Časopis pro pěstování matematiky

Miloslav Feistauer

Poznámka k platnosti věty o substituci u zobecněných integrálů ve smyslu Cauchyho hlavní hodnoty

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 95 (1970), No. 3, 316--325

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117690`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

POZNÁMKA K PLATNOSTI VĚTY O SUBSTITUCI U ZOBECNĚNÝCH INTEGRÁLŮ VE SMYSLU CAUCHYHO HLAVNÍ HODNOTY

MILOSLAV FEISTAUER, Praha

(Došlo dne 21. dubna 1969)

V matematické hydrodynamice a i v jiných partiích matematické fyziky jsme často nuceni uvažovat zobecněnou definici integrálu ve smyslu Cauchyho hlavní hodnoty. V našich úvahách se budeme zabývat hlavní hodnotou Newtonova integrálu ([1]), což v aplikacích, kde jsou integrované funkce většinou „při nejhorším" po částech spojité, stačí. Integrované funkce budeme uvažovat reálné.

Hlavní hodnotu definujeme takto:

Definice (např. [4], [5] aj.). Nechť $x_0 \in (a, b) \subseteq E_1$ a nechť pro každé $\varepsilon \in \in (0, \min(x_0 - a, b - x_0))$ (pro $c \in E_1$ klademe $c + \infty = c - (-\infty) = +\infty$) existují integrály

$$\int_{x_0+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_{a}^{x_0-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Nechť existuje vlastní limita výrazu

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left[\int_{a}^{x_0-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right] = J\,. \tag{1}$$

Hodnotu J nazveme hlavní hodnotou integrálu funkce f v intervalu (a, b); označíme ji $(h)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Je jasné, že existuje-li $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, existuje i jeho hlavní hodnota a je rovna tomuto integrálu. Naopak tomu ovšem být nemusí. Stačí uvažovat $\int_{-1}^{1} x^{-1}\,\mathrm{d}x$, který neexistuje, existuje však ve smyslu hlavní hodnoty, která je rovna nule.

V aplikacích se setkáváme s tím, že se při výpočtech hlavních hodnot používají pravidla a věty platné pro integrály uvažované v původním smyslu, mimo jiné i věta o substituci, aniž by se ověřila oprávněnost jejich použití. Že nelze větu o substituci v běžném znění (např. [1], [3]) použít pro hlavní hodnoty integrálů, plyne z následujícího příkladu.

Příklad 1. Uvažujme opět $(h)\int_{-1}^{1} x^{-1}\,\mathrm{d}x$; zaveďme v něm substituci $x = g(t)$, kde funkci g definujeme v intervalu $(-\infty, +\infty)$ takto:

$$g(t) = -\exp(-t^{-2}) \quad \text{pro} \quad t \in (-\infty, 0)\,,$$
$$g(0) = 0\,,$$
$$g(t) = \exp(-t^{-4}) \quad \text{pro} \quad t \in (0, +\infty)\,.$$

Tato funkce je spojitá i se všemi svými derivacemi a rostoucí v intervalu $(-\infty, +\infty)$, který zobrazuje na interval $(-1, 1)$. Substitujme funkci g do uvažovaného integrálu.

Podle definice je

$$(h)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g'(t)\,\mathrm{d}t}{g(t)} = \lim_{\delta\to 0+} \left[\int_{-\infty}^{-\delta} \frac{g'(t)\,\mathrm{d}t}{g(t)} + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{g'(t)\,\mathrm{d}t}{g(t)}\right]$$

existují-li integrály v závorce pro každé $\delta \in (0, +\infty)$ a existuje-li vlastní limita vpravo. Výpočtem zjistíme, že primitivní funkcí k g'/g je $-t^{-2}$ v $(-\infty, 0)$ a $-t^{-4}$ v $(0, +\infty)$ a tedy

$$\lim_{\delta\to 0+} \left[\int_{-\infty}^{-\delta} \frac{g'(t)\,\mathrm{d}t}{g(t)} + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{g'(t)\,\mathrm{d}t}{g(t)}\right] = \lim_{\delta\to 0+} (-1/\delta^2 + 1/\delta^4) = +\infty\,,$$

z čehož je vidět, že větu o substituci v tomto případě nelze použít.

