Svatoslav Staněk

Angenäherte Lösung eines Systems von Integro-Differentialgleichungen mittels der Methode von S. A. Tschaplygin

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 95 (1970), No. 3, 256--268

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117697`

ANGENÄHERTE LÖSUNG EINES SYSTEMS VON INTEGRO-DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MITTELS DER METHODE VON S. A. TSCHAPLYGIN

SVATOSLAV STANĚK, Olomouc

(Eingelangt am 21. November 1968)

1. FORMULIERUNG DES PROBLEMS

Es sei ein Integro-Differentialgleichungssystem

(1′)

$$y'_k(x) = F_k(x, y_\mu(x), y_\mu(\alpha_\mu(x)), y'_\mu(\alpha_\mu(x))) + \int_a^x S_k(x, t, y_\mu(t), y_\mu(\alpha_\mu(t)), y'_\mu(\alpha_\mu(t)))\,dt \equiv$$
$$\equiv F_k[x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1(\alpha_1(x)), \ldots, y_n(\alpha_n(x)), y'_1(\alpha_1(x)), \ldots, y'_n(\alpha_n(x))] +$$
$$+ \int_a^x S_k[x, t, y_1(t), \ldots, y_n(t), y_1(\alpha_1(t)), \ldots, y_n(\alpha_n(t)), y'_1(\alpha_1(t)), \ldots, y'_n(\alpha_n(t))]\,dt$$

($x \in I = \langle a, b \rangle$, $b > a$) mit den Anfangsbedingungen

(1″)
$$y_k^{(i)}(x) = \varphi_k^{(i)}(x) \quad x \in I_a^k$$
$$\varphi'_k(a) = F_k(a, \varphi_\mu(a), \varphi_\mu(\alpha_\mu(a)), \varphi'_\mu(\alpha_\mu(a)))$$

($i = 0, 1$; $k = 1, 2, \ldots, n$) gegeben. Die Funktionen $\alpha_k(x) < x$ bzw. $\varphi_k^{(i)}(x)$ seien stetig auf I bzw. I_a^k; $I_a^k = \{\alpha_k : \alpha_k(x) \leqq a, x \in I\}$.

$\mathscr{D}$ soll eine offene, beschränkte und konvexe Untermenge des $(3n + 1)$-dimensionalen Raumes $(x, y_\mu, y_\mu(\alpha_\mu), y'_\mu(\alpha_\mu))$ bedeuten, die den Punkt $(a, \varphi_\mu(a), \varphi_\mu(\alpha_\mu(a)), \varphi'_\mu(\alpha_\mu(a)))$ enthält.

Wir setzen weiter voraus, daß die Funktionen $F_k(.)$, $S_k(t, .)$ $(t \in I)$ auf $\mathscr{D}$ definiert und stetig in x sind (S_k gleichzeitig auch in t), daß sie stetige, von unten beschränkte partielle Ableitungen besitzen (A_{kj}^l, B_{kj}^l – Konstanten; $l = 1, 2, 3$; $k, j = 1, 2, \ldots, n$)

$$(2) \qquad A^1_{kj} \leqq \frac{\partial F_k}{\partial y_j}, \quad A^2_{kj} \leqq \frac{\partial F_k}{\partial y_j(\alpha_j)}, \quad A^3_{kj} \leqq \frac{\partial F_k}{\partial y'_j(\alpha_j)},$$

$$B^1_{kj} \leqq \frac{\partial S_k}{\partial y_j}, \quad B^2_{kj} \leqq \frac{\partial S_k}{\partial y_j(\alpha_j)}, \quad B^3_{kj} \leqq \frac{\partial S_k}{\partial y'_j(\alpha_j)}$$

und daß sie schließlich in jedem Punktepaar $(\xi, \vartheta^1_\mu, \pi^1_\mu, \varrho^1_\mu)$, $(\xi, \vartheta^2_\mu, \pi^2_\mu, \varrho^2_\mu)$ aus $\mathcal{D}$ die Ungleichheiten ($\xi \leqq t \in I$; L konstant)

$$(3) \quad |F_k(\xi, \vartheta^1_\mu, \pi^1_\mu, \varrho^1_\mu) - F_k(\xi, \vartheta^2_\mu, \pi^2_\mu, \varrho^2_\mu)| \leqq L\sum_{j=1}^{n}\{|\vartheta^1_j - \vartheta^2_j| + |\pi^1_j - \pi^2_j| + |\varrho^1_j - \varrho^2_j|\}$$

$$|S_k(t, \xi, \vartheta^1_\mu, \pi^1_\mu, \varrho^1_\mu) - S_k(t, \xi, \vartheta^2_\mu, \pi^2_\mu, \varrho^2_\mu)| \leqq$$

$$\leqq L\sum_{j=1}^{n}\{|\vartheta^1_j - \vartheta^2_j| + |\pi^1_j - \pi^2_j| + |\varrho^1_j - \varrho^2_j|\}$$

erfüllen.

Unter diesen Voraussetzungen werden wir den Satz 1 beweisen, der eine gewisse Analogie des Tschaplyginschen Satzes über Differentialungleichheiten darstellt und den Satz 2, der u. a. auch die Behauptung enthält, daß die Aufgabe (1) auf I genau eine Lösung in der Klasse der stetig defferenzierbaren Funktionen hat. Ähnliche Resultate finden wir bei T. Amankulov [1] unter der Voraussetzung daß $\alpha_k(x) \equiv \alpha(x)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$; $x \in I$) ist und daß alle partiellen Ableitungen die in (2) auftreten nicht negativ (nicht positiv) und „genügend klein" bleiben (d. h. daß die Ungleichheit (4) in [1] erfüllt ist).

