Časopis pro pěstování matematiky

Zbyněk Nádeník

Analogon zum Satz von Hilbert über Flächen konstanter positiver Krümmung

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 94 (1969), No. 2, 206--212

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117667`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 94 (1969), Praha

ANALOGON ZUM SATZ VON HILBERT ÜBER FLÄCHEN KONSTANTER POSITIVER KRÜMMUNG

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Eingegangen am 28. Dezember 1967)

A) D. HILBERT ([6] und [7], Anhang V) hat bekanntlich diesen Satz hergeleitet (vgl. [2], § 75; auch [3] oder [4], § 3 und [5], § 60):

(a) *Innerhalb einer analytischen regulären Fläche von fester positiver Gaussischer Krümmung kann an einer Stelle, die kein Nabelpunkt ist, keiner der Hauptkrümmungshalbmesser einen Extremwert haben.*

D. HILBERT hat aus diesem Theorem auf bekannte Weise (siehe alle vorzitierten Arbeiten) auch die zuerst von H. LIEBMANN [8] und später von vielen Verfassern verschiedenartig bewiesene Kennzeichnung der Kugelfläche gefolgert:

(b) *Die einzige geschlossene reguläre analytische Fläche mit konstanter positiver Krümmung ist die Kugelfläche.*

W. BLASCHKE in [2], § 76 hat aus (a) durch eine von O. BONNET angegebene Behauptung über Parallelflächen fester mittlerer oder Gaussischer Krümmung eine andere zuerst auch von H. LIEBMANN [9] entdeckte charakteristische Eigenschaft der Kugelfläche abgeleitet:

(c) *Die einzige geschlossene reguläre analytische Fläche mit überall positiver Gaussischer Krümmung und mit konstanter mittlerer Krümmung ist die Kugelfläche.*

B) Im n-dimensionalen euklidischen Raum $E_n(n > 3)$ werden wir eine zweidimensionale durch $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ dargestellte reguläre analytische Fläche F mit fogender Eigenschaft betrachten: Jedem Punkt $\mathbf{x}(u, v)$ von F kann man einen analytischen Einheitsnormalenvektor $\mathbf{n}(u, v)$ – wir bezeichnen ihn als Rodriguesschen Normalenvektor von F – so zuordnen, dass $d\mathbf{n}(u, v)$ in der Tangentenebene von F in $\mathbf{x}(u, v)$ liegt.

Offensichtlich für jede auf einer Hyperkugelfläche H oder Hyperebene H liegende analytische reguläre zweidimensionale Fläche ist der Einheitsnormalenvektor von H ihr Rodriquesscher Normalenvektor. Dagegen die in H nicht so einbettbare Fläche F, dass ihr Rodriguesscher Vektor $\mathbf{n}$ der Normalenvektor von H ist, hängt von einer willkürlichen Funktion zweier Variablen ab. Die Voraussetzung der Analytizität ist für den Existenzbeweis erforderlich (s. Abschn. 1).

Wir bezeichnen mit ds das Bogenelement von F und mit $1/r_1$, $1/r_2$ die Extremwerte des als Funktion der Tangentenrichtungen in $\mathbf{x}(u, v)$ aufgefassten Skalarproduktes $\mathbf{n}(u, v) \,.\, \mathrm{d}^2\mathbf{x}(u, v)/\mathrm{d}s^2$. Wir benennen sie die Hauptkrümmungen in bezug auf $\mathbf{n}(u, v)$. (Vgl. dazu [1], S. 20 und [10].) Sie stellen zwei Invarianten dar (s. Abschn. 2).

Es seien $\mathbf{n}_2(u, v), \ldots, \mathbf{n}_{n-2}(u, v)$ die Einheitsnormalenvektoren von F in $\mathbf{x}(u, v)$, welche untereinander und zu $\mathbf{n}(u, v)$ orthogonal sind. Die Summe

$$\sum_{j=2}^{u-2} \left[\max \mathbf{n}_j(u, v) \,.\, \mathrm{d}^2\mathbf{x}(u, v)/\mathrm{d}s^2\right] \left[\min \mathbf{n}_j(u, v) \,.\, \mathrm{d}^2\mathbf{x}(u, v)/\mathrm{d}s^2\right],$$

wo die Extreme wieder bezüglich der Tangentenrichtungen von F in $\mathbf{x}(u, v)$ zu nehmen sind, ist eine Invariante von F (s. Abschn. 2). Falls sie um $1/(r_1 r_2)$ vergrössert wird, so stellt sie ein Analogon zur Gaussischen Krümmung einer Fläche in E_3 dar (s. Abschn. 2); wir benennen es „Totalkrümmung" von F in $\mathbf{x}(u, v)$.