Substituovaná funkce g zde měla spojité derivace všech řádů, nebyla však v bodě nula analytická. V dalším ukážeme (věta 3 a příklad 3), že ani analytičnost substituované funkce v některých případech nestačí, abychom byli oprávněni větu o substituci použít.

Označme $M = (a, x_0) \cup (x_0, b)$. Řekneme, že funkce F je zobecněnou primitivní funkcí k funkci f v množině M, jsou-li $F|_{(a,x_0)}$ a $F|_{(x_0,b)}$ zobecněné primitivní funkce k f v intervalech (a, x_0) a (x_0, b).

Formulujme kritérium použitelnosti věty o substituci pro hlavní hodnotu Newtonova integrálu.

Věta 1. *Nechť jsou splněny tyto předpoklady:*

I. *V množině M existuje k funkci f zobecněná primitivní funkce F.*

II. *Funkce g je definovaná, spojitá a ryze monotonní v intervalu (α, β), má v něm vyjma nejvýše konečného počtu bodů vlastní derivaci a zobrazuje ho na interval (a, b); $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $g(t_0) = x_0$.*

III. $\lim_{\delta\to 0+} (\sup_{x\in W_\delta} |f(x)|)\, |g(t_0 + \delta) - 2g(t_0) + g(t_0 - \delta)| = 0$,
kde W_δ je množina všech bodů ležících mezi $g(t_0 + \delta)$, $2g(t_0) - g(t_0 - \delta)$.
Potom platí toto tvrzení:

Existuje-li jeden z integrálů

$$J = (h)\int_a^b f(x)\,dx\,,\quad S = (h)\int_\alpha^\beta f(g(t))\,|g'(t)|\,dt\,,$$

existuje i druhý a jsou si rovny.

Důkaz. Nechť g je v (α, β) rostoucí. (Je-li g klesající, dokáže se věta analogicky.) Pak je $g'(t) \geqq 0$ pro všechna $t \in (\alpha, \beta)$, pro něž $g'(t)$ existuje, a tedy $|g'| = g'$; podle II je $\lim_{t\to\alpha+} g(t) = a$, $\lim_{t\to\beta-} g(t) = b$.

Označme $K = (0, \min(x_0 - a, b - x_0))$, $K' = (0, \min(t_0 - \alpha, \beta - t_0))$, $M' = (\alpha, t_0) \cup (t_0, \beta)$.

Z I plyne, že pro libovolné $\varepsilon \in K$ existují

$$\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx\,,\quad \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

právě když platí

$$\lim_{x\to a+} F(x) = A \in E_1\,,\quad \lim_{x\to b-} F(x) = B \in E_1\,. \tag{2}$$

Platí-li (2), je

$$\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx = F(x_0 - \varepsilon) - A\,,\quad \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)\,dx = B - F(x_0 + \varepsilon)\,. \tag{3}$$

Podle I a II je funkce $G(t) = F(g(t))$ zobecněnou primitivní funkcí k $f(g(t))\,g'(t)$ v M'. Pro $\delta \in K'$ existují

$$\int_\alpha^{t_0-\delta} f(g(t))\,g'(t)\,dt\,,\quad \int_{t_0+\delta}^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

právě když platí

$$\lim_{t\to\alpha+} G(t) = A' \in E_1\,,\quad \lim_{t\to\beta-} G(t) = B' \in E_1\,. \tag{2'}$$

Je-li toto splněno, je

(3')

$$\int_\alpha^{t_0-\delta} f(g(t))\,g'(t)\,dt = G(t_0 - \delta) - A'\,,\quad \int_{t_0+\delta}^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt = B' - G(t_0 + \delta)\,.$$

Podle věty o limitě složené funkce je ovšem (2) ekvivalentní s (2′) a platí-li (2) nebo (2′), je $A = A'$, $B = B'$.

Z toho, co bylo řečeno, vyplývá následující tvrzení:

Platí-li I, II a (2), pak integrál J resp. S (vzhledem k (3) a (3')) existuje právě když patí:

(4) $$\lim_{\varepsilon \to 0+} (F(x_0 + \varepsilon) - F(x_0 - \varepsilon)) = L \in E_1 \quad \text{resp.}$$

(5) $$\lim_{\delta \to 0+} (G(t_0 + \delta) - G(t_0 - \delta)) = \lim_{\delta \to 0+} (F(g(t_0 + \delta)) - F(g(t_0 - \delta))) = L' \in E_1$$

načež $J = B - A - L$, $S = B - A - L'$.

