Bohdan Zelinka

Grafy, jejichž všechny kostry jsou spolu isomorfní

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 96 (1971), No. 1, 33--40

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117710`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

GRAFY, JEJICHŽ VŠECHNY KOSTRY JSOU SPOLU ISOMORFNÍ

BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Došlo dne 16. května 1969)

Pod pojmem graf se v této práci rozumí konečný neorientovaný souvislý graf bez smyček a vícenásobných hran. Stromem se rozumí konečný souvislý neorientovaný graf bez kružnic, tedy i graf sestávající z jediného isolovaného uzlu.

J. SEDLÁČEK vyslovil hypotézu, kterou zde dokážeme jako větu. Nejprve definujme třídy grafů $\mathfrak{G}_1$ a $\mathfrak{G}_2$.

Budiž $k \geqq 3$ přirozené číslo, T strom, a jeho uzel. Grafem $G(k, T, a)$ nazveme graf sestrojený následujícím způsobem. Vezmeme kružnici K délky k, její uzly buďtež po řadě $u_1, \ldots, u_k$. Dále vezmeme k stromů $T_1, \ldots, T_k$ vesměs isomorfních s T a nechť a_i je uzel stromu T_i odpovídající v příslušném isomorfismu uzlu a stromu T. Ztotožněním uzlu a_i s u_i pro každé i dostáváme graf $G(k, T, a)$. Třídu všech možných grafů $G(k, T, a)$ pro lichá k označíme $\mathfrak{G}_1$.

Nyní definujme graf $G(k, T', a', T'', a'')$. Budiž $k \geqq 4$ sudé přirozené číslo, T', T'' stromy, a' uzel stromu T' a a'' uzel stromu T''. Vezměme kružnici K délky k, její uzly buďtež po řadě $u_1, \ldots, u_k$. Nyní buďtež T_i pro lichá i od 1 do $k - 1$ stromy isomorfní s T' a pro sudá i od 2 do k stromy isomorfní s T''. Pro liché (resp. sudé) i budiž a_i uzel stromu T_i odpovídající ve zmíněném isomorfismu uzlu a' (resp. a'') stromu T' (resp. T''). Ztotožněním uzlů a_i a u_i pro každé i dostáváme graf $G(k, T', a', T'', a'')$. Třídu všech možných grafů $G(k, T', a', T'', a'')$ označíme $\mathfrak{G}_2$.

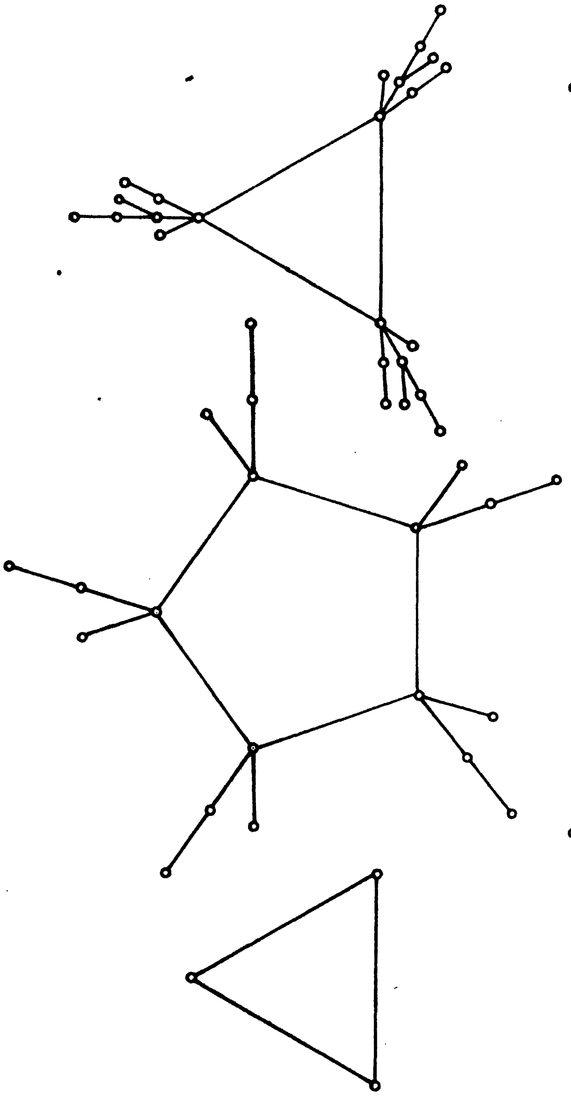
Speciálním případem grafu z $\mathfrak{G}_1$ je kružnice liché délky. Speciálními případy grafů z $\mathfrak{G}_2$ jsou kružnice sudé délky a graf $G(k, T, a)$ pro sudé k. Různé příklady grafů z $\mathfrak{G}_1$ jsou na obr. 1, grafů z $\mathfrak{G}_2$ na obr. 2.