C) Ein mehrdimensionales Seitenstück zum Satz (a) lautet nun folgends (s. Abschn. 3):

(α) *Eine Fläche F mit dem Rodriguesschen Normalenvektor $\mathbf{n}$ habe durchweg positive Totalkrümmung und konstantes positives Produkt der Hauptkrümmungen $1/r_1$, $1/r_2$ in bezug auf $\mathbf{n}$. Innerhalb von F kann an einer Stelle, wo $r_1 \neq r_2$, weder r_1 noch r_2 einen Extremwert erreichen.*

Die Gegenstücke zu (b) und (c) sind:

(β) *Eine geschlossene Fläche F mit dem Rodriguesschen Normalenvektor $\mathbf{n}$, welche überall positive Totalkrümmung hat und welche konstantes positives Produkt der Hauptkrümmungen in bezug auf $\mathbf{n}$ besitzt, liegt auf einer Hyperkugelfläche mit dem Normalenvektor $\mathbf{n}$.*

(γ) *Eine geschlossene Fläche F mit dem Rodriguesschen Normalenvektor $\mathbf{n}$, welche überall positive Totalkrümmung und positives Produkt der Hauptkrümmungen in bezug auf $\mathbf{n}$ hat und welche konstante von Null verschiedene Summe dieser Hauptkrümmungen besitzt, liegt auf einer Hyperkugelfläche mit dem Normalenvektor $\mathbf{n}$.*

(β) ergibt sich aus (α) auf dieselbe Weise, auf welche (b) aus (a) folgt, d.h. auf Grund der Geschlossenheit von F. (γ) kann aus (β) ähnlich wie (c) aus (b) hergeleitet werden. Es erübrigt sich deshalb, den Beweis von (β) anzugeben.

Im folgenden enthält Abschn. 1 den Existenzbeweis für Flächen F, Abschn. 2 eine geringe Erwähnung von ihrer Geometrie, Abschn. 3 den Beweis des Satzes (α) und Abschn. 4 eine Skizze des Beweises von (γ).

1. Das begleitende n-Bein $\mathbf{t}_1 \ldots \mathbf{t}_n (\mathbf{t}_i \,.\, \mathbf{t}_j = \delta_j^i)$ eines Punktes $\mathbf{x} \in E_n$, dessen Infinitesimalbewegung durch

$$(1{,}1) \qquad \mathrm{d}\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \mathbf{t}_i\,, \quad \mathrm{d}\mathbf{t}_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \mathbf{t}_j\,, \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

gegeben ist, wo alle ω die den wohlbekannten Integrabilitätsbedingungen unterworfenen Pfaffschen Formen sind, spezialisieren wir für unsere Fläche F so, dass $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{t}_2$ in der Tangentenebene von $\boldsymbol{x} \in F$ liegen und dass $\mathbf{t}_3$ der Rodriguessche Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ von F in $\boldsymbol{x}$ ist. Dann ist in (1,1)

$$\omega_h = 0 \quad (h = 3, \ldots, n)\,, \tag{1,2}$$

$$\omega_{3k} = 0 \quad (k = 4, \ldots, n) \tag{1,3}$$

und freilich $[\omega_1 \omega_2] \neq 0$. Aus (1,2) ergibt sich

$$\begin{aligned} \omega_{13} &= a\omega_1 + b\omega_2\,, \quad \omega_{1k} = a_k\omega_1 + b_k\omega_2\,, \\ \omega_{23} &= b\omega_1 + c\omega_2\,; \quad \omega_{2k} = b_k\omega_1 + c_k\omega_2 \quad (k = 4, \ldots, n)\,, \end{aligned} \tag{1,4}$$

wo die Skalarfunktionen $a, \ldots, c_n$ den Bedingungen

$$(a - c)\, b_k = (a_k - c_k)\, b \quad (k = 4, \ldots, n) \tag{1,5}$$

genügen; sie folgen nämlich nach (1,4) aus äusserer Diferentiation von (1,3).