2. SATZ ÜBER ANNÄHERUNG DER LÖSUNG DER AUFGABE (1) IM SINNE VON S. A. TSCHAPLYGIN

Wir führen zunächst das folgende Lemma an:

Lemma 1. $\alpha_k(x)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) *seien die Funktionen die in der Gleichung* (1) *auftreten und weiter seien* $C^l_{kj}(x)$, $D^l_{kj}(x)$ ($l = 1, 2, 3$; $k, j = 1, 2, \ldots, n$) *nichtnegative beschränkte Funktionen auf* I, $D^l_{kj}(x)$ *auf* I *integrierbar. Wir bezeichnen mit* $w_k(x)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) *beliebige, stetig differenzierbare Funktionen auf* I ($w^{(i)}_k(x) = 0$ *für* $x \in I^k_a$; $i = 0, 1$), *welche folgenden Ungleichungen*

$$(4) \qquad w'_k(x) \geqq \sum_{j=1}^{n}\{C^1_{kj}(x)\, w_j(x) + C^2_{kj}(x)\, w_j(\alpha_j(x)) + C^3_{kj}(x)\, w'_j(\alpha_j(x))\} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}\int_a^x\{D^1_{kj}(t)\, w_j(t) + D^2_{kj}(t)\, w_j(\alpha_j(t)) + D^3_{kj}(t)\, w'_j(\alpha_j(t))\}\, \mathrm{d}t$$

genügen. Dann gilt auf I:

$$w_k^{(i)}(x) \geqq 0 \quad (i = 0, 1;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Beweis. Es genügt offenbar auf I folgende Relationen

$$(5) \qquad w_k'(x) \geqq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

zu beweisen. Setzen wir also das Gegenteil voraus. Es gibt Indexe $k_1 < k_2 < \ldots < k_s$ (die Menge dieser Indexe bezeichnen wir mit k'; die Menge der übrigen Indexe sei k''), eine Zahl $x_0 \in I$ und eine rechte Umgebung $U(x_0) \subset I$ der Zahl x_0 so, daß für jedes $k \in k'$ folgendes gilt:

a) $w_k'(x_0) = 0$.

b) Zu jeder beliebigen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $x_\varepsilon \in U(x_0)$, $x_\varepsilon < x + \varepsilon$ so, daß $w_k'(x_\varepsilon) < 0$.

(Für $k \in k''$ und $x \in U(x_0)$ gilt $w_k'(x) \geqq 0$.)

Es sei nun x_0 die kleinste Zahl in I mit den angeführten Eigenschaften. Für $a \leqq \leqq x \leqq x_0$ und $k \in k' \cup k''$ gelten also die Ungleichheiten (5). Mittels der Voraussetzung $\alpha_k(x) < x$ können wir die Umgebung $U(x_0)$ noch dermaßen verkürzen, daß (wir benutzen die früheren Bezeichnungen) $\alpha_k(x) \leqq x_0$ wenn $x \in U(x_0)$ und $k \in \in k' \cup k''$. Für ein beliebiges Index k und $x \in U(x_0)$ haben wir die Ungleichheit

$$w_k'(x) \geqq \sum_{j \in k'} \left\{ C_{kj}^1(x)\, w_j(x) + \int_{x_0}^{x} D_{kj}^1(t)\, w_j(t)\, \mathrm{d}t \right\}$$

(in (4) haben wir nämlich $w_k(\alpha_k(x)) \geqq 0$, $w_k'(\alpha_k(x)) \geqq 0$ ($w_k(x) \geqq 0$ für $k \in k''$)). Durch Anwendung der Formel

$$w_j(x) = w_j(x_0) + w_j'(\xi_j)(x - x_0)$$

($\xi_j = \xi_j(x) \in (x_0, x)$), fließt schließlich die Ungleichheit ($w_j(x_0) \geqq 0$)

$$w_k'(x) \geqq \sum_{j \in k'} \left\{ C_{kj}^1(x)\, w_j'(\xi_j)(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} D_{kj}^1(t)\, w_j'(\xi_j)(t - x_0)\, \mathrm{d}t \right\}$$

hervor. Wenn wir die letzte Ungleichheit durch -1 mutltiplizieren, so bekommen wir

$$(6) \quad -w_k'(x) \leqq \sum_{j \in k'} \left\{ C_{kj}^1(x)\,(-w_j'(\xi_j))(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} D_{kj}^1(t)\,(-w_j'(\xi_j)(t - x_0)\, \mathrm{d}t \right\}.$$

Setzen wir nun ($j \in k'$; $x \in U(x_0)$)

$$M_j(x) = \sup_{x_0 < t \leqq x} (-w_j'(t)) \quad (>0).$$

Aus den Voraussetzungen über die Funktionen $C^l_{kj}(x)$, $D^l_{kj}(x)$, folgern wir die Existenz zweier Konstanten $C > 0$, $D > 0$ so, daß $C^l_{kj}(x) \leqq C$, $D^l_{kj}(x) \leqq D$ auf I gilt. Aus (6) folgt dann sofort

$$M_k(x) \leqq \sum_{j\in k'} \left(C(x - x_0) + D \frac{(x - x_0)^2}{2} \right) M_j(x) .$$

Da die Menge k' genau s Elemente enthält, können wir mittels det letzten Ungleichheit die Relation

$$\sum_{j\in k'} M_j(x) \leqq s(x - x_0) \left(C + D \frac{x - x_0}{2} \right) \sum_{j\in k'} M_j(x)$$

aufstellen und daraus wenn wir durch die positive Zahl $\sum_{j\in k'} M_j(x)$ dividieren

$$1 \leqq s(x - x_0) \left(C + D \frac{x - x_0}{2} \right) ,$$

was aber ein Widerspruch ist. Die rechte Seite der letzten Ungleichheit kann nämlich beliebig klein werden. Unser Lemma ist somit bewiesen.

In folgendem Satz führen wir Bedingungen an, welche dazu genügen, daß die Funktion $v(x) = (v_1(x), \ldots, v_n(x))$ eine untere bzw. obere Aproximation einer beliebigen Lösung der Aufgabe (1) darstelle (soweit diese existiert).

Satz 1. *Die Funktionen* $z(x) = (z_1(x), \ldots, z_n(x))$, $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_n(x))$ *mögen folgende Bedingungen erfüllen*:

1. *Sie sind auf I stetig differenzerbar.*
2. *Für jedes $x \in I$ liegen die Punkte* $(x, z_\mu(x), z_\mu(\alpha_\mu(x)), z'_\mu(\alpha_\mu(x)))$, $(x, \mu_\mu(x), u_\mu(\alpha_\mu(x)), \mu'_\mu(\alpha_\mu(x)))$ *in* $\mathscr{D}$.

