Časopis pro pěstování matematiky

Josef Korous

Práce prof. Dr. Karla Petra z matematické analýzy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 96 (1971), No. 1, 104--108

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117704`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 96 (1971), Praha

REFERÁTY

PRÁCE PROF. DR. KARLA PETRA Z MATEMATICKÉ ANALÝZY*)

JOSEF KOROUS, Praha

I když těžiště vědeckých prací prof. Petra spočívá v algebře a teorii čísel, je jeho význam pro matematickou analýzu neméně závažný. Prof. Petr výborně ovládal metody klasické analýzy a dovedl ji tvořivě aplikovat. O tom svědčí jeho práce z analytické teorie čísel, v níž dosáhl pozoruhodných výsledků. Jako učitel matematické analýzy byl nepřekonatelný a dovedl své žáky naučit tvořivé práci. Jeho přednášky vynikaly přesností, jasným a přístupným výkladem i nejtěžších problémů. Všechny tři učebnice Petrovy jsou právě z oboru matematické analýzy. K těmto učebnicím se vždy vracím a v mé učitelské praxi jsou mi nepostradatelnou pomůckou. Srovnávám-li podání některého složitějšího problému v různých moderních učebnicích, shledávám skoro pokaždé, že Petrův výklad je nejlepší.

Vědecká práce prof. Petra tkví svými kořeny v problémech, které do matematiky vnesli velcí matematici 19. století. Moderními teoriemi, které vznikly a byly rozvíjeny v 20. století, se prof. Petr ve svých pracích nezabýval, ačkoli je sledoval a dovedl jich použít.

Především se zmíním o některých pracích prof. Petra z teorie funkcí.

Ve dvou z těchto prací se prof. Petr zabýval reálnými funkcemi, spojitými na nějakém intervalu, které nemají v žádném bodě derivaci. První z nich vyšla v r. 1920 v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky, (roč. XLIX, str. 25–31) a má název „Příklad funkce spojité nemající v žádném bodě derivaci".

Jde o zevšeobecnění postupu Peanova. Prof. Petr konstruuje zmíněnou funkci takto:

Budiž

$$0 < \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \,.\, 10^{-\nu} \leqq 1\,,$$

kde a_ν jsou číslice čísla x v dekadickém rozvoji a posloupnost $\{a_n\}$ obsahuje nekonečně mnoho členů od nuly různých. Potom

$$f(x) = \frac{b_1}{2} \pm \frac{b_2}{2^2} \pm \frac{b_3}{2^3} \pm \dots\,; \tag{1}$$

*) Projev přednesený na oslavě 100 let od narození prof. Karla Petra dne 7. června 1968.

přitom

$$2 \mid a_k \Rightarrow b_k = 0\,, \quad 2 \nmid a_k \Rightarrow b_k = 1\,.$$

Jestliže $b_k = 1$, $a_k \neq 9$, má následující člen v (1) znaménko opačné, než je u členu b_k. Jestliže $a_k = 9$ nebo $b_k = 0$, je toto znaménko stejné jako u členu b_k. Autor dokazuje, že $f(x)$ je spojitá na intervalu $(0, 1)$ a nemá v žádném bodě tohoto intervalu derivaci. V závěru podává autor některá zobecnění tohoto postupu.

V pojednání „Poznámka k článku p. Hlaváčka" (Časopis pro pěst. matematiky a fysiky 1931, roč. LX, str. 160–161) provádí prof. Petr zobecnění výsledku v citovaném článku.

Dokazuje tuto větu: *Budiž $\varphi(x)$ funkce lichá, periodická s periodou 2, a nechť*

$$x \in (0, 1) \Rightarrow \varphi(x) = x\,.$$

Potom funkce

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k}\, \varphi(10^k x)$$

je spojitá na množině reálných čísel a nemá v žádném bodě derivaci.

