Časopis pro pěstování matematiky

Josef Vala
Über die Torsalsysteme des Kongruenzenpaares

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 96 (1971), No. 1, 18--32

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117709

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

ÜBER DIE TORSALSYSTEME DES KONGRUENZENPAARES

JOSEF VALA, Brno

(Eingelangt am 24. Januar 1969)

Die zweiparametrige Geradenmannigfaltigkeit eines n-dimensionalen projektiven Raumes P_n nennen wir die Geradenkongruenz. Wir werden einige Eigenschaften der Kongruenzen $\Gamma_1(p_1), \Gamma_2(p_2)$ im Raume P_3 $(n = 3)$ betrachten. Ein solches Paar P besitze eine Korrespondenz $C : p_1 \to p_2$, wobei die einander zugeordneten Geraden p_1, p_2 stets demselben Parameterpaar (u, v) entsprechen. Wir werden voraussetzen, daß die Parameterpaare (u, v) alle Werte aus dem Gebiet Δ einnehmen. Für alle Wertepaare $(u, v) \subset \Delta$ seien die einander entsprechenden Geraden beider Kongruenzen windschief.

Die Kleinschen Bilder der Geraden p_1, p_2 bilden zwei Punktmannigfaltigkeiten K_1, K_2 im Kleinschen Raum P_5. Die Koordinaten der erwähnten Kleinschen Bilder der Geraden p_1, p_2 seien Funktionen der Differentialklasse C^1. Die Verbindungsgeraden der sich entsprechenden Punkten von K_1, K_2 bilden eine Geradenkongruenz. Diese Kongruenz nennt man *das Rosenfeldsche Bild des Paares P* (Finikov [1]).

a) Im Raume P_3 betrachten wir ein bewegliches Koordinatentetraeder mit den Eckpunkten A_1, A_2, A_3, A_4, wobei

$$p_1 = (A_1, A_4), \quad p_2 = (A_2, A_3)$$

gilt. Wenn wir mit ω_i^k die Komponenten der differentiellen Verrückung des Tetraeders bezeichnen, dann folgt:

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{d}A_i = \omega_i^k A_k \; ; \quad i, k = 1, 2, 3, 4 \, .$$

Mit Hilfe der Gleichungen (1) bekommen wir leicht folgende Relationen:

$$\text{(2a)} \qquad \mathrm{d}(A_1, A_4) = \omega_4^2(A_1, A_2) + \omega_4^3(A_1, A_3) + [\omega_1^1 + \omega_4^4]\,(A_1, A_4) + \\ + \omega_1^2(A_2, A_4) + \omega_1^3(A_3, A_4) \, ,$$

$$\text{(2b)} \qquad \mathrm{d}(A_2, A_3) = -\omega_3^1(A_1, A_2) + \omega_2^1(A_1, A_3) + [\omega_2^2 + \omega_3^3]\,(A_2, A_3) + \\ + \omega_3^4(A_2, A_4) - \omega_2^4(A_3, A_4) \, .$$

Daraus folgt, daß

$$\omega_4^2,\ \omega_4^3,\ \omega_1^2,\ \omega_1^3,\ \omega_3^1,\ \omega_2^1,\ \omega_3^4,\ \omega_2^4$$

die Hauptformen sind.

$V_3(\Gamma_1)$ sei die Punktmannigfaltigkeit, die aus sämtlichen Punkten aller Erzeugenden der Kongruenz Γ_1 besteht. Die niedrigste Dimension des Unterraumes τ_1, der alle Berührräume von $V_3(\Gamma_1)$ längs der festen Erzeugenden $p_1 \subset \Gamma_1$ enthält, nennen wir *den Charakter der Geraden* p_1 (Švec [5], S. 12). Dasselbe gilt für alle Erzeugenden einer beliebigen Kongruenz im Raume P_n, $n \geqq 3$.

Wir werden voraussetzen, daß der Charakter aller Erzeugenden der Kongruenz Γ_1 für alle Wertepaare $(u, v) \subset \Delta$ gleich 3 ist.

$$\dim \tau_1 = 3\,. \tag{3a}$$

τ_2 sei der Unterraum, der alle Berührräume von $V_3(\Gamma_2)$ längs der festen Erzeugenden $p_2 \subset \Gamma_2$ enthält. Für alle Wertepaare $(u, v) \subset \Delta$ sei der Charakter der Geraden p_2 gleich 3.

$$\dim \tau_2 = 3\,. \tag{3b}$$

Betrachten wir die Gerade

$$q = (\varkappa_1 A_1 + \varkappa_4 A_4,\ \varkappa_2 A_2 + \varkappa_3 A_3)$$

(für das feste Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$). Die Gerade q nennen wir die zur Richtung s

$$\vartheta_1\, \mathrm{d}u + \vartheta_2\, \mathrm{d}v = 0 \tag{4}$$

gehörende Quasifleknodalgerade des Paares P, wenn für das erwähnte Wertepaar

$$q \times (A_1, A_4) = 0\,, \quad q \times (A_2, A_3) = 0\,, \quad q \times \mathrm{d}(A_1, A_4) = 0\,, \tag{5}$$
$$q \times \mathrm{d}(A_2, A_3) = 0$$

gilt. (Mit $\times$ bezeichnen wir das Plücker'sche Produkt.) Die ersten zwei angeführten Gleichungen sind erfüllt. Aus den übrigen Gleichungen folgt dann nach (2):

$$\varkappa_1\varkappa_2\omega_1^3 - \varkappa_1\varkappa_3\omega_1^2 + \varkappa_2\varkappa_4\omega_4^3 - \varkappa_3\varkappa_4\omega_4^2 = 0\,, \tag{6a}$$

$$-\varkappa_1\varkappa_2\omega_2^4 - \varkappa_1\varkappa_3\omega_3^4 + \varkappa_2\varkappa_4\omega_2^1 + \varkappa_3\varkappa_4\omega_3^1 = 0\,. \tag{6b}$$

Man kann die geometrischen Eigenschaften der Quasifleknodalgeraden finden. Bei Gültigkeit der Relation (4) ist durch die Punkte (A_1, A_4), $\mathrm{d}(A_1, A_4)$ des Kleinschen Raumes P_5 die Tangente der Mannigfaltigkeit K_1 im Punkte (A_1, A_4) bestimmt. Ähnlich, bei der Gültigkeit derselben Relation, ist durch (A_2, A_3), $\mathrm{d}(A_2, A_3)$ die Tangente der Mannigfaltigkeit K_2 im Punkte (A_2, A_3) bestimmt. Die Punkte (A_1, A_4), (A_2, A_3), $\mathrm{d}(A_1, A_4)$, $\mathrm{d}(A_2, A_3)$ liegen allgemein in einem dreidimensionalen Raume.

Die Polargerade des erwähnten Raumes im Bezug zur Kleinschen Quadrik bezeichnen wir mit c. Im allgemeinen schneidet die Gerade c die Kleinsche Quadrik in zwei Punkten, die die Kleinschen Bilder der zur Richtung s gehörigen Quasifleknodalgeraden sind.

Die erwähnten Quasifleknodalgeraden haben geometrische Eigenschaften, ihre Lage hängt von den sekundären Parametern nicht ab.