(7) 3. $z^{(i)}_k(x) = u^{(i)}_k(x) = \varphi^{(i)}_k(x) \quad (x \in I^k_a;\ i = 0, 1)$

(8′) 4. $\beta_k(x; z, u) \equiv z'_k(x) - F_k(x, z_\mu(x), z_\mu(\alpha_\mu(x)), z'_\mu(\alpha_\mu(x))) -$

$$- \int_a^x S_k(x, t, z_\mu(t), z_\mu(\alpha_\mu(t)), z'_\mu(\alpha_\mu(t)))\, dt - A_k(x; z, u) \geqq 0$$

(8″) $\gamma_k(x; z, u) \equiv u'_k(x) - F_k(x, u_\mu(x), u_\mu(\alpha_\mu(x)), u'_\mu(\alpha_\mu(x))) -$

$$- \int_a^x S_k(x, t, u_\mu(t), u_\mu(\alpha_\mu(t)), u'_\mu(\alpha_\mu(t)))\, dt + A_k(x; z, u) \leqq 0 \quad (x \in I)$$

wo

$$A_k(x; z, u) = \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \{[|A^1_{kj}| - A^1_{kj}]\,(z_j(x) - u_j(x)) + [|A^2_{kj}| - A^2_{kj}]\,(z_j(\alpha_j(x)) -$$
$$- u_j(\alpha_j(x))) + [|A^3_{kj}| - A^3_{kj}]\,(z'_j(\alpha_j(x)) - u'_j(\alpha_j(x)))\} +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \int_a^x \{[|B^1_{kj}| - B^1_{kj}]\,(z_j(t) - u_j(t)) + [|B^2_{kj}| - B^2_{kj}]\,(z_j(\alpha_j(t)) -$$
$$- u_j(\alpha_j(t))) + [|B^3_{kj}| - B^3_{kj}]\,(z'_j(\alpha_j(t)) - u'_j(\alpha_j(t)))\}\,dt\,.$$

Dann sind auf I die Relationen

$$u_k^{(i)}(x) \leqq y_k^{(i)}(x) \leqq z_k^{(i)}(x) \quad (i = 0, 1,;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

erfüllt, wo $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$ eine beliebige (stetig differenzierbare) Lösung der Aufgabe (1) bedeutet (die Existenz dieser Lösung wird vorausgesetzt).

Beweis. Wir setzen $w_k(x) = z_k(x) - u_k(x)$, $d_k(x) = y_k(x) - u_k(x)$, $p_k(x) = z_k(x) - - y_k(x)$. Aus (7) folgt sogleich auf I_a^k identisch

(9) $$w_k^{(i)}(x) = d_k^{(i)}(x) = p_k^{(i)}(x) = 0\,.$$

Einfachheitshalber werden wir für den ganzen folgenden Text noch diese Bezeichnung einführen ($z(x)$, $u(x)$ bedeuten hier beliebige Funktionen, welche den Voraussetzungen 1–3 des Satzes 1 genügen; $l = 1, 2$)

(10) $$B_k^{\mathcal{N}}(F, S, z, u, l) = \sum_{j\in\mathcal{N}} \left\{\left[|A^1_{kj}| - A^1_{kj} + l\,\frac{\partial F_k}{\partial y_j}\right](z_j(x) - u_j(x)) + \right.$$
$$+ \left[|A^2_{kj}| - A^2_{kj} + l\,\frac{\partial F_k}{\partial y_j(\alpha_j)}\right](z_j(\alpha_j(x)) - u_j(\alpha_j(x))) +$$
$$\left. + \left[|A^3_{kj}| - A^3_{kj} + l\,\frac{\partial F_k}{\partial y'_j(\alpha_j)}\right](z'_j(\alpha_j(x)) - u'_j(\alpha_j(x)))\right\} +$$
$$+ \sum_{j\in\mathcal{N}} \int_a^x \left\{\left[|B^1_{kj}| - B^1_{kj} + l\,\frac{\partial S_k}{\partial y_j}\right](z_j(t) - u_j(t)) + \right.$$
$$+ \left[|B^2_{kj}| - B^2_{kj} + l\,\frac{\partial S_k}{\partial y_j(\alpha_j)}\right](z_j(\alpha_j(t)) - u_j(\alpha_j(t))) +$$
$$\left. + \left[|B^3_{kj}| - B^3_{kj} + l\,\frac{\partial S_k}{\partial y'_j(\alpha_j)}\right](z'_j(\alpha_j(t)) - u'_j(\alpha_j(t)))\right\} dt\,.$$

$\mathcal{N}$ bedeutet hier die Menge aller Indexe für welche wir die Summation auf der rechten Seite von (10) durchführen (d. h. eine Untermenge der Menge $\mathcal{M} = \{1, 2, \ldots, n\}$) und in den Argumenten der partiellen Ableitungen von F_k bzw. S_k steht $(x, z_\mu(x),$

$z_\mu(\alpha_\mu(x)), z'_\mu(\alpha_\mu(x)))$ bzw. $(x, t, z_\mu(t), z_\mu(\alpha_\mu(t)), z'_\mu(\alpha_\mu(t)))$. Durch $B_k^{\mathcal{N}}(\bar{F}, \bar{S}, z, u, l)$ werden wir weiterhin den Funktionenwert der Funktion auf der rechten Seite der Definitionsgleichheit bezeichnen, wo für Argumente der partiellen Ableitungen von F_k, S_k die Koordinaten geeigneter Punkte aus $\mathcal{D}$ eingesetzt sind. Wir heben schließlich noch die Relation $\frac{1}{2}B_k^{\mathcal{M}}(0, 0, z, u, l) = A_k(x; z, u)$ hervor.