Prof. Petr se ve svých pracích zabýval také funkcemi komplexní proměnné. V pojednání nadepsaném „Integrál Poissonův jako přímý důsledek integrálu Cauchyova" (Časopis pro pěst. matematiky a fysiky 1913, roč. XLII, str. 556–558) uvádí jednoduché odvození Poissonova integrálu pomocí vztahu

$$(1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}\,,$$

kde K je kružnice $\zeta = Re^{i\varphi}$, $z = re^{i\psi}$, $r < R$. Jestliže

$$\zeta_1 = R^2 \zeta^{-1}\,, \quad z_1 = r^2 z^{-1}\,,$$

potom

$$(2) \qquad 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(\zeta)}{\zeta_1 - z_1} \frac{z_1}{\zeta}\,d\zeta\,.$$

Sečtením (1) a (2) vyjde

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{\zeta\zeta_1 - zz_1}{(\zeta - z)(\zeta_1 - z_1)} \frac{f(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta\,,$$

odkud

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \psi) + r^2}\, f(Re^{i\varphi})\,d\varphi\,.$$

Poissonův integrál obdržíme pak, rozepíšeme-li poslední vztah pro část reálnou a část imaginární.

Pokud jsem zjistil, je toto Petrovo odvození Poissonova integrálu původní.

Odečtením (2) od (1) odvozuje prof. Petr další vztahy.

V pojednání „O některých rozvojích trigonometrických v theorii funkce gamma" (Rozpravy České akademie věd a umění II. tř., 1928, roč. XXXVII, str. 1–6) odvozuje prof. Petr trigonometrický rozvoj pro funkci lg $\Gamma(x)$ pomocí Gaussovy formule pro $\Gamma(x)$.

Autor podává nový tvar tohoto rozvoje, a to tvar, který lze člen po členu derivovat, a tím dostává rozvoj pro liché derivace funkce lg $\Gamma(x)$. Je to mj. zobecnění Lerchova výsledku pro Fourierovu řadu funkce

$$\sin \pi x \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} .$$

Prof. Petr vychází z Gaussovy relace

$$\lg \Gamma\left(x + \frac{v}{m}\right) = \frac{m-1}{2} \lg(2\pi) - \left(mx - \frac{1}{2}\right) \lg m + \lg \Gamma(mx) ,$$

kde m je přirozené číslo.

Ze vztahu $\lg \Gamma(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos 2\pi\nu x + b_\nu \sin 2\pi\nu x)$ odvozuje autor užitím velmi důvtipných obratů vztah

$$\lg \Gamma(x) = \tfrac{1}{2} \lg \frac{\pi}{\sin \pi x} + [\lg(2\pi) + C](\tfrac{1}{2} - x) + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\lg \nu}{\pi\nu} \sin(2\pi\nu x) ,$$

kde C je Eulerova konstanta a $x \in [0, 1]$.

Derivováním tohoto rozvoje odvozuje autor další vztahy.

Práce „O polynomech bernoullíských" (Rozpravy České akademie věd a umění II. tř., 1943, roč. LIII, str. 16) je na rozhraní mezi matematickou analyzou a teorií čísel. Autor v ní vychází z definice bernoullískych polynomů $\varphi_k(x)$ pomocí diferenční rovnice

$$\varphi_k(x+1) - \varphi_k(x) = x , \quad \varphi_k(0) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots) .$$

Zavádí polynomy

$$\mathfrak{A}_k(x) = \binom{x+k-1}{2k}(2k-1)!$$

$$\mathfrak{B}_k(x) = \frac{1}{2}\left[\binom{x+k}{2k+1} + \binom{x+k-1}{2k+1}\right](2k)! ,$$

pomocí kterých odvozuje následující vyjádření bernoullískych polynomů

$$\varphi_{2r-1}(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} c_\nu^{(r)} \mathfrak{A}_{r-\nu}(x) , \quad \varphi_{2r}(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} c_\nu^{(r)} \mathfrak{B}_{r-\nu}(x) ,$$

kde r je přirozené číslo. Dokazuje, že čísla $c_\nu^{(r)}$ jsou celá a odvozuje pro ně rekurentní vzorec. Dále odvozuje číselně teoretické vztahy pro bernoullíské funkce a bernoullíská čísla, z nichž mj. plynou Maclaurinovy řady pro tg x a sec x.

Zmíněná práce je cenná a vynikající. Přináší pozoruhodné výsledky a je živá i dnes. Obsahuje řadu složitých úvah a výpočtů velmi obratně prováděných. Pozoruhodná je i tím, že ji prof. Petr vypracoval v 75 letech svého věku.