Im folgenden werden wir voraussetzen, daß ϑ_1, ϑ_2 die gegebenen Funktionen der Hauptparameter und im allgemeinen auch der sekundären Parameter sind. Jede Lösung der Differentialgleichung (4) bestimmt die zwei sich entsprechenden einparametrischen Geradenmannigfaltigkeiten Ω_1, $\Omega_2(\Omega_1 \subset \Gamma_1, \Omega_2 \subset \Gamma_2)$. Betrachten wir zwei Geraden p_1, p_2; $p_1 \subset \Omega_1$, $p_2 \subset \Omega_2$. Die Korrespondenz C soll die Gerade p_1 in die Gerade p_2 überführen. Aus den Gleichungen (6a), (6b) bestimmt man die zum Geradenpaare p_1, p_2 und zur Gleichung (4) gehörigen Quasifleknodalgeraden. Diese Geraden nennen wir die Quasifleknodalgeraden des Paares Ω_1, Ω_2 längs p_1, p_2 (Vala [6]).

Setzen wir voraus, daß eine der erwähnten Kongruenzen Γ_1, Γ_2 in eine Regelfläche zerfällt. Wenn zum Beispiel Γ_1 eine Regelfläche ist, dann ist das Kleinsche Bild von Γ_1 eine Kurve des Kleinschen Raumes. Beliebige zwei der folgenden Formen:

$$\omega_4^2,\ \omega_4^3,\ \omega_1^2,\ \omega_1^3 \tag{7a}$$

sind linear abhängig. Wenn Γ_2 eine Regelfläche ist, dann sind beliebige zwei der folgenden Formen:

$$\omega_3^1,\ \omega_2^1,\ \omega_3^4,\ \omega_2^4 \tag{7b}$$

linear abhängig.

b) Im folgenden werden wir voraussetzen, daß die Dimension der Berührräume der Punktmannigfaltigkeit K_1 für alle Wertepaare $(u, v) \subset \Delta$ gleich 2 ist. Dasselbe werden wir für die Punktmannigfaltigkeit K_2 voraussetzen. Für alle Wertepaare $(u, v) \subset \Delta$ sollen noch folgende Bedingungen erfüllt sein: Die Kongruenzen Γ_1, Γ_2 sollen hyperbolisch sein und reguläre Brennmannigfaltigkeiten haben. Alle Geraden p_1, p_2 sollen den Charakter 3 haben.

Die Punkte A_1, A_4 wählen wir in den Brennpunkten der Kongruenz Γ_1, ebenso A_2, A_3 in den Brennpunkten der Kongruenz Γ_2. Wir bezeichnen mit α_i, $i = 1, 2, 3, 4$, die Berührebenen in den Brennpunkten bezüglich der zugehörigen Brennflächen.

Die Ebene α_1 schneidet die Gerade p_2 (für dasselbe Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$) im Punkte

$$\omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3 .$$

Die Lage dieses Punktes hängt von den Differentialen der Parameter nicht ab, es gilt also:

$$\omega_1^2 A_2 + \omega_1^3 A_3 = \omega_1(a_1^2 A_2 + a_1^3 A_3) .$$

ω_1 ist die Hauptform; a_1^2, a_1^3 sind im allgemeinen die Funktionen der Hauptparameter und der sekundären Parameter. Ähnlich kann man die Schnittpunkte der Berührebenen der übrigen Brennflächen mit den entsprechenden Geraden der zweiten Kongruenz betrachten. Es gilt dann:

$$\begin{aligned}(8)\qquad &\omega_1^2 = a_1^2\omega_1\,, \quad \omega_1^3 = a_1^3\omega_1\,, \quad \omega_4^2 = a_4^2\omega_4\,, \quad \omega_4^3 = a_4^3\omega_4\,,\\ &\omega_2^1 = a_2^1\omega_2\,, \quad \omega_2^4 = a_2^4\omega_2\,, \quad \omega_3^1 = a_3^1\omega_3\,, \quad \omega_3^4 = a_3^4\omega_3\,.\end{aligned}$$

ω_i, $i = 1, 2, 3, 4$, sind die Hauptformen. $a_1^2, a_1^3, a_4^2, a_4^3, a_2^1, a_2^4, a_3^1, a_3^4$ sind im allgemeinen Funktionen der Hauptparameter und der sekundären Parameter. Für alle Wertepaare $(u, v) \subset \Delta$ gilt nach (3a), (3b):

$$(9)\qquad a_1^2a_4^3 - a_1^3a_4^2 \neq 0\,, \quad a_2^1a_3^4 - a_2^4a_3^1 \neq 0\,.$$

Nach den angeführten Voraussetzungen und nach den Relationen (8) sind die Hauptformen ω_1, ω_4 für alle Wertepaare $(u, v) \subset \Delta$ linear unabhängig. Dasselbe gilt für die Hauptformen ω_2, ω_3. Daraus bekommt man folgende Relationen:

$$(10)\qquad \omega_2 = b_2^1\omega_1 + b_2^4\omega_4\,, \quad \omega_3 = b_3^1\omega_1 + b_3^4\omega_4\,.$$

$b_2^1, b_2^4, b_3^1, b_3^4$ sind die Funktionen der erwähnten Parameter. Weiter gilt für alle Wertepaare $(u, v) \subset \Delta$ folgende Ungleichheit:

$$(10a)\qquad b_2^1b_3^4 - b_3^1b_2^4 \neq 0\,.$$

Das Rosenfeldsche Bild des Paares P ist im allgemeinen eine Geradenkongruenz des Charakters 5 (Finikov [1], S. 192, Klapka [2], S. 207). Im Falle des T-Paares hat das Rosenfeldsche Bild den Charakter 3. Es gilt dann:

$$a_1^3 = a_2^4 = a_3^1 = a_4^2 = 0\,, \quad \text{oder} \quad a_1^2 = a_2^1 = a_3^4 = a_4^3 = 0\,.$$

Wenn das Rosenfeldsche Bild des Paares P für alle Wertepaare $(u, v) \subset \Delta$ den Charakter 4 besitzt, dann haben die Berührebenen der Punktmannigfaltigkeiten K_1, K_2 in den sich entsprechenden Punkten einen Punkt gemein. Dann gilt nach (8), (2a), (2b):

$$(11)\qquad a_1^3a_2^1a_3^4a_4^2 = a_1^2a_2^4a_3^1a_4^3\,.$$

Betrachten wir zwei, sich in der Geradenkorrespondenz C entsprechende Regelflächen des Paares P. Mindestens eine der Flächen sei eine Torse. Die zwei angeführten Flächen nennen wir *das Torsalpaar des Systemes P*. Wenn die Fläche (A_1, A_4) eine Torse ist, dann gilt:

$$(A_1, A_4, \omega_1^2A_2 + \omega_1^3A_3, \omega_4^2A_2 + \omega_4^3A_3) = 0\,.$$

Daraus ergeben sich folgende Gleichungen für zwei Schichten der Torsalpaare des Systemes P:

$$\omega_1 = 0\,, \quad \omega_4 = 0\,.$$

Leicht bekommen wir die Gleichungen der zwei übrigen Schichten von Torsalpaaren des Systemes P:

$$\omega_2 = 0\,, \quad \omega_3 = 0\,.$$

Im Paare P betrachten wir zwei sich entsprechende Erzeugenden p_1, p_2. Der Index i soll die Werte 1, 2, 3, 4 einnehmen. Für jeden Wert von i bezeichnen wir mit Ω_1^i die Fläche des Torsalpaares $\omega_i = 0$, die die Erzeugende p_1 enthält; die andere Fläche desselben Torsalpaares bezeichnen wir mit Ω_2^i.

