Časopis pro pěstování matematiky

Oldřich Dvořák

Über schlichte Funktionen. II.

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 94 (1969), No. 2, 146--167

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117662

ÜBER SCHLICHTE FUNKTIONEN II

OLDŘICH DVOŘÁK, Praha

(Eingegangen am 1. 12. 1967)

Diese Abhandlung enthält eine Fortsetzung[1]) der Untersuchungen über das Koeffizientenproblem einer im Einheitskreis $|z| < 1$ regulären, schlichten, normierten Funktion

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots, \quad f(0) = 0\,, \quad f'(0) = 1\,, \quad |z| < 1\,.$$

Für die Bedingung $\Re\{\sqrt{[f(z)/z]}\} > \frac{1}{2}$, aus der die Bieberbachsche Vermutung $|a_n| \leqq n$, $(n = 2, 3, \ldots)$ folgt, finde ich eine schärfere Abschätzung wie auch ihre neue geometrische Interpretation. Entsprechende Resultate beweise ich für eine im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre, ungerade, schlichte, normierte Funktion

$$g(z) = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \ldots, \quad g(0) = 0\,, \quad g'(0) = 1\,, \quad |z| < 1\,.$$

An Stelle von $\Re\{\sqrt{[f(z)/z]}\} > \frac{1}{2}$ tritt dann die Bedingung $\Re\{g(z)/z\} > \frac{1}{2}$, aus der die Abschätzung $|c_{2n-1}| \leqq 1$, $(n = 2, 3, \ldots)$ folgt.

Am Ende beweise ich einige Teilergebnisse für eine im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre, schlichte Funktion

$$f(z) = d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + \ldots, \quad d_0 \neq 0\,, \quad f'(0) = d_1 \neq 0\,, \quad |z| < 1\,.$$

In der ersten Abhandlung [5] habe ich bewiesen, dass für eine im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre, schlichte, normierte Funktion

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots, \quad f(0) = 0\,, \quad f'(0) = 1\,, \quad |z| < 1\,,$$

die dort die Bedingung

$$\Re\left\{\sqrt{\frac{f(z)}{z}}\right\} > \frac{1}{2} \tag{1}$$

[1]) Der gefällige Leser braucht überhaupt nicht die erste Abhandlung zu lesen, soweit ihm nur der Bieberbachsche Flächensatz und der Verzerrungssatz bekannt ist.

erfüllt, die scharfe Abschätzung $|a_n| \leqq n$, $(n = 2, 3, \ldots)$ gilt, und dass *jede* schlichte Funktion $f(z)$ die Bedingung (1) im Innern des Kreises vom Radius $0{,}83 < r < 0{,}84$ erfüllt. Diese Abschätzung habe ich auf $0{,}90 < r < 0{,}91$ verschärft.

Zum Beweis der scharfen Abschätzung $|a_n| \leqq n$, $(n = 2, 3, \ldots)$, im Zusammenhang mit der Bedingung (1), habe ich einen Satz von CARATHEODORY aus der Theorie der beschränkten Funktionen benutzt, aus dem die Beschränktheit der Koeffizienten einer im Einheitskreis $|z| < 1$ regulären und dort nur Werte mit positivem Realteil annehmenden Funktion hervorgeht.

Zur numerischen Abschätzung von r habe ich die Ungleichung

$$|B_2(z)| < 1$$

benutzt (erste Abschätzung $0{,}83 < r < 0{,}84$, [5], Satz 7), die mit der Bedingung (1) äquivalent ist (auf Grund der geometrischen Interpretation bewiesen), und weiter die Ungleichung

$$|B_4(z)| < 1/\sqrt{2}\,,$$

(zweite Abschätzung $0{,}90 < r < 0{,}91$, [5], Satz 8), die ich durch Vertiefung der geometrischen Interpretation der Bedingung (1) und durch Benutzung eines speziellen Grenzüberganges bewiesen habe; die regulären Funktionen $B_2(z)$ und $B_4(z)$ sind dabei durch die Relation

$$\frac{z}{f(z)} = [1 + b_{\nu-1}^{(\nu)} z + \ldots + b_{\nu n-1}^{(\nu)} z^n + \ldots]^\nu = [1 + B_\nu(z)]^\nu\,, \quad (\nu = 2, 3, \ldots)\,,$$