Prof. Petr se ve svých pracích často zabýval eliptickými funkcemi a funkcemi theta. S úspěchem je aplikoval na analytickou teorii čísel. Z prací, které nepatří do analytické teorie čísel a pojednávají o funkcích theta, zmiňuji se o dvou. Jsou to: „Lineární transformace theta funkcí" (Rozpravy České akademie a umění II. tř., 1927, roč. XXXVI, str. 1–10), a „Poznámka o integrálech hypergeometrické diferenciální rovnice" (Časopis pro pěst. matematiky a fysiky, 1909, roč. XXXVIII, str. 294–306). V první z těchto prací autor podává nové odvození činitelů vyskytujících se při lineární transformaci theta funkcí, a to pomocí definice Legendre-Jacobiho symbolu na základě Gaussova lemmatu. V druhé práci pak odvozuje vlastnosti řešení hypergeometrické rovnice z jejich vyjádření pomocí theta-funkcí.

Prof. Petr věnoval ve svých pracích mnoho péče a pozornosti numerickým výpočtům. Vždy zastával zásadu, že konečným cílem matematických úvah je numerický výsledek. Sám byl mistrem v numerickém počítání a tomuto oboru věnoval mnoho místa ve svých učebnicích. Napsal několik pojednání z numerické analýzy. Zmíním se zde o dvou pracích týkajících se numerického výpočtu Riemannových integrálů.

První z nich je pojednání z r. 1914 „O výpočtu eliptických integrálů 1. a 2. druhu pomocí středu aritmeticko-geometrického" (Časopis pro pěst. matematiky a fysiky roč. XLIII, str. 332–350). V této práci autor vychází za známé věty

$$\lim b_n = \lim c_n = M(b_0, c_0)\,,$$

kde pro $n = 1, 2, \ldots$

$$b_0 > c_0 > 0\,, \quad b_n = \tfrac{1}{2}(b_{n-1} + c_{n-1})\,, \quad c_n = \sqrt{(b_{n-1}c_{n-1})}\,.$$

Dále

$$a_n^2 = b_n^2 - c_n^2\,, \quad a_n > 0\,.$$

Uvažujte pak eliptické integrály

$$I_1 = \int_0^{\Phi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{(b_0^2 - a_0^2 \sin^2 \varphi)}}\,, \quad I_2 = \int_0^{\Phi_0} \frac{a_0^2 \sin^2 \varphi \, d\varphi}{\sqrt{(b_0^2 - a_0^2 \sin^2 \varphi)}}\,,$$

kde $\Phi_0 \in [0, \frac{1}{2}\pi]$.

Opětovanou záměnou integrační proměnné pomocí vztahu

$$(*) \qquad \operatorname{tg}(\varphi_k - \varphi_{k-1}) \equiv \frac{c_{k-1}}{c_k} \operatorname{tg} \varphi_k\,, \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

odvozuje pro $r = 1, 2, \ldots$

$$I_1 = 2^{-r} \int_0^{\Phi_r} \frac{d\varphi}{\sqrt{(b_r^2 - a_r^2 \sin^2 \varphi)}} = \frac{\Phi_r}{2^r M(b_0, c_0)} + \frac{\varepsilon_r}{2^r},$$

kde $\varepsilon_r \to 0$ pro $r \to +\infty$. Existuje tedy $\lim (\Phi_n/2^n) = \Phi$. Pro $\Phi_0 = \frac{1}{2}\pi$ je $\Phi = \frac{1}{2}\pi$.

Analogický – poněkud složitější – výsledek odvozuje autor pro I_2.

Jestliže a_0^2/b_0^2 (modul integrálů I_1 a I_2) je blízký číslu 1, používá autor substituce inversní k substituci (*). V závěru ukazuje, jak je možno těchto výsledků použít k numerickým výpočtům.

V pojednání „Poznámka k numerickému výpočtu integrálu“ (Časopis pro pěst. matematiky, 1927, roč. LVI, str. 67–70) odvozuje prof. Petr pro výpočet integrálu $\int_{-1}^{1} (x)\, dx$ vzorec podobný Euler-Maclarinově formuli za předpokladu, že jsou známy hodnoty $f^{(\nu)}(x)$ v bodech $x = -1, 0, 1$ pro $\nu = 0, 1, \ldots, k$.

Podobnou tematikou se zabýval prof. Petr již předtím.

Z výše uvedeného je patrno, že výsledky prací prof. Petra z matematické analýzy i z numerické analýzy jsou dodnes živé. Mohou být podkladem a podnětem pro další práce i moderně zaměřené. Jsou školou přesného matematického myšlení. Proto by jim měli věnovat pozornost i matematikové mladší generace.