Unbedingt abwickelbar sind folgende Flächen:

$\Omega_1^1(\omega_1 = 0)$, die Rückkehrkante der Torse ist auf der Fläche (A_1),

$\Omega_1^4(\omega_4 = 0)$, die Rückkehrkante der Torse ist auf der Fläche (A_4),

$\Omega_2^2(\omega_2 = 0)$, die Rückkehrkante der Torse ist auf der Fläche (A_2),

$\Omega_2^3(\omega_3 = 0)$, die Rückkehrkante der Torse ist auf der Fläche (A_3).

Für jeden Wert von i bezeichnen wir mit m_i, $\overline{m}_i$ die Quasifleknodalgeraden des Paares Ω_1^i, Ω_2^i längs der Geraden p_1, p_2. Die Geraden m_i sollen durch die entsprechenden Punkte A_i gehen; die übrigen Quasifleknodalgeraden bezeichnen wir mit $\overline{m}_i$ ($\overline{m}_i$ gehört zur Gleichnung $\omega_i = 0$).

Wir führen folgende Bezeichung ein:

$$m_i = \left(\varkappa_1^i A_1 + \varkappa_4^i A_4, \varkappa_2^i A_2 + \varkappa_3^i A_3\right), \tag{12a}$$

$$i = 1, 2, 3, 4\,, \quad \varkappa_4^1 = \varkappa_1^4 = \varkappa_2^3 = \varkappa_3^2 = 0\,;$$

$$\overline{m}_i = \left(\bar{\varkappa}_1^i A_1 + \bar{\varkappa}_4^i A_4, \bar{\varkappa}_2^i A_2 + \bar{\varkappa}_3^i A_3\right), \tag{12b}$$

$$i = 1, 2, 3, 4\,, \quad \bar{\varkappa}_4^1 \neq 0\,, \quad \bar{\varkappa}_1^4 \neq 0\,, \quad \bar{\varkappa}_2^3 \neq 0\,, \quad \bar{\varkappa}_3^2 \neq 0\,.$$

Jetzt werden wir die Eigenschaften des Paares Ω_1^1, Ω_2^1 $(\omega_1 = 0)$ untersuchen. Nach (6a) gilt für die Quasifleknodalgeraden des erwähnten Paares mindestens eine der folgenden Relationen:

$$\varkappa_4 = 0\,, \quad \varkappa_2 a_4^3 - \varkappa_3 a_4^2 = 0\,.$$

Wir setzen den ersten Fall voraus. Aus der Gleichung (6b) folgt:

$$\varkappa_2 \omega_2^4 + \varkappa_3 \omega_3^4 = 0\,.$$

Daraus ergibt sich nach (8), (10):

$$(13a) \qquad \varkappa_2 a_2^4 b_2^4 + \varkappa_3 a_3^4 b_3^4 = 0\,, \quad \varkappa_4 = 0\,.$$

Die Gerade m_1 ist durch (12a) gegeben, nach der Gleichung (13a) gilt noch:

$$(14a) \qquad \varkappa_4^1 = 0\,, \quad \varkappa_2^1 a_2^4 b_2^4 + \varkappa_3^1 a_3^4 b_3^4 = 0\,.$$

Wir werden den zweiten Fall betrachten. Aus der Gleichung (6b) folgt leicht:

$$(13b) \qquad \varkappa_1(a_3^4 a_4^3 b_3^4 + a_2^4 a_4^2 b_2^4) - \varkappa_4(a_3^1 a_4^3 b_3^4 + a_2^1 a_4^2 b_2^4) = 0\,, \quad \varkappa_2 a_4^3 - \varkappa_3 a_4^2 = 0\,.$$

(Die Relationen $a_4^2 = 0$, $a_4^3 = 0$ gelten nach (9) nicht gleichzeitig.)

Wenn

$$a_3^4 a_4^3 b_3^4 + a_2^4 a_4^2 b_2^4 = 0$$

gilt, dann ist durch die Relationen (12a), (13b) die Gerade m_1 bestimmt. (Statt der Bezeichung $\varkappa_k$, $k = 1, 2, 3, 4$, benützen wir die Bezeichung $\varkappa_k^1$). Diese Gerade fällt mit der durch (12a), (14a) gegebenen Geraden zusammen.

Die Gerade $\bar{m}_1$ ist durch (12b) gegeben. Aus der Gleichnung (13b) bekommen wir allgemein folgende Relationen für die Größen $\bar{\varkappa}_1^1, \bar{\varkappa}_2^1, \bar{\varkappa}_3^1, \bar{\varkappa}_4^1$:

$$(14b) \qquad \bar{\varkappa}_1^1(a_3^4 a_4^3 b_3^4 + a_2^4 a_4^2 b_2^4) - \bar{\varkappa}_4^1(a_3^1 a_4^3 b_3^4 + a_2^1 a_4^2 b_2^4) = 0\,,$$
$$\bar{\varkappa}_2^1 a_4^3 - \bar{\varkappa}_3^1 a_4^2 = 0\,.$$

Die Gerade $\bar{m}_1$ existiert nicht im folgenden Falle:

$$(14c) \qquad a_3^4 a_4^3 b_3^4 + a_2^4 a_4^2 b_2^4 = 0\,, \quad a_3^1 a_4^3 b_3^4 + a_2^1 a_4^2 b_2^4 \neq 0\,.$$

Wir werden die geometrischen Eigenschaften der Relationen (14c) betrachten. Die Berührebene der Fläche Ω_1^1 längs der Geraden p_1 schneidet die Gerade p_2 im Punkte

$$a_4^2 A_2 + a_4^3 A_3\,.$$

Die Berührebene der Fläche Ω_2^1 im angeführten Punkte schneidet p_1 im Punkte

$$A_1(a_4^2 a_2^1 b_2^4 + a_4^3 a_3^1 b_3^4) + A_4(a_4^2 a_2^4 b_2^4 + a_4^3 a_3^4 b_3^4)\,.$$

Wenn (14c) gilt, dann fällt dieser Punkt mit dem Punkte A_1 zusammen.

Wir werden noch den Fall

$$(14d) \qquad a_3^4 a_4^3 b_3^4 + a_2^4 a_4^2 b_2^4 = 0\,, \quad a_3^1 a_4^3 b_3^4 + a_2^1 a_4^2 b_2^4 = 0$$

untersuchen. Das System der linearen Gleichungen für die Unbekannten b_3^4, b_2^4 hat nach (10a) eine nichttriviale Lösung, es gilt:

$$a_4^2 a_4^3(a_2^1 a_3^4 - a_2^4 a_3^1) = 0\,.$$

Nach (9) bekommen wir nur folgende Möglichkeiten:

$$a_4^2 = 0\,, \quad a_4^3 = 0\,.$$

Setzen wir $a_4^3 = 0$ voraus. Nach (14d) gilt gleichzeitig $b_2^4 = 0$. (Den Fall $a_4^3 = a_2^4 = a_2^1 = 0$ müssen wir nach (9) ausschließen.) Betrachten wir die geometrischen Eigenschaften der Relationen $a_4^3 = b_2^4 = 0\,(\omega_1 = 0)$. Die Berührebene der Fläche Ω_1^1 (d. h. die Ebene α_4) geht durch den Punkt A_2. Die Berührebene der Fläche Ω_2^1 im Punkte $A_2 + \lambda A_3$ (für $\omega_1 = 0$) ist für alle Werte von $\lambda \neq 0$ fest und durch die Punkte

$$(A_2, A_3, a_3^1 A_1 + a_3^4 A_4)$$

bestimmt. Weiter gilt für $\omega_1 = 0$:

$$\mathrm{d}A_2 = \omega_2^2 A_2 + \omega_2^3 A_3\,.$$

p_2 ist die Torsalerzeugende der Fläche Ω_2^1; A_2 ist ihr Kuspidalpunkt. Die Geraden $\overline{m}_1$ bilden ein Büschel mit dem Scheitel A_2. (A_2, p_1) ist die Ebene des Büschels. Von diesem Büschel schließen wir die Gerade $m_1 = (A_1, A_2)$ aus.