Wir multiplizieren nun die Ungleichheit (8″) durch die Zahl -1 und addieren sie nachher mit (8′). Wenn wir die Taylorsche Formel benutzen um den Wert des Ausdruckes

$$F_k(x, z_\mu(x), z_\mu(\alpha_\mu(x)), z'_\mu(\alpha_\mu(x))) - F_k(x, u_\mu(x), u_\mu(\alpha_\mu(x)), u'_\mu(\alpha_\mu(x))) +$$
$$+ \int_a^x \{S_k(x, t, z_\mu(t), z_\mu(\alpha_\mu(t)), z'_\mu(\alpha_\mu(t))) - S_k(x, t, u_\mu(t), u_\mu(\alpha_\mu(t)), u'_\mu(\alpha_\mu(t)))\} \, dt +$$
$$+ 2A_k(x; z, u)$$

zu erreichen, so kommen wir nach einfachen Umformungen zur Ungleichheit

$$w'_k(x) \geqq B_k^{\mathcal{M}}(\bar{F}, \bar{S}, z, u, 1) .$$

Da alle Ausdrücke in eckigen Klammern auf der rechten Seite der Definitionsgleichheit (10) für $B_k^{\mathcal{M}}(\bar{F}, \bar{S}, z, u, 1)$ nicht negativ sind haben wir laut Lemma 1 auf I

(11) $$w_k^{(i)}(x) \geqq 0 \quad (i = 0, 1;\ k = 1, 2, \ldots, n) .$$

Wir gehen jetzt zum Beweise der Ungleichheiten $(x \in I)$

(12) $$d_k^{(i)}(x) \geqq 0 , \quad p_k^{(i)}(x) \geqq 0 .$$

Aus (11) bekommen wir zunächst

(13) $$d_k^{(i)}(x) + p_k^{(i)}(x) \geqq 0 .$$

Setzen wir voraus daß (12) nicht richtig ist. Dann gibt es

a) Eine Zahl $x_0 \in I$ so, daß (12) auf $\langle a, x_0 \rangle$ für jedes k und jedes i gilt.

b) Eine rechte Umgebung $U(x_0) \subset I$ von x_0 und die Indexenmengen k', k'', $k' \cup \cup k'' \subset \mathcal{M}$ so daß zu jedem $k \in k' (k \in k'')$ und $\varepsilon > 0$ ein ${}^1x_k^\varepsilon \in U(x_0)$ $({}^2x_k^\varepsilon \in U(x_0))$, ${}^1x_k^\varepsilon < x_0 + \varepsilon$ $({}^2x_k^\varepsilon < x_0 + \varepsilon)$ existiert, für welches $d'_k({}^1x_k^\varepsilon) < 0$ $(p'_k({}^2x_k^\varepsilon) < 0)$; $d'_k(x) \geqq 0$ $(p'_k(x) \geqq 0)$ für $k \in \mathcal{M} - k'$ $(k \in \mathcal{M} - k'')$ und $x \in U(x_0)$.

Es sei $k_0 \in k'$, $l_0 \in k''$ (eine der Mengen k' bzw. k'' kann auch leer sein). Durch Anwendung der Voraussetzungen (8), der Taylorschen Formel und (1′) kommen wir zu den Relationen

(14) $$d'_{k_0}(x) \geqq \tfrac{1}{2}B_{k_0}^{\mathcal{M}}(\bar{F}, \bar{S}, y, u, 2) + A_{k_0}(x; z, y) ,$$
$$p'_{l_0}(x) \geqq \tfrac{1}{2}B_{l_0}^{\mathcal{M}}(\bar{F}, \bar{S}, z, y, 2) + A_{l_0}(x; y, u) .$$

Aus (2), (13), (14) und aus den Eigenschaften der Mengen k', k'' folgen die Relationen ($x \in U(x_0)$):

a) für $k_0 \in k'$

$$d'_{k_0}(x) \geqq \tfrac{1}{2}B_{k_0}^{k'}(\bar{F}, \bar{S}, y, u, 2) + \tfrac{1}{2}B_{k_0}^{k''}(0, 0, z, y, 2) \tag{15}$$

b) für $l_0 \in k''$.

$$p'_{l_0}(x) \geqq \tfrac{1}{2}B_{l_0}^{k''}(\bar{F}, \bar{S}, z, y, 2) + \tfrac{1}{2}B_{l_0}^{k'}(0, 0, y, u, 2)\,. \tag{16}$$

(15) und (16) geben zusammen ein Ungleichungssystem. Laut Lemma 1 müssen die Funktionen $d'_{k_0}(x)$, $p'_{l_0}(x)$ nichtnegativ sein und daher ist die Menge $k' \cup k''$ leer, w. z. b. w.

Bemerkung 1. Wir wollen noch Funktionen $u(x)$, $z(x)$ konstruiren die den Voraussetzungen des Satzes 1 genügen.

Wir setzen dazu

$$\begin{aligned} Y_k(x; u, z) &= F_k(x, u_\mu(x), u_\mu(\alpha_\mu(x)), u'_\mu(\alpha_\mu(x))) + \\ &\quad + \int_a^x S_k(x, t, u_\mu(t), u_\mu(\alpha_\mu(t)), u'_\mu(\alpha_\mu(t)))\,\mathrm{d}t + A_k(x; u, z) \\ V_k(x; u, z) &= F_k(x, u_\mu(x), u_\mu(\alpha_\mu(x)), u'_\mu(\alpha_\mu(x))) + \\ &\quad + \int_a^x S_k(x, t, u_\mu(t), u_\mu(\alpha_\mu(t)), u'_\mu(\alpha_\mu(t)))\,\mathrm{d}t - A_k(x; z, u) \end{aligned}$$

$$\bar{M}_k(x) = \sup Y_k(x; u, z)\,, \quad \bar{m}_k(x) = \inf V_k(x; u, z) \tag{17}$$

wo, bei festem x, die Grenzen sup bzw. inf in der Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$, $z(t) = (z_1(t), \ldots, z_n(t))$ genommen werden, welche auf $\langle a, x\rangle$ definiert sind ($u_k^{(i)}(t) = z_k^{(i)}(t) = \varphi_k^{(i)}(t)$ für $t \in I_a^k$) und für welche die Punkte ($t \in \langle a, x\rangle$) $(t, u_\mu(t), u_\mu(\alpha_\mu(t)), u'_\mu(\alpha_\mu(t)))$, $(t, z_\mu(t), z_\mu(\alpha_\mu(t)), z'_\mu(\alpha_\mu(t)))$ in $\mathscr{D}$ liegen. $\bar{M}_k(x)$ und $\bar{m}_k(x)$ definieren wir für solche x, für welche sup und inf in (17) einen Sinn hat. $\bar{x}$ sei noch das Supremum solcher x. Wir haben bestimmt $\bar{x} > a$.

