Jaromír Krys; Josef Metelka

Symetrické křivky

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 95 (1970), No. 1, 7--22

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117680

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 95 (1970), Praha

SYMETRICKÉ KŘIVKY

JAROMÍR KRYS, JOSEF METELKA, Olomouc

(Došlo dne 16. ledna 1968)

I. ÚVOD

Definice I. Symetrické křivky jsou algebraické křivky v projektivní rovině S_2 nad tělesem komplexních čísel, které jsou invariantní vzhledem k grupě G_6 šesti kolineací isomorfní se symetrickou grupou šesti permutací tří prvků.

1. Grupa G_6. Nejdříve uvedeme několik elementárních poznatků o grupě G_6. Obecně je známo (viz např. Vojtěch: Geometrie projektivní – Praha 1932, str. 284, nebo Bydžovský: Grupa šesti kolineací rovinných nebo prostorových, Program reálky Karlín 1908), že grupa G_6 obsahuje vedle identické kolineace E tři involuce a dvě cyklické kolineace s periodou 3. Její tabulka je:

(1)

	E	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
E	E	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5
K_1	K_1	E	K_4	K_5	K_2	K_3
K_2	K_2	K_5	E	K_4	K_3	K_1
K_3	K_3	K_4	K_5	E	K_1	K_2
K_4	K_4	K_3	K_1	K_2	K_5	E
K_5	K_5	K_2	K_3	K_1	E	K_4

Nejjednodušší model grupy G_6 obsahuje kolineace:

$$(2)\qquad K_0 \equiv E\ : x_0 : x_1 : x_2 = x_0 : x_1 : x_2\,;\quad K_1 : x_0 : x_1 : x_2 = x_0 : x_2 : x_1\,;$$
$$K_3 : x_0 : x_1 : x_2 = x_1 : x_0 : x_2\,;\quad K_4 : x_0 : x_1 : x_2 = x_2 : x_0 : x_1\,;$$
$$K_2 : x_0 : x_1 : x_2 = x_2 : x_1 : x_0$$
$$K_6 : x_1 : x_1 : x_2 = x_1 : x_2 : x_0\,.$$

Znamená-li

$$x = T\bar{x} \tag{3}$$

libovolnou regulární kolineaci, tvoří šest kolinací

$$\bar{K}_i = T^{-1}K_iT, \quad i = 0, 1, \ldots, 5. \tag{4}$$

opět grupu G_6 s tabulkou (1). Tímto způsobem dostaneme všechny grupy G_6. Transformační vztah (4) je reflexivní, symetrický a transitivní, jde tedy o ekvivalenci. Při studiu třídy grup G_6 se můžeme omezit na jediný model a za tento přijmeme model (2). Budeme tedy nadále symetrickými křivkami rozumět křivky invariantní vzhledem ke grupě (2). Z každé takto nalezené symetrické křivky dostaneme další aplikací transformace (3). Jde zřejmě o projektivně ekvivalentní křivky, mající případně jen různou polohu vzhledem k souřadnicovému systému.

Věta 1.1. *Jediným samodružným bodem v grupě* (2) *je bod* $J(1,1,1)$; *jedinou ivariántní přímkou je přímka* $s_1 \equiv x_0 + x_1 + x_2 = 0$.

Tvrzení jsou zřejmá a nepotřebují důkazu.

Věta 1.2. *Dva body* $D_1(1,\varepsilon,\varepsilon^2)$ *a* $D_2(1,\varepsilon^2,\varepsilon)$ *na přímce* s_1 (*kde* ε *je primitivní třetí kořen z jednotky*) *tvoří jediný pár, který je jako celek invariantní v grupě* (2); *dvě přímky* $d_1 \equiv JD_1 \equiv x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 = 0$ *a* $d_2 \equiv JD_2 \equiv x_0 + \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon x_2 = 0$ *tvoří jediný pár přímek, který je jako celek invariantní v grupě* (2).

Důkaz. Existuje-li invariantní pár bodů D_1 a D_2, je spojnice D_1D_2 invariantní přímkou, tedy podle věty 1.1. přímkou s_1. Oba body musí být samodružné pro cyklické kolineace K_4 i K_5. Známou metodou zjistíme, že ze tří společných samodružných bodů kolineací K_4 a K_5 leží právě dva a to $D_1(1, \varepsilon^2, \varepsilon)$, $D_2(1, \varepsilon^2, \varepsilon)$ na přímce s_1. Důkaz druhého tvrzení probíhá duálně.

Věta 1.3. *Trojice bodů, invariantní jako celek v grupě* (2), *jsou*: J, D_1, D_2; $U_1(0, 1, -1)$, $U_2(1, 0, -1)$, $U_3(1, -1, 0)$ *a body o souřadnicích* (y, z, z), (z, y, z), (z, z, y) *pro libovolné* $y \neq z$. *Trojice přímek, invariantní jako celek v grupě* (2), *jsou*: s_1, d_1, d_2; $u_1 \equiv x_1 - x_2 = 0$, $u_2 \equiv x_0 - x_2 = 0$, $u_3 \equiv x_0 - x_1$ *a přímky o rovnicích* $yx_0 + zx_1 + zx_2 = 0$, $zx_0 + yx_1 + zx_2 = 0$, $zx_0 + zx_1 + yx_2 = 0$ *pro libovolné* $y \neq z$.

Důkaz. Jestliže body A, B, C tvoří trojici invariantní jako celek v grupě (2), musí být aspoň jeden z těchto bodů samodružný pro involuci K_1. Involuce K_1 má samodružný bod $U_1(0, 1, -1)$ a všechny body o souřadnicích (y, z, z). Aplikujeme-li na tyto body kolineace grupy dostaneme jednak trojici U_1, U_2, U_3, jednak pro $y \neq z$ další trojice věty. Pro $y = z$ máme společný samodružný bod J, který se evidentně musí doplnit párem D_1, D_2. Druhá polovina věty se dokazuje dualitou.

Poznámka 1. Evidentně platí tyto incidence: U_1 leží na s_1, (y, z, z) na $\boldsymbol{u}_1$, spojnice (z, y, z) a (z, z, y) prochází bodem U_1. Další incidence dostaneme cyklickou záměnou a dualisováním.

Poznámka 2. Trojice $(y, z, z), (z, y, z), (z, z, y)$ leží na jedné přímce jen pro $y = 2$, $z = -1$. Jde pak o body $(2, -1, -1), (-1, 2, -1), (-1, -1, 2)$, které jsou průsečíky přímky s_1 pořadě s u_1, u_2, u_3. Také se toto dá dualisovat.