V dalším $d_G(x, y)$ znamená vzdálenost uzlů x a y v grafu G a $U(G)$ znamená množinu uzlů grafu G (pro libovolný graf G).

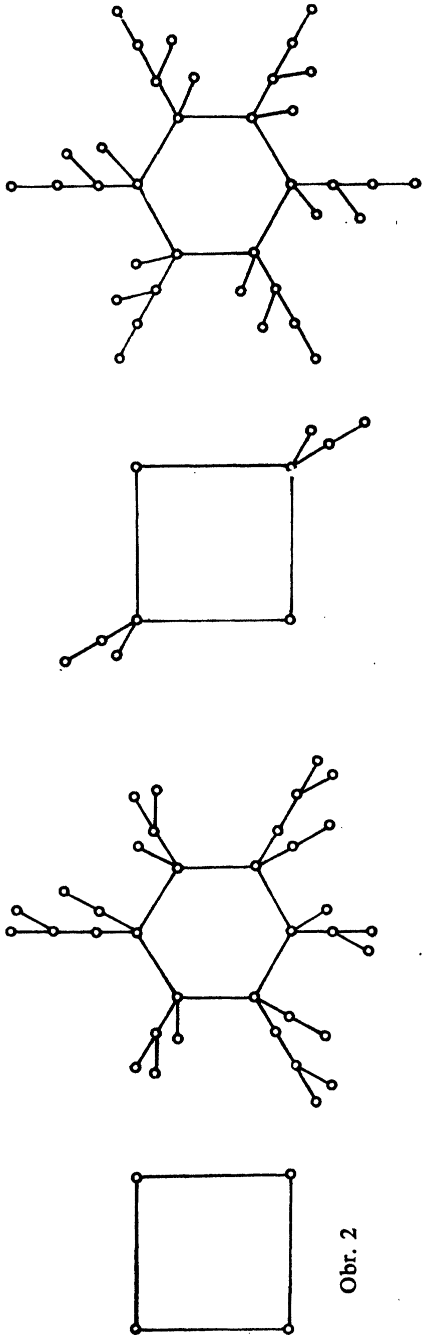
Nyní vyslovíme zmíněnou větu.

Věta. *Budiž G graf, jehož všechny kostry jsou spolu isomorfní. Pak buď G je strom, nebo $G \in \mathfrak{G}_1$, nebo $G \in \mathfrak{G}_2$.*

Zmíněnou vlastnost grafu budeme nazývat vlastnost (KI).



Obr. 1



Obr. 2

V důkazu této věty budeme rozlišovat grafy podle jejich cyklomatických čísel. Cyklomatické číslo v grafu G podle [1] je maximální počet nezávislých kružnic v tomto grafu a lze je vyjádřit vzorcem $v = m - n + p$, kde m je počet hran, n je počet uzlů a p počet komponent grafu. U souvislého grafu je tedy $v = m - n + 1$. Cyklomatické číslo grafu je vždy nezáporné celé číslo a určuje (u souvislých grafů), kolik hran je třeba z grafu odstranit, abychom dostali jeho kostru.

Vezměme nejprve grafy, pro něž $v = 0$. Takovéto grafy jsou právě všechny stromy. Strom má jedinou kostru – sebe sama – a tedy pro něj tvrzení věty platí.

Dále zkoumejme grafy, pro něž $v = 1$. Každý takovýto graf obsahuje právě jednu kružnici. Můžeme tedy každý takovýto graf sestrojit následujícím způsobem. Vezměme kružnici K o k uzlech $u_1, \ldots, u_k$, $k \geqq 3$ a k stromů $T_1, \ldots, T_k$. V každém ze stromů T_i $(i = 1, \ldots, k)$ zvolíme uzel a_i. Pak ztotožníme uzly a_i a u_i pro $i = 1, \ldots, k$.

Nyní dokážeme několik lemmat. Pod označením G rozumíme graf výše popsaný.