Mittels $\bar{M}_k(x)$ und $\bar{m}_k(x)$ definieren wir zwei stetige Funktionen auf $\langle a, \bar{x})$ $M_k(x) = \sup\limits_{a \leqq t \leqq x} \bar{M}_k(t)$, $m_k(x) = \inf\limits_{a \leqq t \leqq x} \bar{m}_k(t)$. Wir bemerken noch, daß vermöge (1″) $M_k(a) = m_k(a) = \bar{M}_k(a) = \bar{m}_k(a) = \varphi'_k(a)$ ist. Liegt die Menge der Punkte $(x, z_\mu(x), z_\mu(\alpha_\mu(x)), z'_\mu(\alpha_\mu(x)))$, $(x, u_\mu(x), u_\mu(\alpha_\mu(x)), u'_\mu(\alpha_\mu(x)))$ in $\mathscr{D}$ für $x \in I$ ($I \subset \langle a, \bar{x})$) und gilt dabei

$$z_k(x) = \varphi_k(a) + \int_a^x M_k(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad u_k(x) = \varphi_k(a) + \int_a^x m_k(t)\,\mathrm{d}t$$

$(z_k^{(i)}(x) = u_k^{(i)}(x) = \varphi_k^{(i)}(x)$ für $x \in I_a^k)$, so kann man sich leicht überzeugen, daß die Funktionen $z(x) = (z_1(x), \ldots, z_n(x))$ und $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_n(x))$ den Voraussetzungen des Satzes 1 genügen.

3. DIE METHODE DER SCHRITTWEISEN ANNÄHERUNGEN

In diesem Absatz werden wir einen Satz beweisen, der ein Algorithmus für die „untere" und „obere" Annäherung der Lösung der Aufgabe (1) angibt. Gleichzeitig wird auch Existenz und Eindeutigkeit der Lösung dieser Aufgabe bewiesen.

Satz 2. $^0z(x) = (^0z_1(x), \ldots, ^0z_n(x))$, $^0u(x) = (^0u_1(x), \ldots, ^0u_n(x))$ *seien Funktionen, die den Voraussetzungen des Satzes* 1 *genügen. Setzen wir* $(k = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots)$

$$(18') \qquad {}^jz_k(x) = {}^{j-1}z_k(x) - \int_a^x \beta_k(t; {}^{j-1}z, {}^{j-1}u)\, dt$$

$$(18'') \qquad {}^ju_k(x) = {}^{j-1}u_k(x) - \int_a^x \gamma_k(t; {}^{j-1}z, {}^{j-1}u)\, dt \quad (x \in I)$$

$$(18''') \qquad {}^ju_k^{(i)}(x) = {}^jz_k^{(i)}(x) = \varphi_k^{(i)}(x) \quad (x \in I_a^k,\ i = 0, 1)$$

(die Funktionen $\beta_k(x; z, u)$, $\gamma_k(x; z, u)$ *haben wir im Satz* 1 *eingeführt). Dann gelten auf* I *folgende Ungleichheiten*

$$(19) \qquad {}^{j-1}u_k^{(i)}(x) \leqq {}^ju_k^{(i)}(x) \leqq y_k^{(i)}(x) \leqq {}^jz_k^{(i)}(x) \leqq {}^{j-1}z_k^{(i)}(x)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ i = 0, 1),$$

wo $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$ *die einzige Lösung der Aufgabe* (1) *auf* I *bedeutet. Dabei konvergieren die Folgen* $\{^ju^{(i)}(x)\} = \{(^ju_1^{(i)}(x), \ldots, ^ju_n^{(i)}(x))\}$, $\{^jz^{(i)}(x)\} = \{(^jz_1^{(i)}(x), \ldots, ^jz_n^{(i)}(x))\}$ *gleichmäßig gegen* $y^{(i)}(x) = (y_1^{(i)}(x), \ldots, y_n^{(i)}(x))$ *auf* I.

Beweis. Setzen wir voraus, daß die Ungleichheiten (19) für $j = 1, 2, \ldots, s$ gelten und daß die Funktionen $^jz(x)$, $^ju(x)$ für diese Indexe j die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllen. Wir beweisen zuerst, daß infolgedessen auch $^{s+1}z(x)$, $^{s+1}u(x)$ den Voraussetzungen dieses Satzes genügen. Wir setzen

$$(20) \qquad {}^jw_k(x) = {}^jz_k(x) - {}^ju_k(x)\,.$$

Vermöge der oben angeführten Voraussetzung haben wir für $x \in I$, $i = 0, 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, s$

$$(21) \qquad {}^jw_k^{(i)}(x) \geqq 0\,.$$

Wir wollen nun die Funktion ${}^{s+1}w_k'(x)$ ausrechnen (und sie durch das in (10) eingeführtes Symbol $B_k^{\mathcal{N}}(F, S, z, u, l)$ ausdrücken)

$$ {}^{s+1}w_k'(x) = {}^{s+1}z_k'(x) - {}^{s+1}u_k'(x) = {}^{s}z_k'(x) - \beta_k(x; {}^{s}z, {}^{s}u) - {}^{s}u_k'(x) + \gamma_k(x; {}^{s}z, {}^{s}u) = $$
$$ = B_k^{\mathcal{M}}(\bar{F}, \bar{S}, {}^{s}z, {}^{s}u, 1) \,. $$

Aus (2) und (21) folgt $B_k^{\mathcal{M}}(\bar{F}, \bar{S}, {}^{s}z, {}^{s}u, 1) \geqq 0$ und daher

$$ (22) \qquad {}^{s+1}w_k'(x) \geqq 0 \,. $$

Aus den Definitionsgleichheiten (18) folgt weiter ($\beta_k(x; {}^{s}z, {}^{s}u) \geqq 0$, $\gamma_k(x; {}^{s}z, {}^{s}u) \leqq 0$)

$$ (23) \qquad {}^{s}z_k^{(i)}(x) \geqq {}^{s+1}z_k^{(i)}(x) \,, \quad {}^{s}u_k^{(i)}(x) \leqq {}^{s+1}u_k^{(i)}(x) $$

und aus den Relationen (22) und (23) ist schließlich

$$ (24) \qquad {}^{s}u_k^{(i)}(x) \leqq {}^{s+1}u_k^{(i)}(x) \leqq {}^{s+1}z_k^{(i)}(x) \leqq {}^{s}z_k^{(i)}(x) \,. $$