Poznámka 3. Všechny ostatní body roviny, nejmenované ve větách 1.1, 1.2, 1.3, lze seskupit do šestic invariantních jako celek vzhledem ke grupě (2).

2. Dvojí druh symetrických křivek. Nechť je symetrická křivka dána rovnicí $F(x_0, x_1, x_2) = 0$, kde F je forma. Po provedení kolineace K_i grupy dostáváme podle předpokladu o symetrii křivky vztah

$$F(x_0, x_1, x_2) = k_i\, F(x_0, x_1, x_2) \quad k_i \neq 0\,, \quad i = 0, 1, \ldots, 5\,.$$

Zřejmě platí $k_0 = 1$ a z tabulky (1) odvodíme řadu vztahů

$$k_1^2 = k_2^2 = k_3^2 = 1\,, \quad k_4^3 = k_5^3 = 1\,, \quad k_1 k_2 = k_4 = k_5 \quad \text{atd.},$$

jež lze splnit dvěma způsoby:

a) $k_i = 1$, $i = 0, 1, \ldots, 5$

b) $k_0 = k_4 = k_5 = 1$, $k_1 = k_2 = k_3 = -1$.

Definice II. Křivky, jejichž forma se grupou (2) transformuje s koeficienty a) resp. b) budeme nazývat symetrickými křivkami prvního resp. druhého druhu.

II. SYMETRICKÉ KŘIVKY

1. Vyjádření symetrických křivek druhého druhu. Budeme se nejprve zabývat křivkami druhého druhu. Nechť se ve formě F vyskytuje člen $a x_0^{\nu_0} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}$, $(a \neq 0)$. Po kolineaci K_1 přejde tento člen v $a x_0^{\nu_0} x_1^{\nu_2} x_2^{\nu_1}$. Protože má po kolineaci K_1 celá forma změnit znaménko, musí se v F vyskytovat člen $-a x_0^{\nu_0} x_1^{\nu_2} x_2^{\nu_1}$. Odtud plyne, že musí být $\nu_1 \neq \nu_2$, jinak by se členy $a x_0^{\nu_0} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} - a x_0^{\nu_0} x_1^{\nu_2} x_2^{\nu_1}$ rušily. Obdobnou úvahou s použitím kolineací K_2 a K_3 zjistíme, že též $\nu_0 \neq \nu_2$ a $\nu_0 \neq \nu_1$. Musí tedy forma F obsahovat výraz tvaru

$$(5) \qquad a\big(x_0^{\nu_0} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} - x_0^{\nu_0} x_1^{\nu_2} x_2^{\nu_1} - x_0^{\nu_1} x_1^{\nu_0} x_2^{\nu_2} + x_0^{\nu_1} x_1^{\nu_2} x_2^{\nu_0} + x_0^{\nu_2} x_1^{\nu_0} x_2^{\nu_1} - x_0^{\nu_2} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_0}\big)\,.$$

V tomto zápise předpokládáme lexikální uspořádání, což znamená, že jsme volili (bez újmy na obecnosti) $\nu_0 > \nu_1 > \nu_2$. Všimneme-li si permutací exponentů u členů v závorce a jejich vztahu ke znaménkům, vidíme ihned, že závorku lze psát ve tvaru

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} x_0^{\nu_0} & x_0^{\nu_1} & x_0^{\nu_2} \\ x_1^{\nu_0} & x_1^{\nu_1} & x_1^{\nu_2} \\ x_2^{\nu_0} & x_2^{\nu_1} & x_2^{\nu_2} \end{vmatrix}, \quad \nu_0 > \nu_1 > \nu_2$$

V tomto tvaru je ihned vidět alternující charakter závorky v (5), neboť provedení kterékoliv kolineace K_i z grupy (2) znamená permutaci řádků v determinantu (6).

Věta 1.1. *Určující forma symetrické křivky druhého druhu je lineární kombinace determinantů tvaru* (6), *kde* $\nu_0 + \nu_1 + \nu_2 = n$ (*stupeň křivky*).

Důkaz plyne bezprostředně z předešlého, neboť na množině členů formy F se musí dát beze zbytku provést rozklad na disjunktní šestičleny tvaru (5), kde je zřejmě $\nu_0 + \nu_1 + \nu_2 = n$.

Věta 1.2. *Každá symetrická křivka druhého druhu je rozložitelná. Obsahuje jako součásti aspoň přímky* u_1, u_2, u_3 (*věta* I.1.3.), *z nichž každá je jako součást křivky počítána s touž lichou násobností.*

Důkaz. Pro $\nu_0 = 2$, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 0$ platí podle známých vlastností Vandermondova determinantu pro určující formu symetrické kubiky druhého druhu

$$\begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = (x_1 - x_2)(x_0 - x_2)(x_0 - x_1) = u_1u_2u_3 .$$

Pro libovolné $\nu_0 > \nu_1 > \nu_2$ odečteme v determinantu (6) druhou řadu od první a pak lze z první řady vytknout $x_0 = x_1$. Obdobně se ukáže, že determinant (6) je dělitelný též $x_0 - x_2$ a $x_1 - x_2$. Forma F symetrické křivky druhého druhu lze tedy vzhledem k větě II.1.1 psát takto

$$F = u_1u_2u_3G ,$$

kde G je forma symetrické křivky prvního druhu. Jestliže je forma G dělitelna výrazem $x_1 - x_2$, musí být z důvodů symetrie (viz věta II.1.1) dělitelna též $x_0 - x_1$ a $x_0 - x_2$. Lze pak psát

$$F = u_1u_2u_3 \,.\, u_1u_2u_3 \,.\, H ,$$

kde H je opět forma symetrické křivky druhého druhu a tedy podle předešlého dělitelna $u_1u_2u_3$. Dalším rozvinutím této indukce je věta dokázána.

2. Vyjádření symetrických křivek prvého druhu. Určující forma těchto křivek bude symetrická. Odtud vyplývá:

Věta 2.1. *Všechny symetrické křivky prvního druhu lze psát ve tvaru* $F(s_1, s_2, s_3) = 0$, *kde* s_1, s_2, s_3 *jsou elementární symetrické formy tří proměných* x_0, x_1, x_2 *a* F *je mnohočlen váhy* n.

III. INFLEXNÍ BODY SYMETRICKÝCH KŘIVEK I. DRUHU

Úkolem této kapitoly je zkoumat inflexní body symetrických křivek I. druhu a to z hlediska toho, zda leží nebo neleží na dalších křivkách. Při odvozování těchto vlastností přijdeme i na řadu jiných zajímavých vlastností těchto křivek.