Lemma 1. *Nechť G má vlastnost* (KI). *Budiž S_i (resp. S_h) kostra grafu G vzniklá odstraněním hrany $u_i u_{i+1}$ (resp. $u_h u_{h+1}$) pro $1 \leqq i \leqq k$, $1 \leqq h \leqq k$ (indexy se berou modulo k). Budiž $\mathfrak{F}_{hi}$ množina isomorfních zobrazení kostry S_h na kostru S_i. Pro $1 \leqq j \leqq k$, $j \neq h$ existuje nejvýše jedno i tak, že $i \neq j - 1$, $i \neq j$ a uzel u_j je samodružný v zobrazení z $\mathfrak{F}_{hi}$. Přitom je-li u_j samodružný v některém zobrazení z $\mathfrak{F}_{hi}$, uzly u_{j-1}, u_{j+1} v tomto zobrazení samodružné nejsou.*

Důkaz. Uvažujme množinu větví $\mathfrak{B}_i$ (viz [1]) vycházejících z uzlu u_j v kostře S_i. Je-li ϱ stupeň uzlu u_j v grafu G, pak těchto větví je buď $\varrho - 1$ (je-li $i = j - 1$ nebo $i = j$), nebo ϱ. Přitom každá z množin $\mathfrak{B}_i$ obsahuje všechny větve stromu T_j vycházející z $a_j = u_j$, a to v počtu $\varrho - 2$. (Je-li $\varrho = 2$, pak ovšem takové větve neexistují.) Množinu těchto větví označme $\mathfrak{B}$ a budiž $\mathfrak{B}'_i = \mathfrak{B}_i \dot{-} \mathfrak{B}$. Nechť nyní u_j je samodružným uzlem v zobrazení $\varphi \in \mathfrak{F}_{hi}$. Znamená to, že existuje vzájemně jednoznačné přiřazení mezi větvemi z množin $\mathfrak{B}_h$ a $\mathfrak{B}_i$ tak, že odpovídající si větve jsou spolu isomorfní. Totéž platí tedy i o množinách $\mathfrak{B}'_h$ a $\mathfrak{B}'_i$. Předpokládejme $h \neq j - 1$, $h \neq j$. Budiž $\mathfrak{B}'_h = \{B_h^+, B_h^-\}$, kde B_h^+ (resp. B_h^-) je větev z $\mathfrak{B}_h$ obsahující uzel u_{j+1} (resp. u_{j-1}). Podobně definujme $\mathfrak{B}'_i = \{B_i^+, B_i^-\}$. Je tedy buď $B_h^+ \cong B_i^+$ a $B_h^- \cong B_i^-$, nebo $B_h^+ \cong B_i^-$ a $B_h^- \cong B_i^+$. (Symbol $\cong$ označuje isomorfismus dvou grafů.) Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že uzly u_{j+1}, u_i po dvou oddělují uzly u_j, u_h na kružnici K. Znamená to, že B_h^+ vznikne z B_i^+ odstraněním hrany $u_h u_{h+1}$ a případně dalších uzlů a hran a je tedy vlastním podstromem stromu B_i^+. Proto nemůže být $B_h^+ \cong B_i^+$. Je tu tedy pouze možnost $B_h^+ \cong B_i^-$, $B_h^- \cong B_i^+$ a uzly u_{j-1}, u_{j+1} tedy nebudou samodružné ve φ. Předpokládejme nyní, že existují čísla i_1, i_2 taková, že $1 \leqq i_1 \leqq k$, $1 \leqq i_2 \leqq k$, $i_1 \neq j - 1$, $i_1 \neq j$, $i_2 \neq j - 1$, $i_2 \neq j$ a uzel u_j je samodružný v zobrazení $\varphi_1 \in \mathfrak{F}_{hi_1}$ a současně v zobrazení $\varphi_2 \in \mathfrak{F}_{hi_2}$. Označme opět analogicky předešlému $\mathfrak{B}'_{i_1} = \{B_{i_1}^+, B_{i_1}^-\}$, $\mathfrak{B}'_{i_2} = \{B_{i_2}^+, B_{i_2}^-\}$. Máme $B_h^+ \cong B_{i_1}^-$, $B_h^- \cong B_{i_1}^+$, $B_h^+ \cong B_{i_2}^-$, $B_h^- \cong B_{i_2}^+$. Je tedy $B_{i_1}^+ \cong B_{i_2}^+$ a $B_{i_1}^- \cong B_{i_2}^-$, což je možné, jak bylo ukázáno výše, pouze při $i_1 = i_2$.

