Bohdan Zelinka

Rozklady simplexovitých grafů a zobecněných sudých grafů

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 95 (1970), No. 1, 1--6

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117675`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 95 * PRAHA 18. 2. 1970 * ČÍSLO 1

ROZKLADY SIMPLEXOVITÝCH GRAFŮ A ZOBECNĚNÝCH SUDÝCH GRAFŮ

BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Došlo dne 16. listopadu 1967)

Práce [5], [6], [7], [8] a [9] se zabývají rozklady grafů na dva navzájem isomorfní podgrafy. Zde budeme zkoumat rozklady určitých speciálních grafů, a to jednak tak zvaných simplexovitých grafů, a dále zobecněných grafů. Budeme vždy uvažovat grafy bez smyček a vícenásobných hran.

Neorientovaným simplexovitým grafem [3] nazýváme graf G, jehož množinu uzlů U lze rozložit na třídy $U_1, \ldots, U_m$ po dvou disjunktní tak, že dva uzly jsou v G spojeny hranou právě tehdy, náleží-li různým třídám tohoto rozkladu. Jinými slovy, simplexovitý graf je doplněk grafu, jehož komponenty jsou úplné grafy. Simplexovitý graf při $m = 2$ je úplný sudý graf. Jsou-li všechny třídy $U_1, \ldots, U_m$ jednoprvkové, je to úplný graf, je-li $m = 1$, jde o graf složený z isolovaných uzlů (tedy bez hran).

Nejdříve budeme zkoumat rozklad simplexovitého grafu na dva navzájem isomorfní podgrafy.

Lemma 1. *Budiž G neorientovaný simplexovitý graf, budiž $\mathcal{U} = \{U_\iota\}_{\iota \in I}$ příslušný rozklad jeho množiny uzlů. Budiž φ automorfismus grafu G. Pak existuje permutace π_φ množiny I taková, že pro všechna $\iota \in I$ platí $\varphi(U_\iota) = U_{\pi_\varphi(\iota)}$.*

Důkaz je jednoduchý. Mějme třídu $U_\iota \in \mathcal{U}$ a vezměme dva její uzly u, v. Uzly u, v nejsou (podle definice simplexovitého grafu) spojeny hranou, tedy ani $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ nejsou spojeny hranou. Kdyby $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ náležely různým třídám z $\mathcal{U}$, musely by být spojeny hranou; náležejí tedy téže třídě $U_\varkappa$, kde $\varkappa \in I$, a tedy, poněvadž u a v byly zcela libovolně zvoleny, $\varphi(U_\iota) \subset U_\varkappa$. Poněvadž však φ je automorfismus, existuje inversní automorfismus φ^{-1} a je $\varphi^{-1}(U_\varkappa) \supset U_\iota$. Avšak stejně jako pro φ jsme dokázali $\varphi(U_\iota) \subset U_\varkappa$, dokážeme pro φ^{-1}, že $\varphi^{-1}(U_\varkappa) \subset U_\lambda$, kde $\lambda \in I$. Potom $U_\iota \subset \varphi^{-1}(U_\varkappa) \subset U_\lambda$ a poněvadž U_ι, U_λ jsou třídy rozkladu $\mathcal{U}$, musí být $U_\iota = \varphi^{-1}(U_\varkappa) = U_\lambda$ a tedy $\varphi(U_\iota) = U_\varkappa$. Pro $\iota \neq \varkappa$ samozřejmě $\varphi(U_\iota) \neq \varphi(U_\varkappa)$, poněvadž jde o automorfismus a $U_\iota \neq U_\varkappa$.

Lemma 2. *Budiž G jako v lemmatu 1. Jsou-li U_1, U_2 třídy rozkladu $\mathcal{U}$ o různých počtech prvků, pak $\varphi(U_1) \neq U_2$ (přičemž $\varphi(U_1) \in \mathcal{U}$).*

Toto tvrzení je bezprostředním důsledkem lemmatu 1 a definice automorfismu.

V práci [8] je definován R_2-graf jako graf, který lze rozložit na dva navzájem isomorfní a hranově disjunktní podgrafy, z nichž každý obsahuje všechny uzly původního grafu, tak, že isomorfní zobrazení jednoho z těchto podgrafů na druhý je automorfismem původního grafu. V pracích [9] a [10] se obdobně zavádějí pojmy orientovaného R_2-grafu a R_2-d-grafu. Definice d-grafu je uvedena zde níže. Těchto pojmů budeme v dalším používat.