Forma F uvedená ve větě II.2.1. se dá psát takto:

$$F(s_1, s_2, s_3) = as_1^n + bs_2^{n/2} + cs_3^{n/3} + \sum_i d_i s_1^{m_{i1}} s_2^{m_{i2}} + \sum_i e_i s_1^{n_{i1}} s_3^{n_{i2}} + \sum_i f_i s_2^{l_{i1}} s_3^{l_{i2}} + \sum_{i,j} g_{ij} s_1^{r_{ij1}} s_2^{r_{ij2}} s_3^{r_{ij3}} . \tag{1}$$

Při čemž platí:

a) je-li n liché, potom $b = 0$

b) není-li n dělitelno 3, potom $c = 0$

c) $m_{i1} + 2m_{i2} = n$, m_{i1} a m_{i2} jsou čísla přirozená

d) $n_{i1} + 3n_{i2} = n$, n_{i1} a n_{i2} jsou čísla přirozená

e) $2l_{i1} + 3l_{i2} = n$, l_{i1} a l_{i2} jsou čísla přirozená

f) $r_{ij1} + 2r_{ij2} + 3r_{ij3} = n$, r_{ij1}, r_{ij2} a r_{ij3} jsou čísla přirozená

g) $\sum_{ij}$ značí součet daných výrazů pro všechny přípustné mocniny s_1, s_2, s_3. Při čemž i je rovno mocniteli prvé elementární symetrické formy a j je rovno mocniteli druhé elementární symetrické formy. Např. pro $n = 9$ dostáváme:

a) $\sum_i d_i s_1^{m_{i1}} s_2^{m_{i2}} = d_1 s_1 s_2^4 + d_3 s_1^3 s_2^3 + d_5 s_1^5 s_2^2 + d_7 s_1^7 s_2$

b) $\sum_{ij} g_{ij} s_1^{r_{ij1}} s_2^{r_{ij2}} s_3^{r_{ij3}} = g_{11} s_1 s_2 s_3^2 + g_{41} s_1^4 s_2 s_3 + g_{22} s_1^2 s_2^2 s_3$

h) $a, b, c, d_i, e_i, f_i, g_{ij}$ jsou konstanty.

§ **1. Body D_1, D_2 a symetrické křivky prvého druhu. Věta 1.1.** *Nechť* D_1, D_2 *jsou regulární body dané nerozložitelné symetrické křivky I. druhu stupně* n. *Potom platí:*

a) *Je-li* $n = 3m + 1$, *kde* m *je přirozené číslo, pak přímka* s_1 *je tečnou křivky v těchto bodech, při čemž tyto body jsou jako průsečíky přímky* s_1 *s křivkou* $2 + 3d$ *násobné, kde* d *je celé nezáporné číslo a* $2 + 3d$ *je menší nebo rovno* $\frac{1}{2}n$.

b) *Je-li $n = 3m + 2$, kde m je celé nezáporné číslo, pak tečnou v bodě D_1 je d_1 a tečnou v bodě D_2 je d_2. V bodech D_1, D_2 má příslušná tečna styk $2 + 3d$ násobný, kde d je celé nezáporné číslo menší nebo rovno n.*

Důkaz. Důkaz provedeme pro D_1. Z vlastností kolineace plyne, že totéž platí i pro D_2. Idea důkazu spočítáv v tom, že budeme zkoumat kolikanásobný je bod D_1 jako průsečík příslušné tečny s křivkou. Užijeme známou větu z algebry tj. dané číslo je právě n-násobný kořen, jestliže anuluje všechny derivace do $n - 1$ řádu a derivace n-řádu je pro dané číslo různá od 0.

1) Přímka s_1 má parametrické rovnice:

$$x_0 = \lambda + \mu\,, \quad x_1 = \varepsilon\lambda - \mu\,, \quad x_2 = \varepsilon^2\lambda\,.$$

Přejdeme k nehomogennímu parametru $t = \mu/\lambda$ a dostáváme:

$$x_0 = 1 + t\,, \quad x_1 = \varepsilon - t\,, \quad x_2 = \varepsilon^2\,. \tag{2}$$

Dosadíme z (2) do s_1, s_2, s_3. Dostáváme:

$$\begin{gathered} s_1 = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0\,, \quad s_2 = -t^2 + (\varepsilon - 1)\,t\,, \\ s_3 = -\varepsilon^2 t + (-\varepsilon^2 + 1)\,t + 1\,. \end{gathered} \tag{3}$$

2) Přímka d_1 má parametrické rovnice (nehomogenní parametr):

$$x_0 = 1 + t\,, \quad x_1 = \varepsilon + t\,, \quad x_2 = \varepsilon^2 + t\,. \tag{4}$$

Dosadíme z (4) do s_1, s_2 a s_3. Dostáváme:

$$s_1 = 3t\,, \quad s_2 = 3t^2\,, \quad s_3 = t^3 + 1\,. \tag{5}$$

Dokažme nyní prvou část věty. Nechť $n = 3m + 1$. Tedy $c = 0$. Nyní dosadíme z (3) do (1) a dostaneme:

$$\begin{gathered} b[-t^2 + (\varepsilon - 1)\,t]^{n/2} + \\ + \sum_i f_i[-t^2 + (\varepsilon - 1)\,t]^{l_{i1}}\,[-\varepsilon t^2 + (-\varepsilon^2 + 1)\,t + 1]^{l_{i2}}\,. \end{gathered} \tag{6}$$

Označme m-tou derivaci výrazu (6), (6)m. Dosaďme do (6)m $t = 0$ a označme obdržený výsledek (6t)m. Hledejme pro která nejmenší m je (6t)$m = 0$. Prvý výraz v (6) bude různý od 0 pro $m = \frac{1}{2}n$ a druhý výraz pro $m = l_{i1}$. Je zřejmé, že $l_{i1} < \frac{1}{2}n$.

Platí tedy:

1) jsou-li všechna $f_i \doteq 0$, pak $m = \frac{1}{2}n$. (kdyby i $b = 0$, potom sym. křivka je rozložitelná)
2) je-li aspoň jedno $f_i \mp 0$, pak $m = l_{i1}$.