Lemma 2. *Centrum každé kostry grafu G s vlastností* (KI) *je uzel kružnice K.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že průměr kostry S_i pro některé i je sudé číslo δ a centrum c_i této kostry (které je podle [1] jediné) je uzel stromu T_j různý od u_j. Centrem c_i prochází alespoň jedna diametrální cesta tak, že c_i je rovněž centrem této cesty. Alespoň jeden z koncových uzlů této cesty je rovněž koncovým uzlem stromu T_j, označme jej v. Máme $d(c_i, v) = \frac{1}{2}\delta$, což je poloměr kostry S_i. Budiž nyní $1 \leqq h \leqq k$, $h \neq i$ a vezměme kostru S_h. Protože $S_h \cong S_i$, kostra S_h musí mít tentýž průměr i poloměr jako S_i. Centrum c_h kostry S_h je opět jediné (neboť průměr je opět sudý) a jeho vzdálenost od v nesmí přesahovat $\frac{1}{2}\delta$; tedy je to opět uzel stromu T_j různý od u_j. Existuje-li diametrální cesta kostry S_i, která je celá obsažena v T_j, pak tato cesta je diametrální cestou i v S_h a její centrum c_i je rovněž centrem stromu S_h, a tedy $c_i = c_h$. V opačném případě každá diametrální cesta kostry S_i má jeden koncový uzel v T_j, druhý mimo T_j, tedy prochází uzlem u_j a totéž platí i pro diametrální cesty kostry S_h. Budiž D_i diametrální cesta kostry S_i a D_h diametrální cesta kostry S_h. Budiž v koncový uzel cesty D_i v T_j; koncový uzel cesty D_h ležící v T_j označme w. Cesta D_i obsahuje úsek D'_i z u_j do c_i, cesta D_h obsahuje úsek D'_i z u_j do c_h. Budiž x společný uzel cest D'_i a D'_h takový, že úsek cesty D'_h z x do c_i a úsek D'_h z x do c_h nemají společný uzel kromě x. Zřejmě nyní

$$d(v, w) = d(c_i, v) + d(c_i, x) + d(c_h, x) + d(c_h, w) .$$

Avšak

$$d(c_i, v) = d(c_h, w) = \tfrac{1}{2}\delta ,$$

a protože δ je průměr kostry S_h, musí být

$$d(v, w) \leqq \delta .$$

Je tedy

$$d(c_i, x) = d(c_h, x) = 0$$

a tedy $c_i = c_h = x$. Ale protože společný uzel x mohl být totožný s u_j, je buď u_j centrem obou koster S_i, S_h, nebo je $c_i = c_h \neq u_j$. Tím jsme dokázali při sudém δ, že v případě, kdy centrum některé kostry grafu G je uzlem některého stromu T_j různým od u_j, splývá toto centrum s centry ostatních koster. Při lichém δ lze analogicky dokázat, že v případě, kdy centrální hrana některé kostry grafu G je hranou některého stromu T_j, splývá tato centrální hrana s centrálními hranami ostatních koster. Protože při isomorfním zobrazení stromu na strom se centrum zobrazí opět jako centrum a centrální hrana opět jako centrální hrana, centrum (resp. centrální hrana) každé kostry grafu G je samodružné (resp. samodružná) ve všech isomorfních zobrazeních jedné kostry na druhou. Budiž φ isomorfní zobrazení kostry S_i na kostru S_h. Zřejmě lze zvolit φ tak, že všechny uzly stromu T_j se zobrazí na sebe (neboť všechny větve stromu T_j vycházející z u_j s výjimkou nejvýše dvou jsou společné všem kostrám grafu G). Tedy u_j je uzel samodružný ve všech zobrazeních ze všech $\mathfrak{F}_{ih}$, což je spor s lemmatem 1.