definiert, wo $f(z)$ eine im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre, schlichte, normierte Funktion ist. Die Funktion $B_\nu(z)$ ist im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär, bechränkt, und für ihre Koeffizienten gilt nach dem Bieberbachschen Flächensatz die Ungleichung $\sum_{n=1}^{\infty} (\nu n - 1) |b_{\nu n-1}^{(\nu)}|^2 \leqq 1$. Durch eine konsequente Erweiterung der benutzten Methode ist es mir gelungen eine scharfe Ungleichung für den absoluten Betrag von $B_4(z)$ zu beweisen und zwar

$$|B_4(z)| < 1\,,$$

aus der die Abschätzung $0{,}98 < r < 0{,}99$ hervorgeht.

Weiter zeige ich, dass die Bedingung (1) mit der Ungleichung

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| + \Re\left\{\frac{f(z)}{z}\right\} > \frac{1}{2}$$

äquivalent ist; diese Ungleichung stellt die Abbildung des Einheitskreises $|z| < 1$ durch die Funktion $f(z)/z$ auf das Äussere der Parabel $v^2 = -u + 1/4$ dar.

Durch eine ähnliche Methode, wie bei der im Einheitskreis $|z| < 1$ regulären, schlichten, normierten Funktion $f(z)$, habe ich entsprechende Resultate für eine im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre, ungerade, schlichte, normierte Funktion

$$g(z) = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \ldots, \quad g(0) = 0, \quad g'(0) = 1, \quad |z| < 1,$$

bewiesen. Wenn die Funktion $g(z)$ im Einheitskreis $|z| < 1$ die Bedingung

$$\Re\left\{\frac{g(z)}{z}\right\} > \frac{1}{2} \tag{2}$$

erfüllt, so gilt die Abschätzung $|c_{2n-1}| \leqq 1$, $(n = 2, 3, \ldots)$, und jede Funktion $g(z)$ erfüllt die Bedingung (2) im Innern des Kreises vom Radius $0{,}90 < r < 0{,}91$ – verschärft auf $0{,}95 < r < 0{,}96$. Nun beweise ich eine weitere Verschärfung: $0{,}989 < < r < 0{,}990$.

Am Ende erbringe ich den Beweis, dass wir für die Koeffizienten einer im Einheitskreis $|z| < 1$ regulären, schlichten Funktion

$$f(z) = 1 + d_1 z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + \ldots, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = d_1 \neq 0, \quad |z| < 1,$$

die den Einheitskreis $|z| < 1$ auf die Halbebene $\Re\{f(z)\} > \frac{1}{2}$, oder auf die Halbebene $\Re\{f(z)\} > 0$, oder auf das Äussere der Parabel $v^2 = -u + \frac{1}{4}$, oder auf die volle, längs der negativen reellen Achse aufgeschnittene, w – Ebene abbildet, scharfe Abschätzungen beweisen können.

I

So wie in der ersten Abhandlung beweise ich zuerst, dass aus der Gültigkeit der Bedingung (1) für eine im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre, schlichte, normierte Funktion $f(z)$ die scharfe Abschätzung $|a_n| \leqq n$, $(n = 2, 3, \ldots)$ folgt. Ich benutze dabei aber neue, kürzere und einfachere Sätze 1 und 2.

Satz 1. *Ist*

$$f(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

eine im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre Funktion, die dort nur Werte mit positivem Realteil

$$\Re\{f(z)\} > 0 \tag{3}$$

annimmt, so ist

$$|c_n| \leqq 2, \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Die Schranke ist genau; es gibt Funktionen, für die sie erreicht wird.

Beweis. Die Bedingung (3) ist, wie man leicht aus einer Zeichnung erkennt, mit der Ungleichung

$$|f(z) - 1| < |f(z) + 1| \tag{4}$$

äquivalent. Es folgt dann aus (4), dass die Funktion

$$g(z) = \frac{f(z) - 1}{f(z) + 1} = \frac{c_1}{2} z + \dots$$

im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär und beschränkt ist, $|g(z)| < 1$, und dass $g(0) = 0$ ist. Die Funktion $g(z)$ erfüllt also die Bedingungen des Schwarzschen Lemmas; es gilt für sie daher bekanntlich $|g(z)| \leqq |z|$ und $|g'(0)| \leqq 1$.