V případě 1 má přímka s_1 s křivkou styk (v bodě D_1) právě $\frac{1}{2}n$ násobný a v případě 2 právě l_{i1} násobný. Zřejmě platí $l_{i1} = 2 + 3d$, $\frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(3m + 1) = \frac{1}{2}[3(m - 1) + 4] = = 2 + \frac{3}{2}(m - 1) = 2 + 3d$. Tím je tvrzení a) dokázané. Dokažme nyní tvrzení b) věty III.1.1. Dosadíme z (5) do (1):

$$a(3t)^n + b(3t^2)^{n/2} + \sum_i d_i(3t)^{m_{i1}}(3t^2)^{m_{i2}} + \sum_i e_i(3t)^{n_{i1}}(t^3 + 1)^{n_{i2}} + \\ + \sum_i f_i(3t^2)^{l_{i1}}(t^3 + 1)^{l_{i2}} + \sum_{ij} g_{ij}(3t)^{r_{ij1}}(3t^2)^{r_{ij2}}(t^3 + 1)^{r_{ij3}}. \tag{7}$$

Hledejme opět, pro která nejmenší m je $(7t)m \neq 0$. Zřejmě platí: prvý výraz pro $m = n$, druhý pro $m = n$, třetí pro $m = n$, čtvrtý pro $m = n_{i1}$ pátý pro $m = 2l_{i1}$, šestý pro $m = r_{ij1} + 2r_{ij2}$. Zřejmě je tedy $(7t)m \neq 0$ pro $m \geqq 2$. ($n = 3m + 2$, tedy $n_{i1} \geqq 2$). Kdyby $f_1 = 0$, potom i přímka s_1 má aspoň dvojnásobný styk s křivkou v bodě D_1 a bod D_1 musí být singulární bodem křivky. Proto pro pátý výraz $m = 2$. Může však nastat, že i $e_2 \neq 0$, ale $(7t)\,2 = 0$. To nastane jedině tehdy je-li $9e_2 + 3f_1 = 0$. Platí-li toto, pak současně platí i $(7t)\,3$ a $(7t)\,4$ jsou rovny nule. Pro $(7t)\,5$ musíme vše zkoumat znovu, protože přicházejí v úvahu další výrazy: f_4, e_5, g_{23}. Ale i zde platí totéž: je-li $(7t)\,5 = 0$ pak je rovno nule $(7t)\,6$ i $(7t)\,7$. Vyplývá to z toho, že výrazy 4, 5, 6 v (7) pro dané i jsou mnohočleny, kde t je v mocnině $2 + 3d$. (d je nezáporné celé číslo). Jsou-li vesměs $e_i = 0$, $f_i = 0$, $g_i = 0$, potom $m = n$. (za předpokladu, že křivka není rozložitelná). Také zde je $n = 2 + 3d$, neboť $n = 3m + 2$.

Věta 1.2. *D_1, D_2 jsou singulárními body dané nerozložitelné symetrické křivky I. druhu, platí-li:*

a) $n = 3m$ a $c = 0$

b) $n = 3m + 1$ a $e_1 = 0$

c) $n = 3m + 2$ a $f_1 = 0$.

Tato věta se dá uvést i v jiném znění:

Věta 1.3. *D_1, D_2 jsou singulárními body dané nerozložitelné symetrické křivky I. druhu, platí-li*: $c = e_1 = f_1 = 0$.

D ů k a z těchto dvou předcházejících vět plyne bezprostředně z důkazu věty 1.1. V těchto případech má jak přímka s_1, tak i d_1 s křivkou v bodě D_1 styk aspoň dvojnásobný.

V dalších několika poznámkách ukážeme některé důsledky věty 1.1.

P o z n á m k a 1. Zřejmě platí: Body D_1, D_2 neleží na nerozložitelné symetrické křivce I. druhu je-li $n = 3m$ a $c \neq 0$.

P o z n á m k a 2. Body D_1, D_2 jsou pro $n = 3m + 2$ inflexními jen ve speciálním případě a sice jestliže $3e_2 = -f_1$.

Poznámka 3. Na přímkách d_1, d_2 jsou význačné jenom body D_1, D_2 a J. Ostatní body jsou uspořádány do 6-tic a to tak, že tři body leží na d_1 a tři na d_2. Ve větě 1.1. jsme ukázali, že přímka d_1 má v bodě D_1 (je-li tento bod regulární) styk s danou sym. křivkou právě tolikanásobný, že pro zbývající průsečíky přímky s křivkou zůstává číslo dělitelné třemi. Z toho vyplývá: přímka d_1 má v bodě J s danou křivkou styk právě $3 + 3d$ násobný, kde d je nezáporné celé číslo. Protože totéž platí i pro přímku d_2, musí platit: Leží-li J na nerozložitelné symetrické křivce I. druhu, potom je tento bod singulární.

Poznámka 4. Věta 1.1. říká toto: Je-li bod $D_1(D_2)$ inflexním bodem symetrické křivky, pak je inflexním bodem řádu 2, 5, ... atd., jinými slovy, body D_1 a D_2 nám nahrazují 6, 12, 18, ... $(6 + 6k,\ k = 0, 1, 2, \ldots)$ obyčejných inflexních bodů. Dále je zajímavé to, že z rovnice křivky (vyjádřené (1)) poznáme zda body $D_1(D_2)$ jsou inflexními a kolik obyčejných inflexních bodů nám nahrazují.

§ 2. Body U_1, U_2, U_3 a sym. křivky prvého druhu. Věta 2.1. *Nechť body U_1, U_2, U_3 leží na nerozložitelné symetrické křivce* I. *druhu stupně n. Potom platí:*

a) *Je-li n sudé jsou body U_1, U_2, U_3 singulárními body dané křivky.*

b) *Je-li n liché a aspoň jedno z čísel d_1 a $f_{(n+3)/2}$ je různé od* 0, *jsou body U_1, U_2, U_3 inflexními body dané křivky a to řádu* $1 + 2d$, *kde d je nezáporné celé číslo.*

Důkaz. Budeme dokazovat pro U_1. Z vlastností kolineace (grupy (2)) plyne, že dokázané výsledky budou platit i pro body U_2 a U_3. Budeme postupovat podobně jako při důkaze věty 1.1. Zde však musíme nejdříve určit tečnu křivky v bodě U_1. Tato tečna má rovnici

$$x_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} = 0\,, \tag{8}$$

jestliže od $\partial F / \partial x_i$ dosadíme souřadnice U_1. Pro U_1 je $s_1 = 0$, $s_2 = -1$, $s_3 = 0$. Dále počítejme $\partial s_i / \partial x_i$ a dosaďme zároveň souřadnice U_1. Dostáváme

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial s_1}{\partial x_0} = 1\,, \quad \frac{\partial s_1}{\partial x_1} = 1\,, \quad \frac{\partial s_1}{\partial x_2} = 1\,,\\
&\frac{\partial s_2}{\partial x_0} = 0\,, \quad \frac{\partial s_2}{\partial x_1} = -1\,, \quad \frac{\partial s_2}{\partial x_2} = +1\,,\\
&\frac{\partial s_3}{\partial x_0} = -1\,, \quad \frac{\partial s_3}{\partial x_1} = 0\,, \quad \frac{\partial s_3}{\partial x_2} = 0\,.
\end{aligned} \tag{9}$$

Nyní derivujme (1) podle x_i a zároveň dosazujme $s_1 = 0$, $s_3 = 0$. ($b = 0$ neboť U_1 leží na křivce). Dostáváme:

$$\text{pro} \quad U_1 \ldots d_1 s_1' s_2^{m/2} + f_{(n-3)/2} s_2^{l(n-3)/2,1} s_3'\,. \tag{10}$$

Předpokládáme zde $n > 3$. (pro kubiku dostaneme ještě cs'_3). Počítejme nyní $\partial F/\partial x_0$, $\partial F/\partial x_1$, $\partial F/\partial x_2$. Budeme dosazovat z (9) do (10).