Věta 1. *Budiž G neorientovaný simplexovitý graf, budiž U jeho množina uzlů a $\mathcal{U} = \{U_\iota\}_{\iota \in I}$ (I je určitá množina indexů) příslušný rozklad této množiny. Nutnou a postačující podmínkou toho, aby G byl R_2-grafem, je, aby nejvýše pro jedno liché k byl počet tříd rozkladu $\mathcal{U}$ obsahujících právě po k prvcích kongruentní s 1 modulo 4 a pro všechna ostatní lichá k aby byl dělitelný čtyřmi nebo nekonečný.*

Důkaz. Dokážeme nejprve nutnost podmínky. Nechť G je R_2-graf, příslušné isomorfní zobrazení označíme φ. Označme p permutaci množiny U indukovanou zobrazením φ. Podle [8], je-li $\mathcal{C}$ cyklus permutace p o lichém počtu uzlů, pak žádné dva jeho uzly nejsou spojeny hranou. Znamená to, že každý takový cyklus, pokud existuje, se skládá pouze z uzlů jedné třídy rozkladu $\mathcal{U}$. Dále je v [8] dokázáno, že jsou-li $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ dva takové cykly, pak žádný uzel cyklu $\mathcal{C}_1$ není spojen hranou se žádným uzlem cyklu $\mathcal{C}_2$. Z toho vyplývá, že existuje nejvýše jedna třída rozkladu $\mathcal{U}$, jejíž prvky tvoří takovéto cykly. Označme tuto třídu W. Všechny cykly permutace p obsahující uzly z $U \dot{-} W$ musejí mít tedy sudý počet prvků. Budiž k liché číslo a nechť q je počet tříd rozkladu $\mathcal{U}$ obsahujících právě po k prvcích. Jestliže W neobsahuje právě k prvků, pak tedy vzhledem k lemmatu 2 číslo kq, což je celkový počet uzlů náležejících třídám o k prvcích, musí být sudé. Je-li k liché, musí být tedy q sudé. Označme $V_1, \ldots, V_q$ třídy rozkladu $\mathcal{U}$ obsahující právě po k prvcích. Poněvadž k je liché, musí být $\varphi(V_i) \neq V_i$, tedy také $p(V_i) \neq V_i$ pro každé $i = 1, \ldots, q$, protože v opačném případě by třída V_i musela být sjednocením cyklů permutace p o sudých počtech prvků a tedy mít sama sudý počet prvků. Budiž $\mathcal{C}$ cyklus permutace p složený z prvků množiny $\bigcup_{i=1}^{q} V_i$ a obsahující $2r$ uzlů, kde r je liché číslo. Budiž u jeden jeho uzel; předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $u \in V_1$. Pak uzel $p^r(u)$ nemůže být podle lemmatu 3 z [8] spojen s u hranou, tedy musí být $p^r(u) \in V_1$, z čehož plyne podle lemmatu 1, že $\varphi(V_1) = V_1$. Je-li $V = \bigcup_{i=0}^{r-1} \varphi^i(V_1)$, pak $\varphi(V) = V$. Počet $\bar{r}$ navzájem různých množin mezi množinami $\varphi^i(V_1)$, $i = 0, \ldots, r-1$, musí být dělitelem r. Poněvadž r je liché, je i $\bar{r}$ liché. Množina V obsahuje právě $k\bar{r}$ prvků, což je číslo liché. Na druhé straně však V musí být sjednocením určitých cyklů permutace p, tyto cykly mají sudé počty prvků, proto počet prvků množiny V je sudý, což je spor. Tedy počet prvků každého cyklu permutace p skládajícího se z uzlů množiny $\bigcup_{i=1}^{q} V_i$ musí být dělitelný čtyřmi. Pak i množina $\bigcup_{i=1}^{q} V_i$ má počet prvků dělitelný čtyřmi, tedy $kq \equiv$ $\equiv 0 \pmod 4$, z čehož plyne (protože k je liché) $q \equiv 0 \pmod 4$.

Nyní předpokládejme, že existuje W a obsahuje k prvků. Pak $\varphi(W) = W$ a pro ostatní třídy o k prvcích lze analogicky výše uvedenému dokázat, že jejich počet je dělitelný čtyřmi. Tedy počet všech tříd o k prvcích je kongruentní s 1 modulo 4. Protože množina W je nejvýše jedna, platí toto nejvýše pro jedno k.