Odtud plyne:

Platí-li I, II a (2), pak tvrzení věty 1 je ekvivalentní s tímto tvrzením:

(6) Platí-li (4) nebo (5), platí i druhý z těchto výroků a $L = L'$.

Nechť $\delta \in K'$. Položme $g(t_0 - \delta) = x_0 - \varepsilon_\delta$. g je rostoucí a spojitá v (α, β), takže je $\varepsilon_\delta > 0$ a

(7) $$\lim_{\delta \to 0+} \varepsilon_\delta = 0 .$$

Je-li tedy $\delta \in K'$ dosti malé, je $\varepsilon_\delta \in K$ a můžeme psát

(8) $$F(g(t_0 + \delta)) - F(g(t_0 - \delta)) = (F(g(t_0 + \delta)) - F(2g(t_0) - g(t_0 - \delta))) + \\ + (F(x_0 + \varepsilon_\delta) - F(x_0 - \varepsilon_\delta)) .$$

Dokažme nyní, že tvrzení (6) je ekvivalentní s rovností

(9) $$\lim_{\delta \to 0+} (F(g(t_0 + \delta)) - F(2g(t_0) - g(t_0 - \delta))) = 0 .$$

a) Nechť platí (9).

Platí-li (4), pak podle (7) je

(10) $$\lim_{\delta \to 0+} (F(x_0 + \varepsilon_\delta) - F(x_0 - \varepsilon_\delta)) = L .$$

Odtud a z (8) a (9) plyne, že platí (5) a $L' = L$.

Implikaci (5) $\Rightarrow$ (4) dokážeme analogicky: K libovolnému $\varepsilon \in K$ existuje $\delta_\varepsilon > 0$ tak, že

(11) $$x_0 - \varepsilon = g(t_0 - \delta_\varepsilon) ,$$

přičemž

(12) $$\lim_{\delta \to 0+} \delta_\varepsilon = 0 ,$$

takže pro $\varepsilon \in K$ dostatečně malé je $\delta_\varepsilon \in K'$. Podle (5), (9) a (12) platí:

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} (F(g(t_0 + \delta_\varepsilon)) - F(g(t_0 - \delta_\varepsilon))) = L' ,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} (F(g(t_0 + \delta_\varepsilon)) - F(2g(t_0) - g(t_0 - \delta_\varepsilon))) = 0 .$$

Odtud, za použití (8), kde píšeme ε místo ε_δ a δ_ε místo δ, plyne (4) a rovnost $L = L'$.

b) Nechť platí (6).

Existují-li ovšem konečné limity (4) a (5), platí (10), což s (5), (8) a $L = L'$ dává (9). Studujme nyní podmínku (9).

Pro další úvahy zavedeme toto označení: Je-li $P(x_0)$ prstencové okolí bodu x_0, pak, protože je funkce g spojitá a rostoucí v (α, β), existuje prstencové okolí $P(0)$ bodu nula takové, že platí:

$$(13) \qquad \delta \in K' \cap P(0) \Rightarrow g(t_0 + \delta), \quad 2g(t_0) - g(t_0 - \delta) \in P(x_0) \cap (x_0, +\infty).$$

Funkce F má podle I v jistém $P(x_0)$ vlastní derivaci $F' = f$. Platí-li (13), můžeme rozdíl $F(g(t_0 + \delta)) - F(2g(t_0) - g(t_0 - \delta))$ pro $\delta \in K' \cap P(0)$ rozepsat podle věty o střední hodnotě:

Existuje bod $x_\delta \in W_\delta$ tak, že platí

$$(14) \qquad F(g(t_0 + \delta)) - F(2g(t_0) - g(t_0 - \delta)) = F'(x_\delta)(g(t_0 + \delta) - 2g(t_0) + g(t_0 - \delta)) = f(x_\delta)(g(t_0 + \delta) - 2g(t_0) + g(t_0 - \delta)).$$