(11) a) $d_1 \neq 0,\ f_{n'} \neq 0,\ n' = \frac{1}{2}(n-3)$, potom $\partial F/\partial x_0 = \pm d_1 \pm f_{n'}$

b) $d_1 = 0,\ f_{n'} \neq 0,\ n' = \frac{1}{2}(n-3)$, potom $\partial F/\partial x_0 = \pm f_{n'}$

c) $d_1 \neq 0,\ f_{n'} = 0,\ n' = \frac{1}{2}(n-3)$, potom $\partial F/\partial x_0 = \pm d_1$

d) $d_1 \neq 0,\ n' = \frac{1}{2}(n-3)$, potom $\partial F/\partial x_1 = \partial F/\partial x_2 = \pm d_1$.

Nyní z (11) dosadíme do (8) a dostáváme pro tečnu t křivky v bodě U_1:

1) $d_1 \neq 0,\ f_{n'} \neq 0 \Rightarrow t \equiv (d_1 + f_{n'})\, x_0 + d_1 x_1 + d_1 x_2 = 0$

2) $d_1 \neq 0,\ f_{n'} = 0 \Rightarrow t \equiv x_0 + x_1 + x_2 = 0$

3) $d_1 = 0,\ f_{n'} \neq 0 \Rightarrow t \equiv x_0 = 0$

4) $d_1 = 0,\ f_{n'} = 0$, potom bod U_1 je singulárním bodem křivky.

V případech, kdy existuje obyčejná tečna je zřejmé (viz (1)), že stupeň křivky je liché číslo. Tím je prvá část věty 2.1. dokázána. Dokazujme nyní druhou část věty 2.1. Nejdříve pro případ 1). Parametrické rovnice tečny pro tento případ jsou: (nehomogenní parametr)

$$x_0 = -d_1 t\,, \quad x_1 = -1 + (d_1 + f_{n'})\, t\,, \quad x_2 = 1\,. \tag{12}$$

Dosaďme z (12) do s_1, s_2, s_3. Dostáváme

$$s_1 = f_{n'} t\,, \quad s_2 = (d_1 + f_{n'})\,(t - d_1 t^2) - 1\,, \quad s_3 = d_1 t - t^2(d_1 + f_{n'})\,. \tag{13}$$

Dosaďme z (13) do (1). Dostáváme (n je liché)

$$\begin{aligned}
& a(f_{n'}t)^n + c[d_1 t - t^2(d_1 + f_{n'})]^{n/3} + \\
& + \sum_i d_i (f_{n'}t)^{m_{i1}} [(d_1 + f_{n'})\,(t - d_1 t^2) - 1]^{m_{i2}} + \\
& + \sum_i e_i (f_{n'}t)^{n_{i1}} [d_1 t - t^2(d_1 + f_{n'})]^{n_{i2}} + \\
& + \sum_i f_i [(d_1 + f_{n'})\,(t - d_1 t^2) - 1]^{l_{i1}} [d_1 t - t^2(d_1 + f_{n'})]^{l_{i2}} + \\
& + \sum_{ij} g_{ij} (f_{n'}t)^{r_{ij1}} [(d_1 + f_{n'})\,(t - d_1 t^2) - 1]^{r_{ij2}} [d_1 t - t^2(d_1 + f_{n'})]^{r_{ij3}}\,.
\end{aligned} \tag{14}$$

Hledejme nyní pro která nejmenší m je $(14t)m \neq 0$. Prvý výraz je pro $m = n$, druhý pro $m = \frac{1}{3}n$, třetí pro $m = m_{i1}$, čtvrtý pro $m = n_{i1} + n_{i2}$, pátý pro $m = l_{i2}$, šestý pro $m = r_{ij1} + r_{ij3}$. Protože n je liché musí platit $m_{i1} = 1 + 2d$, $n_{i1} + n_{i2} = 3 + 2d$, $l_{i2} = 1 + 2d$, $r_{ij1} + r_{ij3} = 3 + 2d$. Pro $m = 1$ je sice třetí výraz v (14) různý od 0 a pátý také, ale $(14t)\ 1 = 0$. To plyne jednak z toho, že daná přímka je tečnou a jednak se o tom přesvědčíme dosazením do (14). $\frac{1}{3}n = 1 + 2d$, neboť $n - 3$ musí být sudé. Tím je případ 1) dokázán. Případ 2. Parametrické rovnice tečny pro případ 2 jsou

$$x_0 = t\,, \quad x_1 = -1\,, \quad x_2 = 1 - t\,. \tag{15}$$

Dosaďme z (15) do s_1, s_2, s_3. Dostáváme

$$s_1 = -2t\,, \quad s_2 = t^2 + t - 1\,, \quad s_3 = -t^2 + t\,. \tag{16}$$

Nyní máme dosadit z (16) do (1). Porovnejme (13) a (14), z hlediska toho jaké jsou s_1, s_2, s_3 mnohočleny v t. Stejná úvaha jako v případě 1) vede k důkazu případu 2.

Dokažme nyní případ 3. Parametrické rovnice tečny pro případ 3) jsou

$$x_0 = 0\,, \quad x_1 = -1\,, \quad x_2 = 1 + t\,. \tag{17}$$

$$s_1 = t\,, \quad s_2 = -1 + t\,, \quad s_3 = 0\,. \tag{18}$$

Dosadíme z (18) do (1). Dostáváme

$$at^n + \sum_i d_i t^{m_{i1}} (-1 + t)^{m_{i2}}\,. \tag{19}$$

Je opět zřejmé, že i v tomto případě je tvrzení věty správné.

Poznámka 5. Tvrzení věty 2.1. se dá formulovat takto:

a) Je-li n sudé potom body U_1, U_2, U_3 nejsou inflexními body.

b) Je-li n liché, pak jestliže body U_1, U_2, U_3 jsou regulárními body symetrické křivky, tak jsou inflexními body a nahrazují nám $3 + 6d$, kde d je nezáporné číslo, obyčejných inflexních bodů.