Wir gehen zur Berechnung von $\beta_k(x; {}^{s+1}z, {}^{s+1}u)$, $\gamma_k(x; {}^{s+1}z, {}^{s+1}u)$ über. Wenn wir (18) benutzen, so ist

$$ \beta_k(x; {}^{s+1}z, {}^{s+1}u) = {}^{s}z_k'(x) - \beta_k(x; {}^{s}z, {}^{s}u) - F_k(x, {}^{s+1}z_\mu(x), {}^{s+1}z_\mu(\alpha_\mu(x)), {}^{s+1}z_\mu'(\alpha_\mu(x))) - $$
$$ - \int_a^x S_k(x, t, {}^{s+1}z_\mu(t), {}^{s+1}z_\mu(\alpha_\mu(t)), {}^{s+1}z_\mu'(\alpha_\mu(t)))\, dt - A_k(x; {}^{s+1}z, {}^{s+1}u) = $$
$$ \tfrac{1}{2}B_k^{\mathcal{M}}(\bar{F}, \bar{S}, {}^{s}z, {}^{s+1}z, 2) + A_k(x; {}^{s+1}u, {}^{s}u) $$

$$ \gamma_k(x; {}^{s+1}z, {}^{s+1}u) = {}^{s}u_k'(x) - \gamma_k(x; {}^{s}z, {}^{s}u) - F_k(x, {}^{s+1}u_\mu(x), {}^{s+1}u_\mu(\alpha_\mu(x)), {}^{s+1}u_\mu'(\alpha_\mu(x))) - $$
$$ - \int_a^x S_k(x, t, {}^{s+1}u_\mu(t), {}^{s+1}u_\mu(\alpha_\mu(t)), {}^{s+1}u_\mu'(\alpha_\mu(t)))\, dt + A_k(x; {}^{s+1}z, {}^{s+1}u) = $$
$$ = \tfrac{1}{2}B_k^{\mathcal{M}}(\bar{F}, \bar{S}, {}^{s}u, {}^{s+1}u, 2) + A_k(x; {}^{s+1}z, {}^{s}z) \,. $$

Aus (2) und (23) kommen auf I die Ungleichheiten

$$ B_k^{\mathcal{M}}(\bar{F}, \bar{S}, {}^{s}z, {}^{s+1}z, 2) \geqq 0 \,, \quad A_k(x; {}^{s+1}u, {}^{s}u) \geqq 0 \,, $$
$$ B_k^{\mathcal{M}}(\bar{F}, \bar{S}, {}^{s}u, {}^{s+1}u, 2) \leqq 0 \,, \quad A_k(x; {}^{s+1}z, {}^{s}z) \leqq 0 $$

and daher $\beta_k(x; {}^{s+1}z, {}^{s+1}u) \geqq 0$, $\gamma_k(x; {}^{s+1}z, {}^{s+1}u) \leqq 0$.

Bisher haben wir also bewiesen, daß die Ungleichheit (19) auch für $j = s + 1$ gültig bleibt und daß ${}^{s+1}z(x)$, ${}^{s+1}u(x)$ den Voraussetzungen des Satzes 1 genügen.

Jetzt werden wir den zweiten Teil der Behauptung unseres Satzes beweisen, d. h. die Existenz- und Eindeutigkeitsbehauptung über die Lösung von (1) (in der Klasse stetig differenzierbarer Funktionen), sowie auch die auf I gleichmäßige Konvergenz der Folgen $\{{}^j z^{(i)}(x)\}$, $\{{}^j u^{(i)}(x)\}$ zu dieser Lösung bzw. zu seiner Ableitung. Es genügt natürlich zu beweisen, daß die Folgen $\{{}^j w_k^{(i)}(x)\} = \{{}^j z_k^{(i)}(x) - {}^j u_k^{(i)}(x)\}$ $(k = 1, 2, \dots$ $\dots, n;\ i = 0, 1)$ auf I gleichmäßig gegen Null streben. Setzen wir nämlich die Gültigkeit dieser Behauptung voraus und setzen $z_k(x) = \lim_{j\to\infty} {}^j z_k(x)$, $u_k(x) = \lim_{j\to\infty} {}^j u_k(x)$. Diese Grenzwerte existieren offenbar in jeder Zahl $x \in I$, da $\{{}^j z_k(x)\}$, $(\{{}^j u_k(x)\})$ nach (19) monotone Folgen sind. Weiter gilt ${}^j w_k(x) \geqq {}^j z_k(x) - z_k(x) \geqq 0$, ${}^j w_k(x) \geqq$ $\geqq u_k(x) - {}^j u_k(x) \geqq 0$, ${}^j w_k(x) = {}^j z_k(x) - {}^j u_k(x) \geqq 0$ und die Funktionenfolgen konvergieren daher gleichmäßig auf I gegen die Funktionen $z_k(x)\,(u_k(x))$ und es gilt identisch $z_k(x) = u_k(x)$. Auf eine analoge Weise kann man auch beweisen, daß monotone Funktionenfolgen $\{{}^j z_k'(x)\}$, $\{{}^j u_k'(x)\}$ auf I gleichmäßig gegen $z_k'(x)$ und $u_k'(x)$ streben. Wenn wir $z_k(x) = u_k(x) = y_k(x)$ setzen und in (18) den Grenzübergang durchführen, erhalten wir sogleich das Resultat, daß $y(x) = (y_1(x), \dots, y_n(x))$ eine Lösung (und zwar die einzige in der Klasse stetig differenzierbarer Funktionen) der Aufgabe (1) auf I darstellt, was wir auch beweisen wollten.