Ähnlich kann man den Fall $a_4^2 = 0$ betrachten. Wenn $a_4^2 = 0$ gilt, dann gilt gleichzeitig $b_3^4 = 0$. Die Berührebene der Fläche Ω_1^1 geht durch den Punkt A_3. p_2 ist die Torsalerzeugende der Fläche Ω_2^1. A_3 ist der Kuspidalpunkt dieser Erzeugenden. Die Geraden $\overline{m}_1$ bilden das Geradenbüschel mit dem Scheitel A_3. (A_3, p_1) ist die Ebene des Büschels. Aus diesem Büschel schließen wir die Gerade $m_1 = (A_1, A_3)$ aus.

Setzen wir voraus, daß durch den Punkt A_1 unendlich viele Geraden m_1 gehen. Nach (14a) gilt dann entweder $a_3^4 = b_2^4 = 0$, oder $a_2^4 = b_3^4 = 0$. Im ersten Falle geht die Ebene α_3 durch den Punkt A_1. p_2 ist die Torsalerzeugende der Fläche Ω_2^1; A_2 ist der Kuspidalpunkt dieser Erzeugenden. Die Geraden m_1 bilden ein Büschel mit dem Scheitel A_1. (A_1, p_2) ist die Ebene des Büschels. Im zweiten Falle geht die Ebene α_2 durch den Punkt A_1. p_2 ist die Torsalerzeugende der Fläche Ω_2^1; A_3 ist der Kuspidalpunkt dieser Erzeugenden. Die Geraden m_1 bilden ein Büschel mit dem Scheitel A_1; (A_1, p_2) ist die Ebene des Büschels.

Ähnlich kann man auch die Eigenschaften der Geraden $m_4, m_2, m_3, \overline{m}_4, \overline{m}_2, \overline{m}_3$ betrachten.

Wir finden leicht die übrigen Koeffizienten der Relationen (12):

(15a) $\quad \varkappa_1^4 = 0\,, \quad \varkappa_2^4 a_2^1 b_2^1 + \varkappa_3^4 a_3^1 b_3^1 = 0\,,$

(15b) $\quad \bar{\varkappa}_1^4(a_1^3 a_3^4 b_3^1 + a_1^2 a_2^4 b_2^1) - \bar{\varkappa}_4^4(a_1^3 a_3^1 b_3^1 + a_1^2 a_2^1 b_2^1) = 0\,, \quad \bar{\varkappa}_2^4 a_1^3 - \bar{\varkappa}_3^4 a_1^2 = 0\,,$

(16a) $\quad \varkappa_1^2 a_1^3 b_2^4 - \varkappa_4^2 a_4^3 b_2^1 = 0\,, \quad \varkappa_3^2 = 0\,,$

(16b) $\quad \bar{\varkappa}_1^2 a_3^4 - \bar{\varkappa}_4^2 a_3^1 = 0\,, \quad \bar{\varkappa}_2^2(-a_3^4 a_4^3 b_2^1 + a_1^3 a_3^1 b_2^4) + \bar{\varkappa}_3^2(a_3^4 a_4^2 b_2^1 - a_1^2 a_3^1 b_2^4) = 0\,,$

(17a) $\quad \varkappa_1^3 a_1^2 b_3^4 - \varkappa_4^3 a_4^2 b_3^1 = 0\,, \quad \varkappa_2^3 = 0\,,$

(17b) $\quad \bar{\varkappa}_1^3 a_2^4 - \bar{\varkappa}_4^3 a_2^1 = 0\,, \quad \bar{\varkappa}_2^3(-a_2^4 a_4^3 b_3^1 + a_1^3 a_2^1 b_3^4) + \bar{\varkappa}_3^3(a_2^4 a_4^2 b_3^1 - a_1^2 a_2^1 b_3^4) = 0\,.$

Die Geraden $\overline{m}_i$, $i = 4, 2, 3$, existieren fortschreitend nicht in foldenden Fällen:

$$a_1^3 a_3^1 b_3^1 + a_1^2 a_2^1 b_2^1 = 0\,, \qquad a_1^3 a_3^4 b_3^1 + a_1^2 a_2^4 b_2^1 \neq 0\,; \tag{15c}$$

$$-a_3^4 a_4^3 b_2^1 + a_1^3 a_3^1 b_2^4 = 0\,, \qquad a_3^4 a_4^2 b_2^1 - a_1^2 a_3^1 b_2^4 \neq 0\,; \tag{16c}$$

$$a_2^4 a_4^2 b_3^1 - a_1^2 a_2^1 b_3^4 = 0\,, \quad -a_2^4 a_4^3 b_3^1 + a_1^3 a_2^1 b_3^4 \neq 0\,. \tag{17c}$$

Außer der Gültigkeit der anfangs des Abschnittes b) angeführten Bedingungen werden wir im folgenden voraussetzen, daß für das feste Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$ die Ebenen α_1, α_4 durch keinen der Punkte A_2, A_3 gehen. Ähnlich sollen die Ebenen α_2, α_3 durch keinen der Punkte A_1, A_4 gehen. Es gilt dann:

$$a_1^2 \neq 0\,, \quad a_1^3 \neq 0\,, \quad a_4^2 \neq 0\,, \quad a_4^3 \neq 0\,, \quad a_2^1 \neq 0\,, \quad a_2^4 \neq 0\,, \quad a_3^1 \neq 0\,, \quad a_3^4 \neq 0\,. \tag{18}$$

Die Gerade p_1 (für das angeführte Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$) sei keine Torsalerzeugende der Flächen Ω_1^2, Ω_1^3, die Gerade p_2 sei keine Torsalerzeugende der Flächen Ω_2^1, Ω_2^4. Daraus folgt:

$$b_2^1 \neq 0\,, \quad b_2^4 \neq 0\,, \quad b_3^1 \neq 0\,, \quad b_3^4 \neq 0\,. \tag{19}$$

Satz 1. *Für das feste Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$ liegen die Geraden m_i gerade dann auf einer Fläche zweiter Ordnung, wenn*

$$a_1^3 a_2^1 a_3^4 a_4^2 = a_1^2 a_2^4 a_3^1 a_4^3$$

gilt. Unter Voraussetzung der Gültigkeit der Relationen (18), (19) für alle Wertepaare $(u, v) \subset \Delta$ liegen die zu jedem festen Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$ gehörigen Geraden m_i, $i = 1, 2, 3, 4$, gerade dann auf einer Quadrik, wenn P vom Charakter 4 nach Rosenfeld ist.