§ 3. Body ležící na přímkách u_1, u_2, u_3 a sym. křivky prvého druhu. Věta 3.1. *Nechť bod $A = (1, 1, k)$, kde k je libovolná konstanta, je inflexní bodem dané symetrické křivky I. druhu. Tento inflexní bod je řádu $2 + 2d$, kde d je libovolné nezáporné celé číslo.*

Důkaz. Z vlastností centrální kolineace je známo, že tečna v bodě A je spojnice AU_3. Tato přímka má parametrické rovnice

$$x_0 = t + 1\,, \quad x_1 = -t + 1\,, \quad x_2 = k\,, \tag{20}$$

a

$$s_1 = k + 2\,, \quad s_2 = -t^2 + 2k + 1\,, \quad s_3 = -kt^2 + k\,. \tag{21}$$

Dosadíme z (21) do (1). Dostáváme

$$(22) \qquad a(k+2)^n + b(-t^2+2k+1)^{n/2} + c(-kt^2+k)^{n/3} + \\ + \sum_i d_i(k+2)^{m_{i1}}(-t^2+2k+1)^{m_{i2}} + \sum_i e_i(k+2)^{n_{i1}}(-kt^2+k)^{n_{i2}} + \\ + \sum_i f_i(-t^2+2k+1)^{l_{i1}}(-kt^2+k)^{l_{i2}} + \\ + \sum_{ij} g_{ij}(k+2)^{r_{ij1}}(-t^2+2k+1)^{r_{ij2}}(-kt^2+k)^{r_{ij3}}.$$

Nyní opět určíme, pro která m je $(22t)$ $m = 0$. Všechny výrazy v (22), kde je t jsou mnohočleny, kde t je v mocnině 2, 4, 6, ..., $2 + 2d$, a d je nezáporné celé číslo. Snadnou úvahou důkaz této věty se dokončí. Z vlastností dané grupy plyne, že totéž platí pro bod $B = (1, k, 1)$ i pro bod $C = (k, 1, 1)$.

Poznámka 6. Zároveň odtud plyne, že pokud není bod A singulární, tak přímka AU_3 je tečnou v tomto bodě (toto jsme předpokládali za známé).

Poznámka 7. Důsledek této věty je tento: Trojice bodů A, B, C invariantní vzhledem ke grupě platí (v případě, že jsou to inflexní body) za 6, 12, ..., $6 + 6d$, d je nezáporné celé číslo, obyčejných inflexních bodů.

§ 4. **Inflexní body symetrických křivek prvého druhu.** Z vlastností kolineace plyne zcela samozřejmě, že inflexnímu bodu odpovídá inflexní bod. Obecně tedy se dají inflexní body sym. křivek I. druhu seskupit do šestic, které jsou invariantní jako celek vzhledem k dané grupě. V předcházejících paragrafech jsme ukázali, že i ve speciálních případech tj. tehdy, když dostáváme trojice a dvojice bodů invariantní jako celek vzhledem ke grupě, nám tyto body nahrazují šestice obyčejných inflexních bodů. Výjimka je v bodech U_1, U_2, U_3, které nahrazují $3 + 6d$ obyčejných inflexních bodů. Z toho plyne:

Věta 4.1. *Inflexní body symetrických křivek I. druhu, které neleží na přímce s_1, lze seskupit do šestic obyčejných inflexních bodů. Všechny body téže šestice leží na jediné symetrické kuželosečce.*

Poznámka 8. Zřejmě se v předcházející větě nevylučuje že:

a) dvě nebo více šestic splynou.

b) dvě nebo více šestic leží na téže symetrické kuželosečce.

c) Podle věty 3.1. dostaneme trojici bodů.

Dále můžeme uvažovat 12, 18, ... tice ležící na kubice, kvartice, ...

Věta 4.2. *Nechť symetrická křivka stupně n má ι obyčejných inflexních bodů a ι' obyčejných inflexních bodů, jež dostaneme odečteme-li od ι počet inflexních bodů jež nám nahrazují body D_1, D_2, U_1, U_2, U_3. Nechť $M = \frac{1}{2}[m(m+3)]$ je počet bodů,* *které určují křivku stupně m. Dále nechť $M \leqq \iota'$. Mezi inflexními body ι' lze vždy najít τ' inflexních bodů, které leží na symetrické křivce stupně m. Při čemž pro τ' platí $\tau' \geqq M > \tau' - 6$.*

Důkaz. Podle věty 4.1 se dají inflexní body v počtu ι' seskupit do $\tau/6$ šestic. Libovolných $\tau'/6$ těchto šestic vyhovuje větě 4.2.

Poznámka 9. V případě, že inflexní body uvažované v důkaze věty 4.2 leží na křivce stupně nižšího než m, tak tím spíše leží na křivce stupně m (tato křivka je zřejmě složená).

Smysl předcházejících vět je tento: Tím, že daná křivka je symetrická nám zaručuje, že τ' bodů leží na křivce stupně m. Při čemž je zajímavé, že toto číslo je většinou větší než počet bodů určující danou křivku. Dalšími zajímavými případy jsou ty, pro které platí, že daná křivka nemá s křivkou stupně m uvažovanou ve větě 4.2 další společné body. Toto a další zajímavé vlastnosti symetrických křivek ukážeme v dalším a závěrečném paragrafu.

§ 5. Symetrické křivky pro $n = 2, 3, 4$. V tomto paragrafu budeme aplikovat předcházející výsledky na křivky stupně 2, 3, 4. Při čemž budeme zkoumat dané křivky vzhledem k dané soustavě souřadnic. To znamená, že se nebudeme zabývat tím, zda křivka, která v dané soustavě symetrická není, v jiné soustavě je symetrická. Toto přenecháme čtenáři.

1. Symetrické kuželosečky. Podle III. (1) (nebudeme v dalším uvádět kapitolu, neboť se budeme vracet jedině ke kapitole III.) mají tuto rovnici: $as_1^2 + bs_2 = 0$. Podle věty 1.1 platí: Tečna v D_1 je d_1 z tečna v D_2 je d_2. Je to tedy svazek kuželoseček o dvou společných bodech a společných tečnách v těchto bodech. Jinak však zřejmě platí, že pro každou regulární kuželosečku lze najít takovou soustavu souřadnic, ve které je tato kuželosečka symetrická.