So ergibt sich

$$|g'(0)| = \left|\frac{c_1}{2}\right| \leqq 1, \quad \text{d. i.} \quad |c_1| \leqq 2 .$$

Es seien nun ω_k, $k = 1, 2, \dots, n$ alle n-Einheitswurzeln und man betrachte die Funktion

$$\psi(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\omega_k z^{1/n}),$$

$$\psi(z) = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} 1 + c_1\omega_1 z^{1/n} + c_2(\omega_1 z^{1/n})^2 + \dots + c_n(\omega_1 z^{1/n})^n + \dots = \psi_1(z) \\ 1 + c_1\omega_2 z^{1/n} + c_2(\omega_2 z^{1/n})^2 + \dots + c_n(\omega_2 z^{1/n})^n + \dots = \psi_2(z) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ 1 + c_1\omega_n z^{1/n} + c_2(\omega_n z^{1/n})^2 + \dots + c_n(\omega_n z^{1/n})^n + \dots = \psi_n(z) \end{bmatrix},$$

$$\psi(z) = \frac{1}{n}\left[n + c_1 z^{1/n} \sum_{k=1}^{n} \omega_k + c_2 z^{2/n} \sum_{k=1}^{n} \omega_k^2 + \dots + c_n z^{n/n} \sum_{k=1}^{n} \omega_k^n + \dots = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(z)\right].$$

Da aber bekanntlich

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k^l = 0, \quad l = 1, 2, \dots, n-1, \quad \sum_{k=1}^{n} \omega_k^n = n$$

ist, erhält man endlich

$$\psi(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\omega_k z^{1/n}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \psi_k(z) = 1 + c_n z + \dots$$

Alle Funktionen $\psi_k(z)$ sind im Einheitskreis $|z| < 1$ offenbar regulär und es gilt dort für sie, dass $\mathfrak{R}\{\psi_k(z)\} > 0$ ist. Dasselbe gilt für die Funktion $\psi(z)$, die also die obige Voraussetzung erfüllt, so dass

$$|c_n| \leqq 2$$

ist, und diese Abschätzung gilt für jedes $n = 1, 2, \dots$, w. z. b. w.

Die Schranke wird z. B. für die Funktion

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2z + 2z^2 + \ldots + 2z^n + \ldots, \quad |z| < 1,$$

$$\Re\{f(z)\} = \Re\left\{\frac{1+z}{1-z}\right\} > 0, \quad |c_n| = 2, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

erreicht. (Zum Beweis vgl. PRIVALOV [2].)

Satz 2. *Eine im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre und schlichte Funktion*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

erfülle dort die Bedingung

$$\Re\left\{\sqrt{\frac{f(z)}{z}}\right\} > \frac{1}{2}, \tag{1}$$

dann ist

$$|a_n| \leqq n, \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Die Schranke ist genau; es gibt Funktionen, für die sie erreicht wird.

Beweis. Ist die Funktion $f(z)$ im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär und schlicht, so ist die Funktion $f(z)/z$ dort regulär und von Null verschieden. Dasselbe gilt für die Funktion $\sqrt{[f(z)/z]}$, die man in die folgende Potenzreihe entwickeln kann

$$\sqrt{\frac{f(z)}{z}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} a_2 z + \frac{1}{8}(4a_3 - a_2^2) z^2 + \ldots$$

Für die Abschätzung der Koeffizienten a_n benutzt man die bekannte Majorantenmethode. Wenn für die Koeffizienten der Potenzreihen

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots = A(z),$$

$$p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z^n + \ldots = P(z),$$

die Ungleichungen

$$0 \leqq |a_n| \leqq p_n, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

gelten, so drückt man dies symbolisch folgendermassen aus;

$$A(z) \ll P(z)$$

oder in Worten „$P(z)$ ist Majorante von $A(z)$“.