Beweis. Bei der Gültigkeit der Relationen (18), (19) für das feste Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$ gelten nach (14a), (15a), (16a), (17a) folgende Relationen:

$$\varkappa_2^1 \neq 0\,, \quad \varkappa_3^1 \neq 0\,, \quad \varkappa_2^4 \neq 0\,, \quad \varkappa_3^4 \neq 0\,, \quad \varkappa_1^2 \neq 0\,, \quad \varkappa_4^2 \neq 0\,, \quad \varkappa_1^3 \neq 0\,, \quad \varkappa_4^3 \neq 0\,.$$

Die Geraden m_1, m_4, m_2, m_3 sind eindeutig bestimmt und wir bekommen leicht folgende Relationen:

$$\begin{aligned} m_1 &= \left(A_1, a_3^4 b_3^4 A_2 - a_2^4 b_2^4 A_3\right), \quad & m_2 &= \left(a_4^3 b_2^1 A_1 + a_1^3 b_2^4 A_4, A_2\right), \\ m_4 &= \left(A_4, a_3^1 b_3^1 A_2 - a_2^1 b_2^1 A_3\right), \quad & m_3 &= \left(a_4^2 b_3^1 A_1 + a_1^2 b_3^4 A_4, A_3\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Die Geraden m_1, m_4, m_2, m_3 schneiden die Geraden p_1, p_2. Sie liegen gerade dann auf einer Fläche zweiter Ordnung, wenn die Doppelverhältnisse $D, \overline{D}$ ihrer Schnittpunte mit den Geraden p_1, p_2 gleich sind. Aus der Relation (20) folgt:

$$D = \frac{a_1^3 a_4^2 b_3^1 b_2^4}{a_1^2 a_4^3 b_2^1 b_3^4}\,, \quad \overline{D} = \frac{a_3^1 a_2^4 b_3^1 b_2^4}{a_2^1 a_3^4 b_2^1 b_3^4}\,. \tag{21}$$

Für das feste Wertepaar $(u, v) \subset D$ ist die Gleichung $D = \bar{D}$ gerade dann erfüllt, wenn die Relation (11) gilt. Der weitere Teil des Satzes ist ersichtlich.

Wenn für das feste Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$ die Relationen (18), (19) gelten, dann existiert eine einzige zugehörige Gerade $\bar{m}_1$, oder existiert diese nicht. Mit $\bar{n}_1$ bezeichnen wir im ersten Falle die Gerade $\bar{m}_1$, im zweiten Falle die Gerade m_1. Ähnlich definieren wir die Geraden $\bar{n}_4, \bar{n}_2, \bar{n}_3$.

Satz 2. *Für das feste Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$ ist das Doppelverhältnis der Schnittpunkte der Geraden $\bar{n}_1, \bar{n}_4, \bar{n}_2, \bar{n}_3$ mit der Geraden p_1 gleich D (siehe (21)) und das Doppelverhältnis der Schnittpunkte der Geraden $\bar{n}_1, \bar{n}_4, \bar{n}_2, \bar{n}_3$ mit der Geraden p_2 ist gleich $\bar{D}$.*

Beweis. Unter Voraussetzung der Relationen (18), (19) bekommen wir leicht:

$$\begin{aligned}
&\bar{n}_1 = ([a_2^1 a_4^2 b_2^4 + a_3^1 a_4^3 b_3^4]\, A_1 + [a_2^4 a_4^2 b_2^4 + a_3^4 a_4^3 b_3^4]\, A_4,\ a_4^2 A_2 + a_4^3 A_3]\,,\\
(22)\quad &\bar{n}_4 = ([a_1^2 a_2^1 b_2^1 + a_1^3 a_3^1 b_3^1]\, A_1 + [a_1^2 a_2^4 b_2^1 + a_1^3 a_3^4 b_3^1]\, A_4,\ a_1^2 A_2 + a_1^3 A_3)\,,\\
&\bar{n}_2 = (a_3^1 A_1 + a_3^4 A_4, [-a_1^2 a_3^1 b_2^4 + a_3^4 a_4^2 b_2^1]\, A_2 + [-a_1^3 a_3^1 b_2^4 + a_3^4 a_4^3 b_2^1]\, A_3)\,,\\
&\bar{n}_3 = (a_2^1 A_1 + a_2^4 A_4, [a_2^4 a_4^2 b_3^1 - a_1^2 a_2^1 b_3^4]\, A_2 + [a_2^4 a_4^3 b_3^1 - a_2^1 a_1^3 b_3^4]\, A_3)\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, daß das Doppelverhältnis der Schnittpunkte der Geraden $\bar{n}_1, \bar{n}_4, \bar{n}_2, \bar{n}_3$ mit der Geraden p_1 gleich D ist. Ebenso ist das Doppelverhältnis der Schnittpunkte der Geraden $\bar{n}_1, \bar{n}_4, \bar{n}_2, \bar{n}_3$ mit der Geraden p_2 gleich $\bar{D}$.

c) Im folgenden werden wir voraussetzen, daß die Bedingungen am Anfang des Abschnittes b) erfüllt sind. Die Relationen (18), (19) müssen jedoch nicht unbedingt gelten.

Wir werden zwei Regelflächen $\Omega_1, \Omega_2 (\Omega_1 \subset \Gamma_1, \Omega_2 \subset \Gamma_2)$ betrachten. Bei der Korrespondenz C sollen die Erzeugenden der Fläche Ω_2 den Erzeugenden der Fläche Ω_1 entsprechen. p_1, p_2 seien zwei sich entsprechende Erzeugenden der angeführten Flächen. Wir untersuchen ein windschiefes Viereck $M_1 M_2 M_4 M_3$. Die Punkte M_1, M_4 sollen auf der Geraden p_1, die Punkte M_2, M_3 auf der Geraden p_2 liegen. Weiter werden wir folgende Eigenschaften voraussetzen:

Die Berührebene der Fläche Ω_1 im Punkte M_1 schneidet p_2 im Punkte M_2,

die Berührebene der Fläche Ω_2 im Punkte M_2 schneidet p_1 im Punkte M_4,

die Berührebene der Fläche Ω_1 im Punkte M_4 schneidet p_2 im Punkte M_3,

die Berührebene der Fläche Ω_2 im Punkte M_3 schneidet p_1 im Punkte M_1.

Ein solches Viereck nennen wir *involutorisch*.