2. Symetrické kubiky. Podle (1) mají tuto rovnici:

$$as_1^3 + cs_3 + d_1 s_1 s_2 = 0\,. \tag{23}$$

Jestliže platí $c = 0$, pak zřejmě daná křivka bude rozložitelná. Podle poznámky 1 body D_1, D_2 neleží na symetrické kubice. Podle věty 2.1 jsou body U_1, U_2, U_3 inflexními body symetrické kubiky a to řádu 1.

a) Symetrická kubika bez singulárního bodu. Podle věty 4.1. zbývajících 6 inflexních bodů této kubiky tvoří šestici invariantní jako celek vzhledem k dané grupě. Dále se snadno ukáže, že body této šestice leží na přímkách d_1, d_2. Tedy platí:

Věta 5.1. *Nechť $A = (a_0, a_1, a_2)$ leží na $d_1(A \neq D_1, J)$. Šestice bodů invariantní jako celek ke grupě, jejímž bodem je bod A a body U_1, U_2, U_3 tvoří konfiguraci $(9_4, 12_3)$.*

Čtenář si jistě bude aplikovat další vlastnosti rovinné kubiky rodu 1 na symetrickou kubiku.

b) Symetrická kubika se singulárním bodem. Věta 5.2. *Existuje symetrická kubika s bodem uzlovým v J. Přímky d_1 a d_2 jsou tečny v tomto bodě. Kubika s bodem úvratu není symetrická.*

Důkaz je zřejmý. Dále je zřejmé:

Věta 5.3. *Nerozložitelná symetrická kubika má singulární bod, platí-li v* (23): $27a + c + 9d_1 = 0$. $(c \neq 0)$.

3. Symetrické kvartiky. Podle (1) mají rovnici:

$$as_1^4 + bs_2^2 + d_2s_1^2s_2 + e_1s_1s_3 = 0\,. \tag{24}$$

Je zřejmé, když v (24) je $b = 0$, pak daná kvartika je rozložitelná. Zkoumáme-li symetrické kvartiky z hlediska toho kolik a jaké singulární body mají, dostáváme tyto možnosti:

a) Symetrická kvartika bez singulárního bodu.
b) Symetrická kvartika s jedním obyčejným bodem uzlovým a bez dalších singularit.
c) Symetrická kvartika se dvěma inflexními body úvratu prvého řádu a bez dalších singularit.
d) Symetrická kvartika se třemi obyčejnými uzlovými body.
e) Symetrická kvartika se třemi obyčejnými body úvratu.
f) Symetrická kvartika s jedním obyčejným trojnásobným bodem.

a) Sym. kvartika bez singulárního bodu. Podle věty 1.1. je přímka s_1 tečnou křivky v D_1 a D_2. Zřejmě na přímce s_1 nemohou ležet další body křivky a tedy nutně platí, že body U_1, U_2, U_3 na této křivce neleží.

α) Inflexní body. Je známo, že tato kvartika má právě 24 obyčejných inflexních bodů. Podle předchozího body D_1, D_2, U_1, U_2, U_3 nemohou být inflexními. Lze tedy podle věty 4.1 rozdělit těchto 24 bodů do čtyř šestic bodů takových, že všechny body téže šestice leží na jediné symetrické kuželosečce. Zkoumejme jak je to s případy v poznámce 8. Případ a) nelze vyloučit a proto předpokládejme, že dané šestice bodů jsou navzájem různé. Případ b) nemůže nastat, neboť symetrická kuželosečka, která obsahuje body dvou různých šestic je nutně součást dané kvartiky. Uvažujeme nerozložitelnou kvartiku. Případ c). Uvažujme (22) pro $n = 4$. Dostáváme

$$\begin{aligned} a(k+2)^4 + b(-t^2+2k+1)^2 + d_2(k+2)^2(-t^2+2k+1) + \\ + e_1(k+2)(-kt^2+k)\,. \end{aligned} \tag{25}$$

Derivujme (25) podle t. Dostáváme

(26) $$2b(-t^2 + 2k + 1)(-2t) - 2td_2(k+2)^2 - 2e_1kt(k+2).$$

Derivujme (26) podle t. Dostáváme

(27) $$2b(-t^2 + 2k + 1)(-2) - 2d_2(k+2)^2 - 2e_1k(k+2) + 8bt^2.$$

Dosaďme do (27) $t = 0$ a dostáváme

(28) $$-4b(2k+1) - 2d_2(k+2)^2 - 2ke_1(k+2).$$

Jestliže výraz (28) je roven 0, potom bod o souřadnicích $(1, 1, k)$ je inflexním bodem dané křivky. Výraz (28) položen roven 0 je kvadratická rovnice pro k. Má tedy řešení nejvýše pro dvě různá k. (identita to je jen pro $b = d = 0$). Když toto k vypočteme musíme opět dosadit do (24) a zjistit zda bod $(1, 1, k)$ na dané kvartice leží. Z toho plyne:

Věta 5.4. *Ze čtyř navzájem různých šestic inflexních bodů symetrické kvartiky bez singulárního bodu mohou maximálně dvě šestice přejít v trojici vesměs různých bodů invariantních jako celek k dané grupě.*

Tím jsme se tedy vyrovnali s poznámkou 8. Jistě je zřejmé, jestliže daná šestice přejde v trojici bodů, pak tato trojice dává pro symetrické křivky procházející touto trojicí 6 podmínek, neboť spojnice bodu trojice s příslušným U_i je tečnou křivky v tomto bodě. Lze tedy vyslovit tuto větu:

Věta 5.5. 24 *obyčejnými inflexními body symetrické kvartiky bez singulárního bodu prochází právě* 6 *navzájem různých symetrických kubik, z nichž každá prochází právě* 12 *těmito body. Těchto* 6 *symetrických kubik lze seskupit do tří dvojic o nichž platí, že dvě kubiky dvojice nemají žádný bod dané kvartiky společný.*

Důkaz této věty je zřejmý. Jenom je třeba zdůraznit, že žádná z uvažovaných kubik nemá další společné body s kvartikou a jedná se tedy o úplný průnik.

Poznámka 9. Použijeme-li tzv. „Noetherovy věty" pak zřejmě platí: Budiž H hessián výše uvažované kvartiky. Každá z šesti kubik uvažovaných ve větě 5.5 protíná H v dalších šesti bodech. Těchto 6 bodů leží na jediné kuželosečce. Tyto kuželosečky jsou právě 3 tj. kubiky dvojic z věty 5.5 protínají Hessián v dalších dvanácti bodech, které leží na téže kuželosečce.