Odtud je zřejmé, že (9) platí právě tehdy, je-li

$$(15) \qquad \lim_{\delta \to 0+} |f(x_\delta)| \, |g(t_0 + \delta) - 2g(t_0) + g(t_0 - \delta)| = 0.$$

Poznámka. Zatím jsme dokázali tyto ekvivalence: (15) $\Leftrightarrow$ (9), (9) $\Leftrightarrow$ (6). Platí-li však kromě I a II ještě (2), je (6) ekvivalentní s tvrzením věty 1. Platí-li tedy předpoklady I, II a (2), je (15) ekvivalentní s tvrzením věty 1. Totéž se dokáže, je-li g klesající.

Dokončeme důkaz věty 1. Nechť je splněn předpoklad III. Pak platí samozřejmě (15). Existuje-li jeden z integrálů J nebo S, platí ovšem (2) a podle poznámky je věta dokázána.

V dalším odvodíme některé specielní důsledky již dokázaného.

Nechť funkce g je v okolí $U(t_0) = (t_0 - h, t_0 + h)$, $(h > 0)$, bodu t_0 rozvinutelná v Taylorovu řadu

$$(16) \qquad g(t) = g(t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n,$$

která je absolutně a lokálně stejnoměrně konvergentní v $U(t_0)$. Pro $\delta \in \langle 0, h)$ je

$$(17) \qquad g(t_0 + \delta) - g(t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n)}(t_0)}{n!} \delta^n,$$

$$g(t_0 - \delta) - g(t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n)}(t_0)}{n!} (-\delta)^n$$

a tedy

$$(18) \qquad g(t_0 + \delta) - 2g(t_0) + g(t_0 - \delta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g^{(2k)}(t_0)}{(2k)!} \delta^{2k} .$$

Za těchto předpokladů vyslovme další kritérium.

Věta 2. *Nechť jsou splněny předpoklady* I *a* II *z věty* 1 *a v* $U(t_0)$ *nechť platí* (16). *Potom platí tato tvrzení:*

1. *Je-li* $g^{(2k)}(t_0) = 0$ *pro všechna přirozená* k, *je splněna podmínka* (15) *a platí tvrzení věty* 1.
2. *Nechť existuje prstencové okolí* $P_1(x_0)$ *bodu* x_0 *a kladné konstanty* A, μ *takové, že pro všechna* $x \in P_1(x_0)$ *je*

$$(19) \qquad |f(x)| \leqq \frac{A}{|x - x_0|^{\mu}} .$$

Dále nechť existuje přirozené $\tilde{k}$ *tak, že* $g^{(2\tilde{k})}(t_0) \neq 0$. *Pak existují přirozená čísla* q, j *taková, že platí:*

$$(20) \qquad g^{(n)}(t_0) = g^{(2k)}(t_0) = 0 \quad \textit{pro všechna} \quad n = 1, \dots, j - 1 \quad a \quad k = 1, \dots, q - 1;$$

$$g^{(j)}(t_0) \neq 0, \; g^{(2q)}(t_0) \neq 0.$$

$(2q \geqq j)$.
Je-li

$$(21) \qquad \mu < 2q/j ,$$

platí tvrzení věty 1.

Důkaz. Jak již bylo řečeno, existuje prstencové okolí bodu x_0, označme je nyní $P_2(x_0)$, tak, že pro všechna $x \in P_2(x_0)$ je $F'(x) = f(x) \in E_1$. Položme $P(x_0) = P_1(x_0) \cap P_2(x_0)$. Je-li g rostoucí v (α, β), existuje prstencové okolí nuly $P(0)$ takové, že platí (13). Podobně pro g klesající existuje $P(0)$ tak, že platí implikace (13′) analogická k (13):

$$(13') \qquad \delta \in K' \cap P(0) \Rightarrow g(t_0 + \delta) , \;\; 2g(t_0) - g(t_0 - \delta) \in P(x_0) \cap (-\infty, x_0) .$$

Dokažme 1). Nechť $\delta \in P(0) \cap K' \cap (0, h)$. Pak z předpokladu v 1) plyne, že se (18) rovná nule. Nechť $x_\delta \in W_\delta$ tak, že platí (14). Je ovšem $f(x_\delta) \in E_1$ a je tedy splněno (15), odkud podle poznámky již plyne tvrzení věty 1.