Es soll jetzt längs p_1, p_2 ein involutorisches, nicht in eine Abszisse zerfallendes

Viereck, existieren. Dann existieren unendlich viele solche Vierecke (Vala [6]). Es gilt dann folgende Bedingung:

$$\omega_1^2\omega_2^1 + \omega_1^3\omega_3^1 + \omega_2^4\omega_4^2 + \omega_3^4\omega_4^3 = 0\,. \tag{23}$$

Daraus folgt mit Hilfe der Gleichungen (8), (10):

$$\begin{aligned}[a_1^2a_2^1b_2^1 + a_1^3a_3^1b_3^1]\,[\omega_1]^2 &+ \\ +[a_1^2a_2^1b_2^4 + a_1^3a_3^1b_3^4 + a_2^4a_4^2b_2^1 + a_3^4a_4^3b_3^1]\,\omega_1\omega_4 &+ \\ + [a_2^4a_4^2b_2^4 + a_3^4a_4^3b_3^4]\,[\omega_4]^2 &= 0\,.\end{aligned} \tag{24}$$

Man muß noch einige Sonderfälle betrachten. Setzen wir voraus, daß p_1 die Torsalerzeugende der Fläche Ω_1 ist. Ihr Kuspidalpunkt ist entweder A_1, oder A_4. Setzen wir voraus, daß A_1 der Kuspidalpunkt der Geraden p_1 ist. Jede durch p_1 gehende Ebene betrachten wir bei der Konstruktion der involutorischen Vierecke als eine Berührebene der Fläche Ω_1 im Punkte A_1. Für das feste Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$, welches das Paar p_1, p_2 bestimmt, gilt dann $\omega_1 = 0$. Setzen wir weiter voraus, daß p_2 keine Torsalerzeugende der Fläche Ω_2 ist. Die zum Flächenpaare Ω_1, Ω_2 längs p_1, p_2 gehörenden Vierecke existieren gerade dann, wenn

$$a_2^4a_4^2b_2^4 + a_3^4a_4^3b_3^4 = 0 \tag{25}$$

gilt. Bei der Gültigkeit $\omega_1 = 0$ ist dann also die Relation (24) erfüllt. Wenn die Relation (25) gilt, dann schneidet die Berührebene der Fläche Ω_1 längs der Geraden p_1 (d. h. die Ebene α_4) die Gerade p_2 im Punkte M_2. Die Berührebene der Fläche Ω_2 im Punkte M_2 geht durch den Punkt A_1. Man kommt zur folgenden Konstruktion der involutorischen Vierecke: M_1 ist ein beliebiger Punkt der Geraden p_1, M_2 ist der schon erwähnte feste Punkt der Geraden p_2, $M_4 = A_1$, M_3, ist der Berührpunkt der Berührebene (M_1, p_2) der Fläche Ω_2. Den Fall, daß A_4 der Kuspidalpunkt der Geraden p_1 ist, kann man ähnlich betrachten. Ähnlicherweise untersucht man auch die Fälle, daß p_2 eine Torsalgerade der Fläche Ω_2 und p_1 eine gewöhnliche Erzeugende der Fläche Ω_1 ist.

Im folgenden werden wir voraussetzen, daß p_1 die Torsalerzeugende der Fläche Ω_1 und p_2 die Torsalerzeugende der Fläche Ω_2 ist. A_1, A_2 seien die Kuspidalpunkte der erwähnten Geraden. Die nicht in eine Abszisse zerfallenden Vierecke existieren gerade dann, wenn mindestens eine der folgenden Relationen gilt:

$$a_3^4 = 0\,, \quad a_4^3 = 0\,.$$

Unter Voraussetzung $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ ist im Falle $a_3^4 = 0$ die Relation (24) erfüllt. Nach (10) gilt nämlich dann $b_2^4 = 0$. Im Falle $a_3^4 = 0$ bekommt man folgende Konstruktion der involutorischen Vierecke: M_1 ist ein beliebiger Punkt der Geraden p_1. M_2 ist der Schnittpunkt der Berührebene der Fläche Ω_1 längs der Geraden p_1 mit der Geraden p_2. Unter den angeführten Voraussetzungen geht die Berührebene der Fläche Ω_2 im Punkte M_2 (d. h. die Ebene α_3) durch den Punkt A_1; $M_4 = A_1$.

Weiter wählen wir $M_3 = A_2$. Ähnlicherweise kann man die Fälle $a_4^3 = 0$, $a_3^4 = a_4^3 = 0$ untersuchen. Ähnlich betrachtet man auch die Fälle, daß A_4 der Kuspidalpunkt der Geraden p_1, bzw. A_3 der Kuspidalpunkt der Geraden p_2 ist.

Wenn längs aller sich entsprechenden Geraden $p_1 \subset \Omega_1$, $p_2 \subset \Omega_2$ die Schichten der involutorischen Vierecke existieren, dann nennen wir Ω_1, Ω_2 *das involutorische Flächenpaar des Systemes P*. Das Paar P nennen wir *involutorisch*, wenn jede der zwei sich entsprechenden Flächen $\Omega_1 \subset \Gamma_1$, $\Omega_2 \subset \Gamma_2$ ein involutorisches Flächenpaar bilden. In diesem Falle gilt nach (24):

$$
\begin{aligned}
(26) \qquad & a_1^2 a_2^1 b_2^1 + a_1^3 a_3^1 b_3^1 = 0\,,\\
& a_3^4 a_4^3 b_3^4 + a_2^4 a_4^2 b_2^4 = 0\,,\\
& a_2^4 a_4^2 b_2^1 + a_1^3 a_3^1 b_3^4 + a_1^2 a_2^1 b_2^4 + a_3^4 a_4^3 b_3^1 = 0\,.
\end{aligned}
$$

Satz 3. *Das Kongruenzenpaar von Popov ist involutorisch.*

Beweis. Für das Paar von Popov gelten folgende Relationen (Finikov [1], S. 238):

$$a_1^3 = a_2^1 = a_4^2 = a_3^4 = 0\,, \quad \text{oder} \quad a_1^2 = a_3^1 = a_4^3 = a_2^4 = 0\,.$$

Die Gleichungen (26) sind also für alle Werte der Parameter erfüllt.

Satz 4. *Wenn das P-Paar für alle Wertepaare $(u, v) \subset \Delta$ involutorisch ist, dann ist keine der zugehörigen Geraden $\overline{m}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, eindeutig bestimmt.*

Beweis. Die ersten Gleichungen von (15c), (14c), (16c), (17c) sind die Bedingungen, daß fortschreitend $\overline{m}_4$, $\overline{m}_1$, $\overline{m}_2$, $\overline{m}_3$ nicht existieren oder nicht eindeutig bestimmt sind. Es gilt dann:

$$
\begin{aligned}
(27) \qquad & a_1^2 a_2^1 b_2^1 + a_1^3 a_3^1 b_3^1 = 0\,, \qquad a_3^4 a_4^3 b_2^1 - a_1^3 a_3^1 b_2^4 = 0\,,\\
& a_3^4 a_4^3 b_3^4 + a_2^4 a_4^2 b_2^4 = 0\,, \qquad -a_1^2 a_2^1 b_3^4 + a_2^4 a_4^2 b_3^1 = 0\,.
\end{aligned}
$$

Im Falle des involutorischen P-Paares sind die ersten zwei Gleichungen nach (26) erfüllt.

Nach den Voraussetzungen sind die Formen ω_1, ω_4 und ebenso ω_2, ω_3 für alle Wertepaare $(u, v) \subset \Delta$ linear unabhängig. Aus den Gleichungen (10) folgt dann:

$$\varepsilon\omega_1 = b_3^4\omega_2 - b_2^4\omega_3\,, \quad \varepsilon\omega_4 = -b_3^1\omega_2 + b_2^1\omega_3\,, \quad \varepsilon = b_2^1 b_3^4 - b_3^1 b_2^4 \neq 0\,.$$

Wenn wir diese Relationen in die Gleichung (23) einsetzen, dann bekommen wir leicht:

$$
\begin{aligned}
(28) \qquad & [\omega_2]^2\,[a_1^2 a_2^1 b_3^4 - a_2^4 a_4^2 b_3^1] +\\
& + \omega_2\omega_3[-a_1^2 a_2^1 b_2^4 + a_1^3 a_3^1 b_3^4 + a_2^4 a_4^2 b_2^1 - a_3^4 a_4^3 b_3^1] +\\
& + [\omega_3]^2\,[-a_1^3 a_3^1 b_2^4 + a_3^4 a_4^3 b_2^1] = 0\,.
\end{aligned}
$$

Das Paar P is gerade dann involutorisch, wenn folgende Relationen gelten:

$$(29) \qquad \begin{aligned} a_1^2a_2^1b_3^4 - a_2^4a_4^2b_3^1 &= 0\,, \\ -a_1^3a_3^1b_2^4 + a_3^4a_4^3b_2^1 &= 0\,, \\ -a_1^2a_2^1b_2^4 + a_1^3a_3^1b_3^4 + a_2^4a_4^2b_2^1 - a_3^4a_4^3b_3^1 &= 0\,. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (26), (27), (29) folgt dann die Behauptung des Satzes.