Lemma 3. *Budiž uzel u_i grafu G s vlastností (KI) jediným centrem kostry S_j. Při lichém k platí $j \equiv i + \frac{1}{2}(k - 1) \pmod{k}$ a všechny hrany kružnice K obsažené v S_j patří diametrálním cestám kostry S_j. Při sudém k platí buď $j \equiv i + \frac{1}{2}(k - 2)$ $\pmod{k}$, nebo $j \equiv i + \frac{1}{2}k \pmod{k}$ (přičemž pro obě taková j je u_i centrem kostry S_j) a všechny hrany kružnice K kromě $u_{i+\frac{1}{2}(k-2)}u_{i+\frac{1}{2}k}$ a $u_{i+\frac{1}{2}k}u_{i+\frac{1}{2}(k+2)}$, kde indexy se berou modulo k, patří diametrálním cestám kostry S_j.*

Důkaz. Jestliže některá kostra S_h grafu G obsahuje všechny diametrální cesty kostry S_j, jsou tyto cesty i diametrálními cestami kostry S_h (poněvadž všechny kostry grafu G mají tentýž průměr). Pak také u_i je centrem kostry S_h a tedy je samodružným uzlem v některém zobrazení jedné kostry grafu G na druhou. Proto existuje nejvýše jedno h takové, že S_h obsahuje všechny diametrální cesty kostry S_j. Proto všechny hrany kružnice K s výjimkou u_ju_{j+1} (která se nevyskytuje v S_j) a u_hu_{h+1} patří diametrálním cestám kostry S_j. Jestliže takové h existuje, je zřejmě buď $j = h + 1$, nebo $j = h - 1$ (indexy bereme modulo k). Obě kostry S_j a S_h mají společný podstrom T_i. Budiž φ isomorfní zobrazení S_j na S_h takové, že všechny uzly stromu T_i jsou samodružné ve φ. To lze, protože u_i je samodružný uzel a strom T_i je tvořen větvemi obou koster vycházejícími z uzlu u_i. Zbývají dvě větve B_j^+, B_j^- které nepatří stromu T_i; větev B_j^+ obsahuje uzel u_{i+1}, větev B_j^- obsahuje uzel u_{i-1}. Předpokládejme bez újmy na obecnosti $j = h + 1$. Definujme v S_h obdobně větve B_h^+, B_h^-. Podobně jako v důkazu lemmatu 1 máme $B_h^+ \cong B_j^-$, $B_h^- \cong B_j^+$. Snadno zjistíme, že větev B_j^+ obsahuje jako vlastní podgraf větev B_h^+ a jako další podgraf uzlově disjunktní s B_h^+ obsahuje strom T_j. Podobně větev B_h^- obsahuje jako vlastní podgraf větev B_j^- a jako další podgraf uzlově disjunktní s B_j^- obsahuje rovněž strom T_j. Protože strom T_j k B_h^+ v B_j^+ je připojen hranou u_hu_j a k B_j^- v B_h^- je připojen hranou u_ju_{j+1}, musejí být uzly $u_h = u_{j-1}$ a u_{j+1} stejně vzdáleny od u_i v S_h i v S_j. Tedy

$$j + 1 - i \equiv i - (j - 1) \pmod{k},$$

z toho

$$2j \equiv 2i \pmod{k}.$$

Je-li k liché, je

$$j \equiv i \pmod{k}$$

a tedy $j = i$, což nevyhovuje, proto pro k liché neexistuje žádné výše zmíněné h a všechny hrany kružnice K obsažené v S_j jsou hranami diametrálních cest kostry S_j. Je-li k sudé, pak

$$j \equiv i \pmod{\tfrac{1}{2}k},$$

z toho vyhovující řešení je

$$j \equiv i + \tfrac{1}{2}k \pmod{k},$$

potom

$$h \equiv i + \tfrac{1}{2}(k - 2) \pmod{k}.$$

Lemma 4. *Budiž hrana $u_i u_{i+1}$ grafu G s vlastností* (KI) *centrální hranou kostry S_j. Pak je zřejmě k sudé a platí $j \equiv i + \frac{1}{2}k$* (mod k) *a všechny hrany kružnice K obsažené v S_j patří diametrálním cestám kostry S_j. (Indexy se berou opět modulo k.)*

Důkaz je analogický důkazu lemmatu 3.