Gemäss (1,2) und (1,3) erhält man aus (1,4), dass (stets $k = 4, \ldots, n$)

$$\begin{aligned} &[\mathrm{d}a - 2b\omega_{12}, \omega_1] + [\mathrm{d}b + (a - c)\,\omega_{12}, \omega_2] = 0\,, \\ &[\mathrm{d}b + (a - c)\,\omega_{12}, \omega_1] + [\mathrm{d}c + 2b\omega_{12}, \omega_2] = 0\,, \end{aligned} \tag{1,6}$$

$$\begin{aligned} &[\mathrm{d}a_k - 2b_k\omega_{12} + \sum_{s=4}^{n} a_s\omega_{sk}, \omega_1] + \\ &+ [\mathrm{d}b_k + (a_k - c_k)\,\omega_{12} + \sum_{s=4}^{n} b_s\omega_{sk}, \omega_2] = 0\,, \\ &[\mathrm{d}b_k + (a_k - c_k)\,\omega_{12} + \sum_{s=4}^{n} b_s\omega_{sk}, \omega_1] + \\ &+ [\mathrm{d}c_k + 2b_k\omega_{12} + \sum_{s=4}^{n} c_s\omega_{sk}, \omega_2] = 0\,. \end{aligned} \tag{1,7}$$

Die durch Differentiation von (1,5) gewonnenen Gleichungen kann man zufolge (1,5) auch so schreiben:

$$\begin{aligned} &b_k\{(\mathrm{d}a - 2b\omega_{12}) - (\mathrm{d}c + 2b\omega_{12})\} + \\ &+ (a - c)\,\{\mathrm{d}b_k + (a_k - c_k)\,\omega_{12} + \sum_{s=4}^{n} b_s\omega_{sk}\} = \\ &= b\{(\mathrm{d}a_k - 2b_k\omega_{12} + \sum_{s=4}^{n} a_s\omega_{sk}) - (\mathrm{d}c_k + 2b_k\omega_{12} + \sum_{s=4}^{n} c_s\omega_{sk})\} + \\ &+ (a_k - c_k)\,\{\mathrm{d}b + (a - c)\,\omega_{12}\} \quad (k = 4, \ldots, n)\,. \end{aligned} \tag{1,8}$$

Die nach dem Lemma von Cartan durchgeführte Lösung von (1,6) und (1,7) enthält $4(n-2)$ Parameter. Falls aber

$$(a-c)^2 + b^2 > 0 \tag{1,9}$$

ist, so ergibt sich sofort in Hinsicht auf (1,8), dass nur $2n-2$ willkürliche Parameter bleiben.

Das verlängerte System (1,2) + (1,3) + (1,4) + (1,8) des ursprünglichen (1,2) + + (1,3) schliesst sich mit (1,6) und (1,7) ab. Seine charakteristischen Zahlen sind $s_1 = 2n-4$, $s_2 = 1$, sodass es in Involution ist und seine Lösung hängt von einer Funktion zweier Variablen ab.

Gilt dagegen (1,9) nicht, d. h. ist

$$a - c = 0\,, \quad b = 0\,, \tag{1,10}$$

so ergibt sich aus (1,6), dass $a = c =$ konst. und wir haben mit dem System zu tun, welches aus (1,2), (1,3) und

$$\omega_{13} = a\omega_1\,, \quad \omega_{23} = a\omega_2\,, \quad a = \text{konst.} \tag{1,11}$$

besteht. Es schliesst sich mit Gleichungen $[\omega_1\omega_{1k}] + [\omega_2\omega_{2k}] = 0$ $(k = 4, \ldots, n)$, deren Lösung nach dem Cartanschen Lemma $3(n-3)$ unabhängige Parameter enthält. Die charakteristischen Zahlen des Systems sind $s_1 = n-3$, $s_2 = n-3$, folglich ist es in Involution und seine Lösung hängt von $n-3$ Funktionen zweier Variablen ab.

Dies ist auch geometrisch offensichtlich. Denn aus (1,1)–(1,3) und (1,11) folgt $\mathrm{d}\boldsymbol{n} = -a\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ und unsere Fläche F befindet sich auf einer Hyperkugelfläche oder Hyperebene, je nachdem $a \neq 0$ oder $a = 0$ ist.

2. Aus (1,1)–(1,4) mit $\boldsymbol{t}_3 \equiv \boldsymbol{n}$ folgt

$$\boldsymbol{n} \,.\, \mathrm{d}^2\boldsymbol{x} \mid \mathrm{d}s^2 = (a\omega_1^2 + 2b\omega_1\omega_2 + c\omega_2^2) : (\omega_1^2 + \omega_2^2)\,, \tag{2,1}$$

sodass $ac - b^2$ bzw. $a + c$ das Produkt bzw. die Summe der Extremwerte $1/r_1$, $1/r_2$ von (2,1) in bezug auf alle Tangentenrichtungen $\omega_1 : \omega_2$ ist. Die Invarianz von $ac - b^2$ und $a + c$ ist eine unmittelbare Folge von (1,6).