Der Beweis des Satzes kann also durch Begründung des gleichmäßigen Strebens der Folge $\{{}^j w_k^{(i)}(x)\}$ auf I gegen Null vollendet werden. Zu diesem Zwecke setzten wir $c = \min_{1 \leqq k \leqq n} (x - \alpha_k(x))$. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von $\alpha_k(x)$ auf I und der Ungleichheit $\alpha_k(x) < x$, muß $c > 0$ sein. Wir nehmen weiter eine beliebige Teilung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_v = b$ von I, deren Norm kleiner als c ist (d. h. $|x_m - x_{m-1}| <$ $< c$, $m = 1, 2, \dots, v$). Wir betrachten zunächst x in $\langle x_0, x_1 \rangle$. Für diese x haben wir $\alpha_k(x) \leqq x - c \leqq x_1 - c < x_0$ und daher (vgl. (1″)) gilt

$$
{}^j z_k^{(i)}(\alpha_k(x)) = {}^j u_k^{(i)}(\alpha_k(x)) = \varphi_k^{(i)}(\alpha_k(x)) \quad (j = 0, 1, 2, \dots)\,. \tag{25}
$$

Weiter haben wir, wenn wir noch (18), (21), (3) und (25) benutzen

$$
\begin{aligned}
{}^j w_k(x) &= \int_a^x ({}^j z_k'(t) - {}^j u_k'(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^x ({}^{j-1} w_k'(t) - \beta_k(t; {}^{j-1}z, {}^{j-1}u) + \\
&\quad + \gamma_k(t; {}^{j-1}z, {}^{j-1}u))\,\mathrm{d}t \leqq L_1 \sum_{l=1}^{n} \int_a^x \left({}^{j-1} w_l(t) + \int_a^t {}^{j-1} w_l(q)\,\mathrm{d}q\right)\mathrm{d}t\,,
\end{aligned} \tag{26}
$$

wo $L_1 = L + \max_{1 \leqq k, j \leqq n} [|A_{kj}^1| - A_{kj}^1, |B_{kj}^1| - B_{kj}^1]$. Aus (21) folgt, daß ${}^j w_k(x)$ auf I nicht abnehmen und daher (vgl. (26)) mit $S = L_1(c + 1)$

$$
{}^j w_k(x) \leqq S \sum_{l=1}^{n} \int_a^x {}^{j-1} w_l(t)\,\mathrm{d}t\,.
$$

Aus der letzten Ungleichheit bekommen wir weiter

$$\sum_{l=1}^{n} {}^{j}w_l(x) \leqq nS \sum_{l=1}^{n} \int_a^x {}^{j-1}w_l(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{27}$$

Wir setzen $H = \sum_{l=1}^{n} {}^{0}w_l(x_1)$. Durch Induktion behelfs (27) können wir leicht die Ungleichheiten

$$\sum_{l=1}^{n} {}^{j}w_l(x) \leqq H \frac{(nS)^j (x - x_0)^j}{j!} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots) \tag{28}$$

beweisen. Aus (28) und (21) folgt unmittelbar, daß $\{{}^{j}w_k(x)\}$ gleichmäßig auf $\langle x_0, x_1\rangle$ gegen Null streben. Für die Ableitung von ${}^{j}w_k(x)$ auf $\langle x_0, x_1\rangle$ haben wir nach (18), (21), (3) und (25)

$$\begin{aligned} {}^{j}w_k'(x) &= {}^{j-1}w_k(x) - \beta_k(x; {}^{j-1}z, {}^{j-1}u) + \gamma_k(x; {}^{j-1}z, {}^{j-1}u) \leqq \\ &\leqq L_1 \sum_{l=1}^{n} \left\{{}^{j-1}w_l(x) + \int_a^x {}^{j-1}w_l(t)\,\mathrm{d}t\right\}. \end{aligned}$$

Nach dem vorangehenden Resultat strebt aber die Funktionenfolge $\{{}^{j}w_k(x)\}$ gleichmäßig auf $\langle x_0, x_1\rangle$ gegen Null und daher muß auch (vgl. (21)) $\{{}^{j}w_k'(x)\}$ auf $\langle x_0, x_1\rangle$ gleichmäßig gegen Null streben.

Setzen wir jetzt voraus, daß die gleichmäßige Konvergenz von $\{{}^{j}w_k^{(i)}(x)\}$ bereits auf $\langle x_0, x_p\rangle$ $(1 \leqq p < v)$ bewiesen wurde. Wir wollen dasselbe Resultat auch auf $\langle x_0, x_{p+1}\rangle$ aufstellen. Setzen wir wieder das Gegenteil voraus. Aus (18), (21) und (3) folgen die Ungleichheiten $(L_2 = L + \max\,[|A_{kj}^l| - A_{kj}^l, |B_{kj}^l| - B_{kj}^l])$

$$\begin{aligned} 0 \leqq {}^{j}w_k'(x) \leqq L_2 \sum_{l=1}^{n} \Big\{ &({}^{j-1}w_l(x) + {}^{j-1}w_l(\alpha_l(x)) + {}^{j-1}w_l'(\alpha_l(x)) + \\ &+ \int_a^x ({}^{j-1}w_l(t) + {}^{j-1}w_l(\alpha_l(t)) + {}^{j-1}w_l'(\alpha_l(t)))\,\mathrm{d}t\Big\}. \end{aligned} \tag{29}$$

Konvergion auf $\langle x_0, x_{p+1}\rangle$ die Folgen $\{{}^{j}w_k(x)\}$ gleichmäßig gegen Null, dann wegen Induktionsvoraussetzung und der Ungleichheiten $\alpha_k(x) < x_p$, die auf $\langle x_0, x_{p+1}\rangle$ gültig sind, folgt aus (29) daß auch $\{{}^{j}w_k'(x)\}$ gleichmäßig auf $\langle x_0, x_{p+1}\rangle$ gegen Null streben. Wenn ein Widerspruch herauskommen soll, dann muß ein $\bar{x} \in \langle x_p, x_{p+1})$ und ein $\vartheta > 0$, $\bar{x} + \vartheta \leqq x_{p+1}$, $\vartheta < (3nL_2(1 + b - a))^{-1}$ so existieren, daß auf $\langle x_0, \bar{x}\rangle$ die Funktionenfolgen $\{{}^{j}w_k(x)\}$ gleichmäßig gegen Null konvergieren, da aber auf $\langle x_0, \bar{x} + \vartheta\rangle$ dies nicht mehr der Fall ist und es gilt $\sum_{l=1}^{n} {}^{j}w_l(\bar{x} + \vartheta) \geqq \varepsilon > 0$ für