Dokážeme nyní, že podmínka je postačující. Mějme dán graf G a na jeho množině uzlů U rozklad $\mathscr{U}$ splňující podmínku. Je-li U_ι třída rozkladu $\mathscr{U}$ o sudém počtu uzlů s, označíme její prvky $u_1, \ldots, u_s$ a definujeme $\varphi(u_i) = u_{i+1}$ pro $i = 1, \ldots, s-1$, $\varphi(u_s) = u_1$. Je-li $U_\varkappa$ třída rozkladu $\mathscr{U}$ o nekonečném spočetném počtu prvků, označíme její uzly v_i pro všechna celá i a definujeme $\varphi(v_i) = v_{i+1}$. Je-li U_λ třída rozkladu $\mathscr{U}$ o nespočetném počtu uzlů α, rozložíme ji na α spočetných podmnožin po dvou disjunktních a s každou provedeme totež, co v předešlém případě. Je-li k liché a počet tříd rozkladu $\mathscr{U}$ o k prvcích je kongruentní s 1 modulo 4, vybereme jednu třídu W z těchto tříd a položíme $\varphi(u) = u$ pro všechny uzly $u \in W$. Jsou-li $V_1, \ldots, V_q$ ostatní třídy o k prvcích, pak uzly třídy V_i označíme $u_1^{(i)}, \ldots, u_k^{(i)}$ a položíme $\varphi(u_j^{(i)}) = u_{j+1}^{(i)}$ pro $j = 1, \ldots, k-1$ a $\varphi(u_k^{(i)}) = u_1^{(i)}$. Totéž (kromě úvahy o W) provedeme v případě, že k je liché a počet tříd rozkladu $\mathscr{U}$ o k prvcích je dělitelný čtyřmi. Nyní postupujeme podobně jako v [6] a [7]. Zvolíme vždy jednu hranu $h = x_1x_2$ a zařadíme ji do G_1. Pak všechny hrany $p^r(x_1)\,p^r(x_2)$, kde r je sudé (resp. liché), zařadíme do G_1 (resp. do G_2). Pak vybereme opět jednu dosud nezařazenou hranu a provádíme s ní totéž. Takto pokračujeme, dokud není každá hrana zařazena buď do G_1, nebo do G_2. Každý cyklus permutace p buď má počet prvků dělitelný čtyřmi, nebo má počet prvků sudý a žádné dva jeho uzly nejsou spojeny hranou, nebo se skládá z jediného uzlu patřícího do W. Podle lemmatu 4 z [8] tedy počet prvků každého cyklu permutace indukované zobrazením φ na množině hran grafu G (to jest vlastně na množině neuspořádaných dvojic uzlů, které jsou spojeny hranami) je sudý. Tedy v případě, že by pro nějakou hranu $h = x_1x_2$ platilo $\varphi^{l_1}(h) = p^{l_1}(x_1)\,p^{l_1}(x_2) = p^{l_2}(x_1)\,p^{l_2}(x_2) =$ $= \varphi^{l_2}(h)$ kde l_1 je sudé, l_2 je liché, bylo by $h = x_1x_2 = p^{l_2-l_1}(x_1)\,p^{l_2-l_1}(x_2) =$ $= \varphi^{l_2-l_1}(h)$, což by vedlo ke sporu, neboť $l_2 - l_1$ je liché a počet hran cyklu obsahujícího h musí být dělitelem $l_2 - l_1$, tedy také lichý.

Důsledek 1. *Budiž G úplný sudý graf, budiž $\mathscr{U} = \{U_1, U_2\}$ příslušný rozklad jeho množiny uzlů. Graf G je R_2-grafem právě tehdy, jestliže alespoň jedna z množin U_1, U_2 má sudý nebo nekonečný počet uzlů.*

Nyní ještě dokážeme větu pro orientované simplexovité grafy. Orientovaným simplexovitým grafem budeme nazývat graf, který dostaneme z neorientovaného simplexovitého grafu tím, že každou neorientovanou hranu u_1u_2 nahradíme dvojicí orientovaných hran $\overrightarrow{u_1u_2}$, $\overrightarrow{u_2u_1}$.