Ganz ähnlich beweist man, dass

$$\sum_{k=4}^{n} (\max \boldsymbol{t}_k \,.\, \mathrm{d}^2\boldsymbol{x} \mid \mathrm{d}s^2)(\min \boldsymbol{t}_k \,.\, \mathrm{d}^2\boldsymbol{x} \mid \mathrm{d}s^2) = \sum_{k=4}^{n} (a_k c_k - b_k^2)$$

und aus (1,7) ergibt sich, dass auch diese Summe eine Invariante ist. (Vgl. dazu [10], Einleitung und Abschn. 1.) Man bestätigt leicht, dass für die „Totalkrümmung" K von F gilt

$$K = -\,[\mathrm{d}\omega_{12}] : [\omega_1\omega_2]\,. \tag{2,2}$$

Nach (1,1)–(1,3) mit $\mathbf{t}_3 \equiv \boldsymbol{n}$ und zufolge erster Spalle in (1,4) ist die „zweite Grundform von F in bezug auf n" durch $-\mathrm{d}\boldsymbol{x} \,.\, \mathrm{d}\boldsymbol{n} = b\omega_1^2 + (c - a)\,\omega_1\omega_2 - b\omega_2^2$ ausgedrückt und es ist ohne weiters klar, dass die Geometrie dieser Form dieselbe wie die der zweiten Grundform einer Fläche in E_3 ist. Wir können deshalb auch die diesbezügliche Terminologie behalten, mit Hinzufügung von „in bezug auf den Rodriguesschen Vektor". Beispielweise eine Fläche F, deren alle Punkte ihre „Nabelpunkte in bezűg auf $\boldsymbol{n}$" sind, liegt – nach dem Schluss des Abschn. 1 – auf einer Hyperkugel oder Hyperebene.

3. Es sei jetzt auf unserer Fläche F mit dem Rodriguesschen Normalenvektor $\boldsymbol{n} \equiv \mathbf{t}_3$ durchwegs

$$r_1 r_2 = \text{konst.} > 0 \,. \tag{3,1}$$

Wir nehmen im Gegensatz zu (α) an, dass r_1, r_2 in einem inneren Punkt $P \in F$ verschiedene Extremwerte erreichen. Dann ist sogar $r_1 \neq r_2$ in gewisser Umgebung $U_P \subset F$ von P und folglich kann man in jedem Punkt von U_P die Vektoren $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ in den „Hauptrichtungen in bezug auf $\boldsymbol{n}$" wählen. Das bedeutet, dass in U_P stets

$$a = 1/r_1 \,, \quad b = 0 \,, \quad c = 1/r_2 \,; \tag{3,2}$$

somit nach (1,6)

$$\mathrm{d}a = A\omega_1 + B\omega_2 \,, \quad (a - c)\,\omega_{12} = B\omega_1 + C\omega_2 \,, \quad \mathrm{d}c = C\omega_1 + D\omega_2 \,. \tag{3,3}$$

Man darf freilich $a|_P$ für das Maximum und $c|_P$ für das Minimum halten. Dann ist

$$a|_P > c|_P \tag{3,4}$$

und in allen Tangentenrichtungen

$$\mathrm{d}a|_P = 0 \,, \quad \mathrm{d}c|_P = 0 \,, \quad \mathrm{d}^2 a|_P \leqq 0 \,; \tag{3,5}$$

folglich nach (3,3)

$$A|_P = B|_P = C|_P = D|_P = 0 \,. \tag{3,6}$$

Aus der ersten Gleichung (3,3) ergibt sich

$$\mathrm{d}A - B\omega_{12} = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \,, \quad \mathrm{d}B + A\omega_{12} = \beta\omega_1 + \gamma\omega_2 \,, \tag{3,7}$$

sodass nach (3,6) die gewöhnliche Differentiation derselben Gleichung zu $\mathrm{d}^2 a|_P = \alpha\omega_1^2 + 2\beta\omega_1\omega_2 + \gamma\omega_2^2|_P$ führt. Zufolge dritter Relation (3,5) ist deshalb

$$\alpha|_P \leqq 0 \,, \quad \gamma|_P \leqq 0 \,. \tag{3,8}$$

Aus (3,1)–(3,3) ergibt sich $cA + aC = 0$. Daraus und aus (3,6) folgt $c\,dA + a\,dC|_P = 0$. Also nach (3,6) und (3,7) unter Berücksichtigung von (3,2) und (3,1)

$$dB|_P = \beta\omega_1 + \gamma\omega_2|_P\,, \quad dC|_P = -\frac{c}{a}(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2)|_P\,. \tag{3,9}$$

Die in Hinsicht auf (1,2) und unter Zuhilfenahme von (2,2) berechnete äussere Differentiation der inmitten in (3,3) stehenden Gleichung und die nachfolgende Reduktion für den Punkt P mittels (3,5), (3,6) und (3,9) liefern $(c - a)K|_P = -\gamma - c\alpha/a|_P$. Dies ist aber für $K|_P > 0$ nach (3,1), (3,2), (3,4) und (3,8) im Widerspruch.