Přistupme k důkazu 2). Především je jasné, že platí (20). Stačí za q resp. j zvolit nejmenší z přirozených $\tilde{k}$ resp. $\tilde{n}$, pro něž je $g^{(2\tilde{k})}(t_0) \neq 0$ resp. $g^{(\tilde{n})}(t_0) \neq 0$ (taková čísla podle předpokladu existují). Pro všechna přirozená $k < q$ resp. $n < j$ je pak $g^{(2k)}(t_0) = 0$ resp. $g^{(n)}(t_0) = 0$ a je zřejmě $2q \geqq j$.

Buďte $x_1, x_2 \in P(x_0) \cap (x_0, +\infty)$ nebo $x_1, x_2 \in P(x_0) \cap (-\infty, x_0)$. Pro x ležící mezi x_1 a x_2 podle (19) platí

$$\text{(22)} \qquad |f(x)| \leqq \frac{A}{\min(|x_1 - x_0|^\mu, |x_2 - x_0|^\mu)}.$$

Pro $\delta \in K' \cap P(0) \cap (0, h)$ položme $x_1 = g(t_0 + \delta)$, $x_2 = 2g(t_0) - g(t_0 - \delta)$. Protože $x_0 = g(t_0)$, z (17) a (20) plyne

$$\text{(23)} \qquad |x_1 - x_0| = \delta^j \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(j+n)}(t_0)}{(j+n)!} \delta^n \right| = \delta^j \Phi_1(\delta),$$

$$|x_2 - x_0| = \delta^j \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(j+n)}(t_0)}{(j+n)!} (-\delta)^n \right| = \delta^j \Phi_2(\delta),$$

přičemž existují konečné kladné limity

$$\lim_{\delta \to 0+} \Phi_1(\delta) = \lim_{\delta \to 0+} \Phi_2(\delta) = \frac{|g^{(j)}(t_0)|}{j!}.$$

Podobně na základě (20) a (18) dostaneme

$$\text{(24)} \qquad |g(t_0 + \delta) - 2g(t_0) + g(t_0 - \delta)| = \delta^{2q} \Phi_3(\delta),$$

kde funkce Φ_3 má konečnou kladnou limitu

$$\lim_{\delta \to 0+} \Phi_3(\delta) = \frac{|g^{(2q)}(t_0)|}{(2q)!}.$$

Použijeme-li (24) a nerovnost (22), do níž jsme dosadili (23) umocněné na μ, můžeme psát:

$$0 \leqq (\sup_{x \in W_\delta} |f(x)|) \, |g(t_0 + \delta) - 2g(t_0) + g(t_0 - \delta)| \leqq$$

$$\leqq \frac{A \delta^{2q - \mu j} \, \Phi_3(\delta)}{\min(\Phi_1^\mu(\delta), \Phi_2^\mu(\delta))}.$$

Protože podle (21) je $\lim_{\delta \to 0+} \delta^{2q - \mu j} = 0$, má výraz na pravé straně této nerovnosti nulovou limitu pro $\delta \to 0+$, odkud plyne III z věty 1, čímž je věta 2 dokázána.

Pomocí podmínky (15) (viz poznámka) můžeme v některých případech zjistit, že větu o substituci pro hlavní hodnoty nelze použít.

Je tomu např. v případě, který budeme formulovat jako větu.

Věta 3. *Nechť jsou splněny podmínky* I *a* II *z věty* 1 *a nechť v* $U(t_0)$ *platí* (16).

Nechť existuje prstencové okolí $P_1(x_0)$ bodu x_0 a kladné konstanty $B, \varkappa$ takové, že pro všechna $x \in P_1(x_0)$ je

$$|f(x)| \geqq \frac{B}{|x - x_0|^\varkappa}. \tag{25}$$

$\bar{k}$, q, j nechť mají stejný význam jako ve větě 2. (Platí tedy (20).)