Lemma 5. *Budiž δ průměr kostry S_i. Pro každé $j = 1, \ldots, k$ je vzdálenost uzlu u_j od libovolného uzlu x stromu T_j menší než $\frac{1}{2}\delta$ při δ sudém a menší než $\frac{1}{2}(\delta - 1)$ při δ lichém.*

Důkaz. Jak známo, v případě δ sudého je vzdálenost každého uzlu stromu od (jediného) centra tohoto stromu nejvýše $\frac{1}{2}\delta$ (tj. poloměr stromu), v případě δ lichého je vzdálenost každého uzlu od bližšího z obou center nejvýše $\frac{1}{2}(\delta - 1)$. Podle lemmatu 2 centrum kostry S_i je uzel kružnice K. Uzel u_j je ze všech uzlů kružnice K uzlu x (patřícímu do T_j) nejblíže, tedy jeho vzdálenost od x nepřesahuje vzdálenost x od centra kostry S_i.

Důsledek lemmatu 5. *Žádná diametrální cesta kostry S_j grafu G s vlastností* (KI) *neobsahuje uzly stromu T_i různé od u_i, kde u_i je centrum kostry S_j.*

Lemma 6. *Nechť cyklomatické číslo grafu G s vlastností* (KI) *je rovno jedné. Pak pro graf G věta platí.*

Důkaz. Nechť k je liché, δ sudé. (δ je průměr kostry.) Pak ke každému $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ je vzájemně jednoznačně přiřazeno $i \in \{1, \ldots, k\}$ tak, že

$$j \equiv i + \tfrac{1}{2}(k - 1) \pmod{k}$$

a každý uzel kružnice K je (jediným) centrem právě jedné kostry grafu G. Strom T_i je složen ze všech větví kostry $S_{i+\frac{1}{2}(k-1)}$, v uzlu u_i, které neobsahují diametrální cesty. Protože při isomorfním zobrazení $S_{i+\frac{1}{2}(k-1)}$ na $S_{h+\frac{1}{2}(k-1)}$ se zobrazí u_i na u_h, také T_i se zobrazí na T_h. Všechny stromy T_j pro $j \in \{1, \ldots, k\}$ jsou tedy navzájem isomorfní, a to tak, že uzly u_j si vždy odpovídají. Je tedy $G \in \mathfrak{G}_1$.

Budiž nyní k sudé, δ sudé. Budiž u_i centrem některé kostry grafu G.

Podle lemmatu 3 je u_i centrem koster $S_{i+\frac{1}{2}(k-2)}$, $S_{i+\frac{1}{2}k}$. Kdyby byl uzel u_{i+1} centrem některé kostry grafu G, musel by být centrem koster $S_{i+\frac{1}{2}k}$, $S_{i+\frac{1}{2}(k+2)}$, což nelze, protože centrem kostry $S_{i+\frac{1}{2}k}$ je u_i a existuje jediné centrum, neboť δ je sudé. Proto u_{i+1} není centrem žádné kostry, ale u_{i+2} musí být centrem kostry $S_{i+\frac{1}{2}(k+2)}$, a tedy rovněž kostry $S_{i+\frac{1}{2}(k+4)}$. Jdeme-li takto dále, vidíme, že centra koster grafu G jsou právě všechny uzly u_j, kde $j \equiv i$ (mod 2). Tedy také všechny stromy T_j pro $j \equiv i$ (mod 2) jsou isomorfní s T_i, a to tak, že v příslušném isomorfismu uzel u_j odpovídá uzlu u_i. Budiž tedy $j \equiv i$ (mod 2). Při isomorfním zobrazení kostry $S_{j+\frac{1}{2}(k-2)}$ na kostru $S_{j+\frac{1}{2}k}$, v němž je uzel u_j samodružný, se zobrazí (opět podle lemmat 3 a 5) uzel u_{j-1} na u_{j+1} a uzel u_{j+1} na u_{j-1}. Tedy také $T_{j-1} \cong T_{j+1}$ a při příslušném isomorfismu uzlu u_{j-1} odpovídá uzel u_{j+1}. Protože j bylo libovolně zvolené číslo kongruentní s i modulo 2, platí pro libovolné $h \equiv i + 1 \pmod 2$ vztah $T_h \cong T_{i+1}$ a v příslušném isomorfismu uzlu a_{i+1} odpovídá uzel a_h.

V případě δ lichého je důkaz analogický, pouze místo center uvažujeme centrální hrany.