Bemerkung. Die Konstruktion des kanonischen Tetraeders des Paares P und einige Eigenschaften der eizelnen Typen des Paares P findet man bei Iwlev [4].

d) Wir werden voraussetzen, daß für alle Wertepaare $(u, v) \subset \Delta$ die Kongruenz Γ_2 in eine Regelfläche zerfällt. Das Paar der Geradenmannigfaltigkeiten Γ_1, Γ_2 bezeichnen wir mit $\bar{P}$. Für alle Wertepaare $(u, v) \subset \Delta$ sollen noch folgende Bedingungen erfüllt sein: Die Dimension der Berühräume der Punktmannigfaltigkeit K_1 sei gleich 2. Die Kongruenz Γ_1 soll hyperbolisch sein und ihre Brennmannigfaltigkeiten seien regulär. Alle Geraden $p_1 \subset \Gamma_1$ sollen den Charakter 3 haben. Keine Erzeugende der Fläche Γ_2 sei torsal.

Die Eckpunkte A_1, A_4 des Koordinatentetraeders seien wieder die Brennpunkte der Kongruenz Γ_1. Wir setzen voraus, daß α_i, $i = 1, 4$, die Berührebenen in den Brennpunkten bezüglich der zugehörigen Brennflächen sind. Die Eckpunkte A_2, A_3 wählen wir in den Schnittpunkten der Ebenen α_1, bzw. α_4, mit den entsprechenden (in der Korrespondenz C) Geraden von Γ_2. Dann gilt:

$$(30) \qquad \omega_1^3 = 0\,, \quad \omega_4^2 = 0\,.$$

Aus den Relationen (2a), (30) folgt, daß die Formen ω_4^3, ω_1^2 linear unabhängig sind.

Die Berührelemente der durch A_2 gehenden Kurven der Fläche Γ_2 liegen in einer Ebene, ihr Schnittpunkt mit der Geraden p_1 hängt nicht von du, dv ab, es gilt:

$$(31a) \qquad [\omega_2^1, \omega_2^4] = 0\,.$$

Ähnlich gilt folgende Gleichung:

$$(31b) \qquad [\omega_3^1, \omega_3^4] = 0\,.$$

Γ_2 ist die Regelfläche; nach (2b) folgt dann

$$(32) \qquad [\omega_2^1, \omega_3^1] = 0\,.$$

Die weiteren Bedingungen, nämlich

$$[\omega_2^1, \omega_3^4] = 0\,, \quad [\omega_3^4, \omega_2^4] = 0\,, \quad [\omega_3^1, \omega_2^4] = 0$$

sind im allgemeinen von den Gleichungen (31a), (31b), (32) abhängig.

Wählen wir zwei Hauptformen ω_1, ω_4 so, daß

$$\omega_1^2 = a_1^2\omega_1\,, \quad \omega_4^3 = a_4^3\omega_4$$

gilt. Wir führen noch zwei Hauptformen ω_2, ω_3 durch folgende Gleichungen ein:

$$\omega_2^1 = a_2^1\omega_2\,, \quad \omega_2^4 = a_2^4\omega_2\,,$$

$$\omega_3^1 = a_3^1\omega_3\,, \quad \omega_3^4 = a_3^4\omega_3\,.$$

Die angeführten Gleichungen gelten nach (31a), (31b). Weiter sind die Gleichungen

(33) $$\omega_2 = b_2^1\omega_1 + b_2^4\omega_4\,, \quad \omega_3 = b_3^1\omega_1 + b_3^4\omega_4$$

mit der Bedingung

(34) $$b_2^1 b_3^4 - b_2^4 b_3^1 = 0$$

erfüllt.

Wir werden nun die geometrischen Eigenschaften des Paares $\bar{P}$ untersuchen.

Für das feste Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$ betrachten wir die Gerade

$$m = (\varkappa_1 A_1 + \varkappa_4 A_4, \varkappa_2 A_2 + \varkappa_3 A_3)\,.$$

Wenn die Gerade m die zur Richtung s (siehe (4)) gehörende Quasifleknodalgerade des Paares $\bar{P}$ ist, dann gilt:

(35a) $$-\varkappa_1\varkappa_3 a_1^2\omega_1 + \varkappa_2\varkappa_4 a_4^3\omega_4 = 0\,,$$

(35b) $$[-\varkappa_1\varkappa_2 a_2^4 + \varkappa_2\varkappa_4 a_2^1]\,\omega_2 + [-\varkappa_1\varkappa_3 a_3^4 + \varkappa_3\varkappa_4 a_3^1]\,\omega_3 = 0\,.$$

Betrachten wir nun die Eigenschaften der Torsalsysteme des Paares $\bar{P}$. Wir benützen die Bezeichnung des Abschnittes b). Wenn für das feste Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$, $\omega_2 = 0$ gilt, dann gilt gleichzeitig $\omega_3 = 0$. Die zugehörige Fläche Ω_2^2 fällt mit der entsprechenden Fläche Ω_2^3 zusammen. Beide angeführten Flächen zerfallen in die Erzeugende der Fläche Γ_2.

Für das feste Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$ werden wir die Quasifleknodalgeraden des Paares $\Omega_1^2 = \Omega_1^3$, $\Omega_2^2 = \Omega_2^3$ längs der entsprechenden Geraden untersuchen. Aus den Gleichungen (33), (35a) (für $\omega_2 = 0$) folgt:

(36) $$\varkappa_1\varkappa_3 b_2^4 a_1^2 + \varkappa_2\varkappa_4 a_4^3 b_2^1 = 0\,.$$

Die Relation (36) ist die bilineare Gleichung für die Koordinaten der Schnittpunkte der Quasifleknodalgeraden mit den Geraden p_1, p_2. Zum festen Paar $(u, v) \subset \Delta$ und zur Gleichung $\omega_2 = 0$ gehört also im allgemeinen eine Einparameterschar der Quasifleknodalgeraden; diese bilden die Regelfläche zweiter Ordnung.

Wir betrachten die Fälle, daß diese Quadrik zerfällt. Dabei schließen wir die Fälle

$a_1^2 = 0$, $a_4^3 = 0$ aus, bei ihrer Gültigkeit sind nämlich die Relationen (9) nicht erfüllt. Es kann nur eine der folgenden Gleichungen gelten:

$$b_2^1 = 0\,, \quad b_2^4 = 0\,.$$

Gleichzeitig können diese Gleichungen nicht gelten; nach den Voraussetzungen haben die Erzeugenden der Fläche Γ_2 für alle Wertepaare $(u, v) \subset \Delta$ keine Torsalerzeugende.