Je-li

$$\varkappa \geqq 2q/j, \tag{26}$$

podmínka (15) *není splněna a věta o substituci v tomto případě neplatí.*

Důkaz provedeme podobně jako u věty 2. $P_2(x_0)$, $P(x_0)$, $P(0)$, x_1 a x_2 nechť mají stejný význam jako v důkazu věty 2. Pak je podle (25)

$$|f(x)| \geqq \frac{B}{\max\left(|x_1 - x_0|^\varkappa, |x_2 - x_0|^\varkappa\right)} \tag{27}$$

pro všechna x ležící mezi x_1 a x_2. Použijeme-li (24) a nerovnost (27), do níž dosadíme (23) umocněné na $\varkappa$, dostaneme po jednoduchých úpravách tento výsledek:

Pro všechna $x \in W_\delta$ je

$$|f(x)|\,|g(t_0 + \delta) - 2g(t_0) + g(t_0 - \delta)| \geqq \delta^{2q - \varkappa j}\, \Psi(\delta), \tag{28}$$

přičemž pro funkci Ψ existuje konečná kladná limita

$$\lim_{\delta \to 0+} \Psi(\delta) = B\,\frac{|g^{(2q)}(t_0)|\,(j!)^\varkappa}{|g^{(j)}(t_0)|^\varkappa\,(2q)!}.$$

Protože $\varkappa \geqq 2q/j$, je $\lim_{\delta \to 0+} \delta^{2q-\varkappa j}\, \Psi(\delta)$ buď rovna $\lim_{\delta \to 0+} \Psi(\delta)$ ($\neq 0$) pro $\varkappa = 2q/j$ nebo $+\infty$ pro $\varkappa > 2q/j$. Odtud a z nerovnosti (28), kam za x dosadíme $x_\delta \in W_\delta$ takové, že platí (14), plyne, že (15) není splněno. To znamená, že existuje-li buď integrál J nebo S (a je tedy splněno (2)), druhý integrál podle poznámky buď neexistuje, nebo existuje, ale $J \neq S$, takže věta o substituci neplatí.

Příklad 2. V práci [6] se např. vyskytují integrály typu

$$(h)\int_0^\pi \frac{f(t)\,\mathrm{d}t}{\cos t - x_0}, \quad x_0 \in (-1, 1). \tag{29}$$

f nechť je spojitá v $\langle 0, \pi \rangle$. Dá se dokázat, že (29) existuje pro určité funkce f, pro něž tento integrál v běžném smyslu neexistuje.

V (6) byla do (29) zavedena substituce $x = g(t) = -\cos t$, kterou přejde (29) na

$$(h)\int_{-1}^1 \frac{\tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x}{(x - x_0)}, \tag{30}$$

kde $\tilde{f}$ je spojitá v $(-1, 1)$. Nechť $t_0 \in (0, \pi)$ tak, že $x_0 = -\cos t_0$. Oprávněnost použití uvedené substituce dokážeme pomocí věty 2. Ověřme její předpoklady.

K funkci $\tilde{f}(x)/(x - x_0)$, protože je spojitá v $M = (-1, x_0) \cup (x_0, 1)$, existuje v M primitivní funkce. Funkce g je rostoucí v intervalu $(0, \pi)$, který zobrazuje na $(-1, 1)$; g lze v jistém okolí bodu t_0 rozvinout v Taylorovu řadu. $g^{(n)}(t) = \pm \sin t$ pro n liché, $\pm \cos t$ pro n sudé, takže je obecně $q = j = 1$ pro $t_0 \neq \pi/2$, pro $t_0 = \pi/2$ lze užít 1) z věty 2. V okolí bodu x_0 je zřejmě

$$\left|\frac{\tilde{f}(x)}{x - x_0}\right| \leqq \frac{A}{|x - x_0|},$$

kde A je vhodná konstanta, takže $\mu = 1$. Vzhledem k tomu, že $\mu = 1 < 2 = 2q/j$, jsou všechny předpoklady věty 2 splněny a uvedenou substituci můžeme provést. Existuje tedy integrál (30) a je roven integrálu (29).