4. Nach den Voraussetzungen des Satzes (γ) und nach dem Anfang des Abschn. 2 ist

$$\begin{aligned} &1/r_1 + 1/r_2 = a + c = \mu\,\text{konst.} \neq 0\,, \\ &1/r_1r_2 = ac - b^2 \neq 0\,, \quad K \neq 0\,, \quad \operatorname{sgn}(ac - b^2) = \operatorname{sgn} K\,. \end{aligned} \tag{4,1}$$

Für den Ortsvektor

$$'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(u, v) + \mu\boldsymbol{n}(u, v) \tag{4,2}$$

gilt nach (1,1)–(1,3) mit $\mathbf{t}_3 \equiv \boldsymbol{n}$

$$d'\boldsymbol{x} = (\omega_1 + \mu\omega_{31})\,\mathbf{t}_1 + (\omega_2 + \mu\omega_{32})\,\mathbf{t}_2 \tag{4,3}$$

und weil nach (1,4)

$$[\omega_1 + \mu\omega_{31}, \omega_2 + \mu\omega_{32}] = (ac - b^2)(a + c)^{-2}\,[\omega_1\omega_2]\,, \tag{4,4}$$

so ist (4,2) — zufolge (4,1) und (4,3) — die Parameterdarstellung einer zweidimensionalen regulären und freilich analytischen Fläche $'F$ (Parallelfläche zu F in bezug auf $\boldsymbol{n}$), für welche $\boldsymbol{n}$ der Rodriquessche Normalenvektor ist und welche dieselben n-Beine wie die ursprüngliche Fläche F besitzt.

Auf Grund von (4,3) und gemäss (4,1) und (4,4) berechnen wir nach dem Abschn. 2 die Totalkrümmung $'K$ von $'F$

$$'K = -[d\omega_{12}] : [\omega_1 + \mu\omega_{31}, \omega_2 + \mu\omega_{32}] = \mu^2 r_1 r_2 K > 0$$

und das Produkt der Hauptkrümmungsradien $'r_1, 'r_2$ von F in bezug auf $\boldsymbol{n}$

$$'r_1'r_2 = [\omega_{13}\omega_{23}] : [\omega_1 + \mu\omega_{31}, \omega_2 + \mu\omega_{32}] = \mu^2 = \text{konst.} > 0\,.$$

Infolgedessen liegt $'F$ nach (β) auf einer Hyperkugelfläche mit dem Normalenvektor $\boldsymbol{n}$. Daraus ergibt sich sofort die Behauptung von (γ).

Literatur

[1] *O. Borůvka:* Sur les hypercirconférences et certaines surfaces paraboliques dans l'espace euclidien à quatre dimensions. Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, n° *146* (1931).

[2] *W. Blaschke:* Vorlesungen über Differentialgeometrie I. Elementare Differentialgeometrie. Berlin 1921.

[3] *S. Cohn-Vossen* (С. Э. Кон-Фоссэн): Изгибаемость поверхностей „в целом". Успехи мат. наук *1* (1936), 33—76.

[4] *С. Э. Кон-Фоссен:* Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. (Под редакцией Н. В. Ефимова.) Москва 1959.

[5] *N. W. Efimov:* Flächenverbiegung im Grossen. Mit einem Nachtrag von E. Rembs und K. P. Grotemeyer. Berlin 1957.

[6] *D. Hilbert:* Über Flächen von konstanter Gaussscher Krümmung. Trans. Amer. Math. Soc. *2* (1901), 87—99.

[7] *D. Hilbert:* Grundlagen der Geometrie. 7. Aufl. Leipzig—Berlin 1930. (Основания геометрии. Москва-Ленинград 1948.)

[8] *H. Liebmann:* Eine neue Eigenschaft der Kugel. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1899), 44—55.

[9] *H. Liebmann:* Über die Verbiegung der geschlossenen Flächen positiver Krümmung. Math. Ann. *53* (1900), 81—112.

[10] *Z. Nádeník:* Zur Geometrie im Grossen der Kugelkongruenzen. Czech. Math. J. *18* (*93*) (1968), 700—717.

Anschrift des Verfassers: Praha 2, Trojanova 13 (České vysoké učení technické).