Lemma 7. *Neexistují grafy s vlastností* (KI) *o větším cyklomatickém čísle než jedna.*

Důkaz. Kostru grafu sestrojujeme obvykle tím způsobem, že postupně odstraňujeme hrany patřící kružnicím, a takto postupně, po jednotkách, snižujeme cyklomatické číslo grafu až na nulu. Proto stačí se omezit na grafy o cyklomatickém čísle dvě. Budiž G takovýto graf. Kostry dvou grafů z $\mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2$ jsou spolu isomorfní zřejmě právě tehdy, jsou-li tyto grafy spolu isomorfní. Proto každý graf vzniklý odstraněním jedné hrany patřící kružnici z grafu G musí být isomorfní s určitým grafem G' z $\mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2$. Graf G' obsahuje jedinou kružnici K'; její délka budiž k. Její uzly označíme $u'_1, \ldots, u'_k$; stromy $T'_1, \ldots, T'_k$ buďtež analogické stromům $T_1, \ldots, T_k$ výše definovaným. Budiž $l(G') = \max_{1 \leq i \leq k} \max_{x \in U(T_i')} d(u_i, x)$. Vznikne-li G z grafu G' přidáním hrany spojující dva uzly kružnice v G', pak odstraněním libovolné hrany této kružnice dostaneme z grafu G graf G'' o cyklomatickém čísle rovném jedné, ale s kružnicí délky menší než k. Nechť tedy vznikne G z grafu G' přidáním hrany spojující dva uzly stromů T'_i, T'_j pro $i \neq j$ tak, že alespoň jeden z nich není uzlem kružnice K'. Budiž bez újmy na obecnosti koncový uzel v této hrany ležící v T'_i různý od u'_i. Odstraníme-li hranu incidentní s u'_i ležící na cestě z u'_i do v, dostáváme z G graf G'' s touž kružnicí jako G', avšak obdobně definovaný strom T''_i zřejmě nebude isomorfní se stromy T''_h pro $h \equiv i \pmod 2$. Konečně vznikne-li G z G' přidáním hrany spojující uzly téhož T'_i, pak odstraněním hrany kružnice K' incidentní s u'_i dostaneme graf G'' opět o cyklomatickém čísle rovném jedné, ale zřejmě obdobně definované $l(G'')$ je větší než $l(G')$.

Důkaz věty. Je-li cyklomatické číslo grafu G rovno nule, pak G je strom; má tedy pouze jedinou kostru a věta pro něj platí. Pro grafy o cyklomatickém čísle rovném jedné věta platí podle lemmatu 6. Pro grafy o cyklomatickém čísle větším než jedna platí lemma 7, tedy žádné takovéto grafy s vlastností (KI) neexistují.

Literatura

[1] *O. Ore:* Theory of Graphs. Providence 1962.

Adresa autora: Liberec, Studentská 5 (VŠST).

Summary

THE GRAPHS, ALL OF WHOSE SPANNING TREES ARE ISOMORPHIC TO EACH OTHER

BOHDAN ZELINKA, Liberec

Let $k \geqq 3$ be a positive integer, T a tree, a its vertex. Construct the graph $G(k, T, a)$ in the following manner: Take a circuit K of the length k, let its vertices be $u_1, \ldots, u_k$ in this order. Further take k trees $T_1, \ldots, T_k$ all isomorphic to T and let a_i be the vertex of the tree T_i corresponding in the isomorphism to the vertex a of the tree T. By identifying the vertex a_i with u_i for each i we obtain the graph $G(k, T, a)$. The class of all possible graphs $G(k, T, a)$ for odd numbers k will be denoted by $\mathfrak{G}_1$.

Now let us define the graph $G(k, T', a', T'', a'')$. Let $k \geqq 4$ be an even positive integer, T', T'' trees, a' a vertex of the tree T' and a'' a vertex of the tree T''. Take a circuit K of the length k, let its vertices be $u_1, \ldots, u_k$ in this order. Let T_i for odd i from 1 to $k - 1$ be trees isomorphic with T' and for even i from 2 to k trees isomorphic with T''. For an odd (even) i let a_i be the vertex of the tree T_i corresponding in the mentioned isomorphism to the vertex a' (a'') of the tree T' (T''). By identifying the vertices a_i and u_i for each i we obtain the graph $G(k, T', a', T'', a'')$. The class of all possible graphs $G(k, T', a', T'', a'')$ will be denoted by $\mathfrak{G}_2$.

Now the following theorem is proved.

Theorem. *Let G be a finite graph, all of whose spanning trees are isomorphic to each other. Then either G is a tree, or $G \in \mathfrak{G}_1$, or $G \in \mathfrak{G}_2$.*

This theorem was expressed as a conjecture by J. SEDLÁČEK.