Příklad 3. Uvažujme nyní integrál

$$(31) \qquad (h)\int_{-1}^{1} f(x)\, dx,$$

kde $f(x)$ definujeme takto: nechť $x_0 \in (-1, 1)$,

$$f(x) = -(x - x_0)^{-2} \quad \text{pro} \quad x \in (-1, x_0),$$

$$f(x) = (x - x_0)^{-2} \quad \text{pro} \quad x \in (x_0, 1).$$

Integrál (31) existuje (ve smyslu hlavní hodnoty) a je roven $-2x_0/(1 - x_0^2)$. Položme $x_0 = -\cos t_0$, kde $t_0 \in (0, \pi)$. Dokažme, že substituci g z předešlého příkladu, je-li $t_0 \neq \pi/2$, nelze pro integrál (31) použít. (Pro $t_0 = \pi/2$ můžeme g substituovat podle 1) věty 2.) Použijeme větu 3: Je zřejmé, že jsou splněny předpoklady I a II věty 1, platí (20) pro $j = q = 1$ a (25), kde $\varkappa = 2$, $B = 1$. Je splněno (26): $\varkappa = 2q/j$. Odtud plyne, že substituci g pro $t_0 \neq \pi/2$ nelze použít.

Snadno lze zjistit, že integrál, který dostaneme substituováním g do (31) sice existuje ve smyslu hlavní hodnoty, ale je různý od (31). Je totiž

$$(h)\int_0^{\pi} f(-\cos t) \sin t\, dt = -2x_0/(1 - x_0^2) - R(t_0),$$

kde

$$R(t_0) = \lim_{\delta \to 0+}\left[\frac{1}{\cos(t_0 + \delta) - \cos t_0} + \frac{1}{\cos(t_0 - \delta) - \cos t_0}\right] = \frac{\cos t_0}{\sin^2 t_0},$$

což je číslo různé od nuly pro $t_0 \neq \pi/2$; $R(\pi/2) = 0$. Výsledek tedy odpovídá větám 2 a 3.

Literatura

[1] *I. Černý:* Základy analýzy v komplexním oboru (Dodatek), Academia, Praha 1967.
[2] *V. Jarník:* Diferenciální počet I, NČSAV, Praha 1951.
[3] *V. Jarník:* Integrální počet II, NČSAV, Praha 1955.
[4] *Г. М. Фихтенгольц:* Курс дифференциального и интегрального исчисления II, Москва 1959.
[5] *S. Bochner:* Lectures on Fourier Integrals, Princeton University Press 1959.
[6] *J. Polášek:* Flügelprofil im inhomogenen Strömungsfeld, Revue Roumaine des Sciences Techniques, Serie de Mécanique Appliquée, Tome 9, N° 3, 1964.

Adresa autora: Malostranské nám. 25, Praha 1 (Matematicko-fyzikální fakulta KU).

Summary

A NOTE CONCERNING THE VALIDITY OF THE TRANSFORMATION THEOREM FOR THE GENERALIZED INTEGRAL IN THE SENSE OF THE CAUCHY PRINCIPAL VALUE

Miloslav Feistauer, Praha

The paper deals with the question of the validity of the transformation theorem for the Cauchy principal value of the Newton integral. Example 1 shows that this theorem in the usual form is not valid in general. Nevertheless, the following theorem is proved:

Theorem 1. I. *Let f be a (real) function on $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ having generalized primitive F (in the sense of [1]).*

II. *Let g be a continuous strictly monotone function on the interval (α, β), having a finite derivative at each point of (α, β) except at most those of a finite set; let $g((\alpha, \beta)) = (a, b)$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $g(t_0) = x_0$.*

III. *Let*

$$\lim_{\delta \to 0+} \left(\sup_{x \in W_\delta} |f(x)| \right) |g(t_0 + \delta) - 2g(t_0) + g(t_0 - \delta)| = 0$$

where W_δ denotes the set of all points lying between $g(t_0 + \delta)$, $2g(t_0) - g(t_0 - \delta)$.

If either $J = (h) \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (principal value of the integral of $f(x)$) exists or $S = (h) \int_\alpha^\beta f(g(t))\,|g'(t)|\,\mathrm{d}t$ exists, then J, S both exist and $J = S$.

Theorem 2 contains a criterion for the validity of the transformation theorem in case when the transformation function is analytic.

Theorem 3 shows that the transformation formula may be incorrect even in the case when the assumptions I and II from Theorem 1 are satisfied and the transformation function is analytic.