Věta 2. *Budiž G orientovaný simplexovitý graf, budiž U jeho množina uzlů a* $\mathcal{U} = \{U_\iota\}_{\iota \in I}$ *příslušný rozklad této množiny. Nutnou a postačující podmínkou toho, aby G byl orientovaným* R_2*-grafem je, aby nejvýše pro jedno liché k byl počet tříd obsahujících právě po k prvcích lichý a pro všechna ostatní lichá k aby byl sudý nebo nekonečný.*

Důkaz. Stejným způsobem jako ve větě 1 dokážeme, že je-li k liché číslo, pak počet tříd rozkladu $\mathcal{U}$ o k prvcích musí být sudý, s výjimkou nejvýše jednoho k. Protože lemma 3 z [8] platí pouze pro neorientované grafy, pro orientované nikoliv, není nutnou podmínkou, aby tento počet byl dělitelný čtyřmi. Postačující podmínku dokážeme rovněž analogicky důkazu věty 1; zobrazení φ definujeme stejným způsobem (ovšem až na to, že místo kongruence modulo 4 bereme všude kongruenci modulo 2). Potom každý cyklus permutace p buď má sudý počet prvků, nebo je jednoprvkový a patří do W. Potom z lemmatu 3 z [9] plyne, že při konstrukci grafů G_1, G_2 analogické konstrukci popsané v důkazu věty 1 žádná hrana není zařazena současně do G_1 i do G_2, což se mělo dokázat.

Důsledek 2. *Budiž G úplný orientovaný sudý graf, budiž* $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ *příslušný rozklad jeho množiny uzlů. Graf G je orientovaným* R_2*-grafem právě tehdy, jestliže buď množiny* U_1 *a* U_2 *mají stejný počet uzlů, nebo jestliže alespoň jedna z nich má počet uzlů sudý nebo nekonečný.*

(Úplný orientovaný sudý graf je graf, jehož množinu uzlů U lze rozložit na dvě disjunktní podmnožiny U_1, U_2 tak, že z uzlu u jde orientovaná hrana do uzlu v právě tehdy, jestliže uzly u, v náležejí různým množinám z množin U_1, U_2.)

Nyní budeme zkoumat tak zvané zobecněné grafy (viz [1], [2], [4] a [10]).

Zobecněným grafem dimense d neboli d-grafem (bez smyček) nazýváme sjednocení dvou množin, a to množiny U, jejíž prvky nazýváme uzly, a množiny H, jejíž prvky nazýváme hranami dimense d, přičemž mezi uzly a hranami je dán vztah incidence, a to tak, že každá hrana je incidentní právě s d různými uzly a každých d různých uzlů je incidentních současně nejvýše s jednou hranou.

Je-li $d = 2$, dostáváme graf v obvyklém smyslu.

Zobecněným úplným sudým grafem dimense d budeme nazývat d-graf G takový, že existuje takový rozklad $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_d\}$ jeho množiny uzlů U, že libovolných d různých uzlů je spojeno hranou právě tehdy, jestliže žádné dva z nich nenáleží téže třídě U_i $(i = 1, \ldots, d)$.

Věta 3. *Budiž G zobecněný úplný sudý graf dimense d, budiž* $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_d\}$ *příslušný rozklad jeho množiny uzlů U. Nutnou a postačující podmínkou toho, aby G byl* $R_2 - d$*-grafem je, aby alespoň jedna z množin* $U_1, \ldots, U_d$ *měla počet uzlů sudý nebo nekonečný.*

Důkaz. Označme a_i počet uzlů množiny U_i pro $i = 1, \ldots, d$. Pak počet hran grafu G je zřejmě $\prod_{i=1}^{d} a_i$. Jsou-li všechna a_i lichá, je i součin $\prod_{i=1}^{d} a_i$ lichý. Poněvadž při rozkladu grafu G na dva navzájem isomorfní podgrafy musejí zřejmě oba tyto podgrafy mít stejný počet hran a žádnou hranu nemohou mít společnou, počet hran celého grafu G musí být dvojnásobkem počtu hran kteréhokoliv z těchto podgrafů a musí být tedy sudý. Je-li tedy číslo $\prod_{i=1}^{d} a_i$ liché, takovýto rozklad neexistuje.

Nechť bez újmy na obecnosti množina U_1 má sudý (resp. nekonečný) počet uzlů. Označme její uzly u_i pro $i = 1, \ldots, k$, kde k je počet uzlů množiny U_1 (resp. pro všechna celá i) a položíme $\varphi(u_i) = u_{i+1}$ pro $i = 1, \ldots, k - 1$, $\varphi(u_k) = u_1$ (resp. $\varphi(u_i) = u_{i+1}$ pro všechna celá i). Pro každý uzel $v \notin U_1$ položíme $\varphi(v) = v$. Je-li nyní h hrana d-grafu G, pak h spojuje uzly $v_1, \ldots, v_d$, kde $v_i \in U_i$ pro $i = 1, \ldots, d$. Je tedy $v_1 \in U_1$, tedy $v_1 = u_l$ pro nějaké l, $1 \leqq l \leqq k$. Každá hrana, která je obrazem hrany h v zobrazení φ^r, kde r je sudé (resp. liché), spojuje uzly $u_m, v_2, \ldots, v_d$, kde m je téže (resp. opačné) parity jako l. Zařadíme-li tedy hrany $\varphi^r(h)$ při r sudém do G_1 a při r lichém do G_2, nemůže se stát, že by tatáž hrana byla zařazena současně do G_1 i do G_2. Hledaný rozklad tedy lze sestrojit podobně jako v důkaze věty 1 a v citovaných pracích.