Setzen wir also voraus, daß für das feste Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$ die Gleichung $b_2^4 = 0$ gilt. Bei der Gültigkeit der Relationen $\omega_2 = 0$ gilt gleichzeitig $\omega_1 = 0$; die Gerade p_1 ist die Torsalerzeugende der Fläche Ω_1^2. Die Quasifleknodalgeraden bilden dann zwei Büschel (A_1, p_2), (A_3, p_1). Ähnlich kann man weitere Fälle, d. h. $b_2^1 = 0$, $b_3^1 = 0$, $b_3^4 = 0$ betrachten.

Satz 5. *Für das feste Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$ setzen wir voraus, daß alle zum Paare $\bar{P}$ gehörenden Geraden $m_1, m_4, \overline{m}_1, \overline{m}_4$ existieren und eindeutig bestimmt sind. Dann liegen diese Geraden auf einer Fläche zweiter Ordnung.*

Beweis. Aus den Relationen (35a), (35b) bekommt man folgende Relationen:

$$\begin{aligned}
&\varkappa_4^1 = 0\,, \quad \varkappa_2^1 a_2^4 b_2^4 + \varkappa_3^1 a_3^4 b_3^4 = 0\,;\\
(37)\qquad &b_3^4(-\bar{\varkappa}_1^1 a_3^4 + \bar{\varkappa}_4^1 a_3^1) = 0\,, \quad \bar{\varkappa}_2^1 = 0\,;\\
&\varkappa_1^4 = 0\,, \quad \varkappa_2^4 a_2^1 b_2^1 + \varkappa_3^4 a_3^1 b_3^1 = 0\,;\\
&b_2^1(-\bar{\varkappa}_1^4 a_2^4 + \bar{\varkappa}_4^4 a_2^1) = 0\,, \quad \bar{\varkappa}_3^4 = 0\,.
\end{aligned}$$

Ähnlich wie im Abschnitt b) folgen aus (37) die Bedingungen für die Fälle, daß eine der Geraden $m_1, m_4, \overline{m}_1, \overline{m}_4$ nicht eindeutig bestimmt ist, oder nicht existiert. Damit werden wir uns nicht beschäftigen.

Nach den Voraussetzungen des Satzes 5 gilt nach (37):

$$\begin{aligned}
m_1 &= (A_1, a_3^4 b_3^4 A_2 - a_2^4 b_2^4 A_3)\,, \quad \overline{m}_1 = (a_3^1 A_1 + a_3^4 A_4, A_3)\,,\\
m_4 &= (A_4, a_3^1 b_3^1 A_2 - a_2^1 b_2^1 A_3)\,, \quad \overline{m}_4 = (a_2^1 A_1 + a_2^4 A_4, A_2)\,.
\end{aligned}$$

Wir finden leicht das Doppelverhältnis ${}^1D$ der Schnittpunkte der Geraden $m_1, m_4, \overline{m}_1, \overline{m}_4$ mit der Geraden p_1:

$${}^1D = \frac{a_2^1 a_3^4}{a_2^4 a_3^1}\,.$$

Ähnlich findet man das Doppelverhältnis ${}^2D$ der Schnittpunkte der Geraden $m_1, m_4, \overline{m}_1, \overline{m}_4$ mit der Geraden p_2:

$${}^2D = \frac{a_2^1 a_3^4 b_2^1 b_3^4}{a_2^4 a_3^1 b_2^4 b_3^1}\,.$$

Nach der Gleichung (34) gilt dann ${}^1D = {}^2D$. Die Geraden $m_1, m_4, \overline{m}_1, \overline{m}_4$ liegen auf einer Fläche zweiter Ordnung.

Satz 6. *Betrachten wir die Quasifleknodalgeraden des Paares $\bar{P}$ längs der sich entsprechenden Geraden p_1, p_2. Dabei schließen wir die zu $\omega_2 = 0$ gehörenden Quasifleknodalgeraden aus. Die übrigen Quasifleknodalgeraden bilden eine Fläche zweiter Ordnung. Für alle Wertepaare von $(u, v) \subset \Delta$ gehören diese Quadriken zum speziellen Komplex der Tangenten der Fläche Γ_2.*

Beweis. Nach (33), (34) gilt:

$$\sigma_2\omega_2 + \sigma_3\omega_3 = 0 .$$

(σ_2, σ_3 sind die Funktionen der erwähnten Parameter.) Daraus folgt nach (35b):

$$[-\varkappa_1\varkappa_2a_2^4 + \varkappa_2\varkappa_4a_2^1]\,\sigma_3 - [-\varkappa_1\varkappa_3a_3^4 + \varkappa_3\varkappa_4a_3^1]\,\sigma_2 = 0 . \tag{38}$$

Für das feste Wertepaar $(u, v) \subset \Delta$ ist die Lage der Schnittpunkte der Quasifleknodalgeraden mit den Geraden p_1, p_2 durch die Größen $\varkappa_1, \varkappa_4, \varkappa_2, \varkappa_3$ bestimmt. Zwischen diesen Größen gilt die Bedingung (38). Diese Quasifleknodalgeraden bilden eine Fläche zweiter Ordnung. Sie zerfällt nur im Falle

$$a_3^1a_2^4 - a_3^4a_2^1 = 0 .$$

Nach den Voraussetzungen des Abschnittes d) ist dieses unmöglich. Wählen wir $\varkappa_1, \varkappa_4, \varkappa_2, \varkappa_3$ so, daß die Gleichung (38) erfüllt ist. Dann bestimmt die Gleichung (35a) die Richtung s. Für diese Richtung ist die betrachtete Gerade quasifleknodal.

Für die festen Wertepaare $(u, v) \subset \Delta$ sollen die Größen $\varkappa_1, \varkappa_4, \varkappa_2, \varkappa_3$ die Relation (35b) erfüllen. Dann gilt:

$$(A_2, A_3, \varkappa_1A_1 + \varkappa_4A_4, \mathrm{d}[\varkappa_2A_2 + \varkappa_3A_3]) = 0 .$$

Die angeführten Quasifleknodalgeraden berühren die Fläche Γ_2. Bei Betrachtung aller Wertepaare $(u, v) \subset \Delta$ gehören dann die zugehörigen Quasifleknodalgeraden zum speziellen Komplex der Tangenten der Fläche Γ_2.

Literatur

[1] *S. P. Finikow:* Theorie der Kongruenzenpaare, Moskau 1956 (Rusisch).

[2] *J. Klapka:* Über Paare der Geradenkongruenzen mit Rosenfeldschen Bild vom Charakter 4. Math. Nachrichten *33* (1967), S. 205—219.

[3] *E. T. Iwlev:* Das Regelflächenpaar im projektiven dreidimensionalen Raume. Trudy gosud. univ. Tomsk *161*, Heft 2, 3—10 (1962) (Russisch).

[4] *E. T. Iwlev:* Das kanonische Bezugssystem eines Kongruenzenpaares im dreidimensionalen projektiven Raum. Trudy gosud. univ. Tomsk *160*, Heft 1, 15—24 (1962) (Russisch).

[5] *A. Švec:* Projective differential geometry of line congruences. Praha 1965.

[6] *J. Vala:* Über die involutorischen Paare der Regelflächen, Mat. časopis, Bratislava, *20* (1970), 11—26.

Anschrift des Verfassers: Brno, Barvičova 85 (Vysoké učení technické).