β) Vlastnosti bodů dotyku dvojnásobných tečen. Aplikujeme-li všechny známé vlastnosti o kvartikách na symetrické kvartiky dostaname další zajímavé vlastnosti. Provedeme zde na ukázku aplikaci výsledku, který je uveden v knize prof. BYDŽOVSKÉHO: Existují kuželosečky které obsahují po osmi dotykových bodech čtyř dvojnásobných tečen kvartiky. Je zřejmé, že dvojnásobné tečně bude odpovídat opět dvojnásobná tečna a totéž platí o bodech dotyku. Uvažovaná kvartika má 28 dvojnásobných tečen. Předpokládejme, že jsou vesměs různé a 56 jejich bodů dotyku je také navzájem různých. Jedna z těchto tečen je přímka s_1. Uvažujeme tečny z bodu U_1. Kvartika protíná u_1 ve 4 bodech. Spojnice těchto bodů s bodem U_1 je tečnou v daném bodě. Celkem lze vésti z U_1 12 tečen. Zbývá tedy 6. Nechť t_1 je tečnou kvartiky procházející U_1. V kolineaci se středem v $U_1 t_1$ odpovídá t'_1, která je opět tečnou a platí $t_1 \equiv t'_1$. Tedy musí být tato tečna dvojnásobná. Při čemž bodu dotyku na t_1 odpovídá bod dotyku na t'_1. Z bodu U_1 lze tedy vésti další tři dvojnásobné tečny. Totéž platí pro U_2, U_3. Dále je důležité, že dostáváme tři trojice přímek invariantních jako celek vzhledem k dané grupě a tři šestice dotykových bodů. Zbývajících 18 dvojnásobných tečen tvoří tři šestice přímek invariantních jako celek k dané grupě. Body dotyku tvoří celkem šest šestic bodů. Lze tedy seskupit body dotyku dvojnásobných tečen do devíti šestic bodů a zbývající dva body jsou body D_1, D_2. Podle úvahy, kterou jsme udělali ve větě 5.5 existuje celkem 36 navzájem různých kubik, které procházejí právě 12 z uvažovaných 54 bodů dotyku dvojnásobných tečen kvartiky. Snadnou úvahou zjistíme, budeme-li se zajímat o kubiky, které procházejí dvanácti dotykovými body šesti dvojnásobných tečen, že těchto kubik je 6. Dá se tedy pro symetrické kvartiky rodu 1 doplnit výsledek uvedený v úvodu tohoto odstavce: Existuje 6 navzájem různých symetrických kubik, které procházejí dvanácti dotykovými body šesti dvojnásobných tečen.

Poznámka 10. Ve větě 5.5 jsme předpokládali, že žádné dvě šestice nesplynou. Necháme na čtenáři jak se potom dosažené výsledky upraví, jestliže tento předpoklad neučiníme. V dalším jen projdeme ostatní symetrické kvartiky a necháme čtenáři aplikovat i na tyto křivky předcházející výsledky. Zejména pokud se týče inflexních bodů.

b) Symetrická kvartika s jedním obyčejným bodem uzlovým a bez dalších singularit. Z věty 1.1 je zřejmé, že s_1 je dvojnásobnou tečnou. Singulárním bodem je bod $J = (1, 1, 1)$. Tečny v něm jsou d_1 a d_2.

c) Symetrická kvartika se dvěma inflexními body úvratu a bez dalších singularit. Singulární body jsou D_1 a D_2. Tečna v D_1 je d_1 a vD_2 je d_2. Důsledkem věty 1.3 je:

Věta 5.6. *Je-li daná symetrická kvartika nerozložitelná a platí-li v (24): $e_1 = 0$, potom daná kvartika má body D_1, D_2 singulárními.*

d) Symetrická kvartika se třemi obyčejnými uzlovými body. Přímka s_1 je dvojnásobná tečna s body dotyku D_1, D_2. Singulární body jsou: $A = (1, 1, k)$ $B = (1, k, 1)$, $C = (k, 1, 1)$, kde $k \neq 1$. Tečny v A jsou AD_1 a AD_2, podobně v B jsou BD_1 a BD_2 a podobně v C jsou CD_1 a CD_2.

e) Symetrická kvartika se třemi obyčejnými body úvratu. Přímka s_1 je jedinou dvojnásobnou tečnou. Singulární body jsou na přímkách u_1, u_2, u_3 a přímky u_1, u_2, u_3 příslušné tečny.

f) Symetrická kvartika s jedním obyčejným trojnásobným bodem. Singulární bod je $J = (1, 1, 1)$. Tečny v něm jsou jeho spojnice s body U_1, U_2, U_3.

Poznámka 11. Pokusme se v této závěrečné poznámce ukázat jak nejvhodněji z (24) poznáme o jakou kvartiku jde. Případ c) poznáme snadno podle věty 5.6 tj. když v (24) je $e_1 = 0$. Uvažujme o vzájemné poloze přímky u_1 a symetrické kvartiky (24), kde je $e_1 \neq 0$. Pro případ a) platí, u_1 má s kvartikou právě 4 navzájem různé body společné. V případě b) má s kvartikou společné právě tři navzájem různé body, z nichž jeden je bod $J = (1, 1, 1)$. V případě *d*) má s kvartikou společné právě tři vesměs různé body z nichž ani jeden není bod $J = (1, 1, 1)$. Podobně uvážíme ve zbývajících případech. Dostáváme tento výsledek: Dosaďme v (25) $t = 0$. Dostáváme $a(k + 2)^4 + b(2k + 1)^2 + d_2(k + 2)^2 (2k + 1) + e_1k(k + 2)$. Tento výraz položíme roven 0 a dostáváme tím rovnici čtvrtého stupně pro k. Nyní tuto rovnici rozřešíme:

a) k_1, k_2, k_3, k_4 jsou vesměs různá a žádný z nich není roven 1. Daná symetrická kvartika nemá singulární bod.

b) $k_1 = 1, k_2, k_3$ jsou vesměs různé a k_1 je dvojnásobný kořen. Daná symetrická kvartika má právě jeden uzkový bod.

c) $k_1 = 1, k_2$ jsou různé a k_1 je trojnásobný kořen. Daná kvartika má jeden trojnásobný bod.

d) $k_1 \neq 1, k_2 \neq 1, k_3 \neq 1$ jsou vesměs různé (jeden z nich musí být dvojnásobný). Daná kvartika má právě tři obyčejné body uzlové.

e) $k_1 \neq 1, k_2 \neq 1$ jsou navzájem různé a jeden z nich je trojnásobným kořenem. Daná kvartika má právě tři obyčejné body úvratu.

Adresa autorů: Leninova 26, Olomouc (Palackého universita).

Zusammenfassung

SYMMETRISCHE KURVEN

Jaromír Krys, Josef Metelka, Olomouc

In diesem Artikel werden die Eigenschaften der symmetrischen Kurven studiert, d. h. der ebenen algebraischen Kurven, welche zur Kollineationsgruppe G_6 invariant sind. Die Gruppe G_6 ist mit der symmetrischen Gruppe der sechs Permutationen von drei Elementen isomorph. Es werden besonders ihre Wendepunkte untersucht. Diese Punkte sind mit weiteren algebraischen Kurven inzident.