Literatura

[1] *P. Erdös:* On extremal problems of graphs and generalized graphs. Israel J. Math. *2* (1964), 183—190.

[2] *P. Erdös:* A problem of independent *r*-tuples. Ann. Univ. Scient. Budapest, Ser. Math. *8* (1965), 93—95.

[3] *H. A. Jung:* Über simplexartige Graphen. Lecture at the Colloquium on the Graph Theory held in Tihany in September 1966.

[4] *G. Katona:* On a problem concerning the generalized graphs. Lecture at the Colloquium on the Graph held in Tihany in September 1966.

[5] *R. C. Read:* On the number of self-complementary graphs and digraphs. J. London Math. Soc. *38* (1963), 99—104.

[6] *G. Ringel:* Selbstkomplementäre Graphen. Arch. Math. *14* (1963), 354—358.

[7] *H. Sachs:* Über selbstkomplementäre Graphen. Publ. Math. Debrecen *9* (1962), 270—288.

[8] *B. Zelinka:* Rozklad grafu na isomorfní podgrafy. Čas. pěst. mat. *90* (1965), 147—152.

[9] *R. Zelinka:* The decomposition of a digraph into isomorphic subgraphs. Mat. čas. SAV (v tisku).

[10] *B. Zelinka:* The decomposition of a generalized graph into isomorphic subgraphs. Čas. pěst. mat. *93* (1968), 278—283.

Adresa autora: Liberec, Studentská 5 (Vysoká škola strojní a textilní).

Summary

DECOMPOSITIONS OF SIMPLEX-LIKE GRAPHS AND GENERALIZED BIPARTITE GRAPHS

BOHDAN ZELINKA, Liberec

An undirected simplex-like graph is a graph G whose vertex set U can be partitioned into mutually disjoint classes $U_1, \ldots, U_m$ such that two vertices in G are joined by an edge if and only if they belong to different classes of this partition. If we substitute each edge u_1u_2 of an undirected simplex-like graph by the pair of directed edges $\overrightarrow{u_1u_2}, \overrightarrow{u_2u_1}$ we obtain a directed simplex-like graph.

A generalized graph of the dimension d or a d-graph (without loops) is the union of two sets, the set U whose elements are called vertices and the set H whose elements are called edges of the dimension d, while a relation of incidence between vertices and edges is given so that each edge is incident exactly with d different vertices and any d different vertices are incident together at most with one edge.

An R_2-graph is a graph (directed or undirected) which can be decomposed into two edge-disjoint subgraphs isomorphic to each other, each of which contains all vertices of the original graph, so that the isomorphic mapping of one subgraph onto the other is an automorphism of the original graph. Analogously an R_2-d-graph is defined.

The following three theorems are proved in the paper.

Theorem 1. *Let G be an undirected simplex-like graph, let U be its vertex set and $\mathscr{U} = \{U_\iota\}_{\iota \in I}$ (I is a certain subscript set) the corresponding partition of this set. A necessary and sufficient condition for G to be an R_2-graph is that at most for one odd k the number of classes of the partition $\mathscr{U}$ containing exactly k elements each is congruent with 1 modulo 4 and for all other k it is divisible by four or infinite.*

Theorem 2. *Let G be a directed simplex-like graph, let U be its vertex set and $\mathscr{U} = \{U_\iota\}_{\iota \in I}$ the corresponding partition of this set. A necessary and sufficient condition for G to be a directed R_2-graph is that at most for one odd k the number of classes of the partition $\mathscr{U}$ containing exactly k elements each is odd and for all other odd k it is even or infinite.*

Theorem 3. *Let G be a complete bipartite generalized graph of the dimension d, let $\mathscr{U} = \{U_1, \ldots, U_d\}$ be the corresponding partition of its vertex set U. A necessary and sufficient condition for G to be an R_2-d-graph is that at least one of the sets $U_1, \ldots, U_d$ has an even or infinite number of vertices.*