bar{F}(y, v)$ und die Menge $C_*^3(J)$ mit einer solchen Menge $\bar{C}_*^3(J) \subset C^2(J)$ zu ersetzen, dass für die Funktion $f(x) \in \bar{C}_*^3(J)$ $\bar{L}^*[f] \in C(J)$ ist.

Bemerkung 6. Nach Beendigung dieser meiner Arbeit erschien ein interessanter Artikel [8] von A. Ju. Lewin über die Nichtoszillationsfähigkeit der Differentialgleichung

$$x^{(n)} + p_1(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)\, x = 0 .$$

Die Folgerung 1 des Satzes 2 der vorliegenden Arbeit geht aus der Folgerung 4.1 des Satzes 4.1 [8] hervor.

Literatur

[1] *Э. А. Коддингтон* и *Н. Левинсон:* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений Москва 1958, перевод из английского.

[2] *М. А. Наймарк:* Линейные дифференциальные операторы, Москва 1954.

[3] *M. Gera:* Allgemeine Bedingungen der Nichtoszillationsfähigkeit und der Oszillationsfähigkeit für die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung $y''' + p_1(x)\, y'' + p_2(x)\, y' + p_3(x)\, y = 0$, Mat. časop. *20* (1970), 49–61.

[4] *Дж. Сансоне:* Обыкновенные дифференциальные уравнения, Том 1, Москва 1953, перевод из итальянского.

[5] *А. Ю. Левин:* Некоторые вопросы осцилляции рещений линейных дифференциальных уравнений, ДАН СССР, № 3, Т. *148* (1963), 512—515.

[6] *Н. В. Азбелев* и *З. Б. Цалюк:* К вопросу о распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка, Матем. сб. *51* (1960), 475—485.

[7] *M. Hanan:* Oscillation criteria for third-order linear differential equations, Pacific J. Math. *11* (1961), 919–944.

[8] *А. Ю. Левин:* Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + p_n(t)\, x = 0$, Успехи матем. наук, *Т. XXIV*, вып. 2 (146) (1969), 43—96.

Anschrift des Verfassers: Bratislava, Šmeralova 2/b (Katedra matematiky PFUK).