$j = 0, 1, 2, \ldots$ Andererseits haben wir nach (18), (21) und (3)

$$ {}^j w_k(x) = \int_a^x ({}^j z_k'(t) - {}^j u_k'(t))\,dt = $$

$$ = \int_a^x ({}^{j-1} w_k'(t) - \beta_k(t, {}^{j-1}z, {}^{j-1}u) + \gamma_k(t; {}^{j-1}z, {}^{j-1}u))\,dt \leqq $$

$$ \leqq L_2 \sum_{l=1}^n \int_a^x \Big\{ {}^{j-1}w_l(t) + {}^{j-1}w_l(\alpha_l(t)) + {}^{j-1}w_l'(\alpha_l(t)) + $$

$$ + \int_a^t ({}^{j-1}w_l(q) + {}^{j-1}w_l(\alpha_l(q)) + {}^{j-1}w_l'(\alpha_l(q)))\,dq \Big\}\,dt\,. $$

Hieraus folgt

$$ \sum_{l=1}^n {}^j w_l(x) \leqq nL_2 \sum_{l=1}^n \int_a^{\bar{x}} \left({}^{j-1}w_l(t) + \int_a^t {}^{j-1}w_l(q)\,dq \right) dt + \tag{30} $$

$$ + nL_2 \sum_{l=1}^n \int_{\bar{x}}^x \left({}^{j-1}w_l(t) + \int_a^t {}^{j-1}w_l(q)\,dq \right) dt + $$

$$ + nL_2 \sum_{l=1}^n \int_a^x \Big\{ {}^{j-1}w_l(\alpha_l(t)) + {}^{j-1}w_l'(\alpha_l(t)) + \int_a^t ({}^{j-1}w_l(\alpha_l(q)) + {}^{j-1}w_l'(\alpha_l(q)))\,dq \Big\}\,dt\,. $$

Da laut Voraussetzung die Funktionenfolgen $\{{}^j w_k^{(i)}(x)\}$ auf $\langle x_0, \bar{x}\rangle$ gleichmäßig gegen Null streben und für $x \in \langle x_0, \bar{x} + \vartheta\rangle$ $\alpha_k(x) < x_p$ gilt, muß die Funktionenfolge $\{{}^j h(x)\}$, wo

$$ {}^j h(x) = nL_2 \sum_{l=1}^n \int_a^{\bar{x}} \left({}^{j-1}w_l(t) + \int_a^t {}^{j-1}w_l(q)\,dq \right) dt + $$

$$ + nL_2 \sum_{l=1}^n \int_a^x \Big\{ {}^{j-1}w_l(\alpha_l(t)) + {}^{j-1}w_l'(\alpha_l(t)) + \int_a^t ({}^{j-1}w_l(\alpha_l(q)) + {}^{j-1}w_l'(\alpha_l(q)))\,dq \Big\}\,dt $$

ebenfalls gleichmäßig auf $\langle x_0, \bar{x} + \vartheta\rangle$ gegen Null konvergieren. Ziehen wir (21) in Betracht, so bekommen wir

$$ \frac{\displaystyle\sum_{l=1}^n \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\vartheta} \left({}^{j-1}w_l(t) + \int_a^t {}^{j-1}w_l(q)\,dq \right) dt}{\displaystyle\sum_{l=1}^n {}^j w_l(\bar{x} + \vartheta)} \leqq \tag{31} $$

$$ \leqq \frac{\displaystyle\sum_{l=1}^n \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+\vartheta} ({}^{j-1}w_l(t) + (t - a)\,{}^{j-1}w_l(t))\,dt}{\displaystyle\sum_{l=1}^n {}^j w_l(\bar{x} + \vartheta)} \leqq (1 + b - a)\,\vartheta \frac{\displaystyle\sum_{l=1}^n {}^{j-1}w_l(\bar{x} + \vartheta)}{\displaystyle\sum_{l=1}^n {}^j w_l(\bar{x} + \vartheta)}\,. $$

Die Ungleichheit (30) kann mittels ${}^j h(x)$ in der Form

$$\sum_{l=1}^{n} {}^j w_l(x) \leqq {}^j h(x) + nL_2 \sum_{l=1}^{n} \int_{\bar{x}}^{x} \left\{ {}^{j-1}w_l(t) + \int_a^t {}^{j-1}w_l(q)\,\mathrm{d}q \right\} \mathrm{d}t$$

geschrieben werden; setzen wir hierin $\bar{x} + \vartheta$ für x ein und dividieren die beiden Seiten der so entstandenen Ungleichheit durch $\sum_{l=1}^{n} {}^j w_l(\bar{x} + \vartheta) \geqq \varepsilon > 0$, so bekommen wir mittels (31) die Beziehung

$$(32) \qquad 1 \leqq \frac{{}^j h(\bar{x} + \vartheta)}{\varepsilon} + nL_2(1 + b - a)\,\vartheta \frac{\sum_{l=1}^{n} {}^{j-1}w_l(\bar{x} + \vartheta)}{\sum_{l=1}^{n} {}^j w_l(\bar{x} + \vartheta)}.$$

Es ist leicht zu sehen, daß $\lim_{j \to \infty} [(\sum_{l=1}^{n} {}^{j-1}w_l(\bar{x} + \vartheta))/(\sum_{l=1}^{n} {}^j w_l(\bar{x} + \vartheta))] = 1$ ist, da $\lim_{j \to \infty} \sum_{l=1}^{n} {}^j w_l(\bar{x} + \vartheta)$ existiert und einer positive Zahl gleich ist. Es ist weiter $\lim_{j \to \infty} {}^j h(\bar{x} + \vartheta) = 0$. Man kann also ein Index j_0 so wählen, daß

$$\frac{1}{\varepsilon}\, {}^{j_0}h(\bar{x} + \vartheta) < \frac{1}{2}, \quad \frac{\sum_{l=1}^{n} {}^{j_0-1}w_l(\bar{x} + \vartheta)}{\sum_{l=1}^{n} {}^{j_0}w_l(\bar{x} + \vartheta)} < \frac{3}{2}$$

gilt. Die Ungleichheit (32) ist für jede natürliche Zahl j gültig und also auch für j_0. Dann haben wir aber

$$1 < \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2} nL_2(1 + b - a)\,\vartheta,$$

was einen Widerspruch darstellt. Somit ist alles bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] *Т. Аманкулов:* Приближенное решение системы интегро-дифференциальных уравнений с помощью мажорантно-минорантных функций. Известия высших учебных заведений, № 4, (1968), 6—12.

Anschrift des Verfassers: Olomouc, Leninova 26 (Palackého universita).