Es gilt offenbar auch die Relation

$$[A(z)]^2 \ll [P(z)]^2 .$$

Aus der Gültigkeit der Bedingung (1)

$$\Re\left\{\sqrt{\frac{f(z)}{z}} - \frac{1}{2}\right\} > 0 \quad \text{oder} \quad \Re 2\left\{\sqrt{\frac{f(z)}{z}} - \frac{1}{2}\right\} > 0,$$

erhält man unter Benutzung des Satzes 1

$$2\left\{\sqrt{\frac{f(z)}{z}} - \frac{1}{2}\right\} = 1 + a_2 z + \frac{1}{4}(4a_3 - a_2^2) + \ldots,$$

$$2\left\{\sqrt{\frac{f(z)}{z}} - \frac{1}{2}\right\} \ll \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2z + 2z^2 + \ldots + 2z^n + \ldots,$$

$$\sqrt{\frac{f(z)}{z}} \ll \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1+z}{1-z} = \frac{1}{1-z}$$

und daraus

$$f(z) \ll \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots + nz^n + \ldots,$$

$$|a_n| \leqq n, \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Die Schranke wird z. B. für die bekannte schlichte Funktion

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots + nz^n + \ldots, \quad |z| < 1,$$

$$\Re\left\{\sqrt{\left[\frac{z}{(1-z)^2}\frac{1}{z}\right]}\right\} = \Re\left\{\frac{1}{1-z}\right\} > \frac{1}{2}, \quad |a_n| = n, \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

erreicht, die mit der Majorantenfunktion formal identisch ist.

(Zum Beweis vgl. PÓLYA-SZEGÖ [3].)

II

Jetzt beweise ich die verschärfte Abschätzung für die Gültigkeit der Bedingung (1). Da ich aber eine scharfe Ungleichung für den absoluten Betrag von $B_4(z)$ angebe, und daher die Untersuchungen in dieser Richtung als abgeschlossen betrachte, deute ich den ganzen Gedankengang noch einmal vom Anfang in voller Breite an.

Satz 3. *Jede im Einheitskreis* $|z| < 1$ *reguläre und schlichte Funktion*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$$

erfüllt die Bedingung

$$\Re\left\{\sqrt{\frac{f(z)}{z}}\right\} > \frac{1}{2} \tag{1}$$

im Innern des Kreises vom Radius

$$0{,}97 < r < 0{,}98\,,$$

r ist die zwischen 0 *und* 1 *liegende Wurzel der Gleichung*

$$\log\frac{1}{1 - r^2} = 3, \quad \text{d. i.} \quad r = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{e^3}\right)}.$$

Beweis. Die Bedingung (1) ist, wie man leicht aus einer Zeichnung erkennt, mit der Ungleichung

$$\left|\sqrt{\frac{f(z)}{z}} - 1\right| < \left|\sqrt{\frac{f(z)}{z}}\right| \tag{5}$$

äquivalent. Ist die Funktion $f(z)$ im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär und schlicht, so ist die Funktion $f(z)/z$ dort regulär und von Null verschieden. Dasselbe gilt von der Funktion $\sqrt{[f(z)/z]}$; man kann also durch diese Funktion teilen und erhält so aus der Ungleichung (5) die Beziehung

$$\left|1 - \sqrt{\frac{z}{f(z)}}\right| < 1\,. \tag{6}$$

In der ersten Abhandlung ([5], Satz 6) haben wir bewiesen, dass für jede im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre, schlichte Funktion $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, die Relation

$$\frac{z}{f(z)} = [1 + b^{(\nu)}_{\nu-1} z + \ldots + b^{(\nu)}_{\nu n-1} z^n + \ldots]^\nu = [1 + B_\nu(z)]^\nu\,, \quad (\nu = 2, 3, \ldots), \tag{7}$$

gilt. Die Funktion $z/f(z)$ ist im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär und beschränkt

$$0 < \sqrt[\nu]{(1 - |z|)^2} \leqq \left|\sqrt[\nu]{\frac{z}{f(z)}}\right| = |1 + B_\nu(z)| \leqq \sqrt[\nu]{(1 + |z|)^2} < \sqrt[\nu]{4}\,, \quad |z| < 1\,; \tag{8}$$

für die Koeffizienten der im Einheitskreis $|z| < 1$ regulären und beschränkten Funktion

$$B_\nu(z) = b^{(\nu)}_{\nu-1} z + b^{(\nu)}_{2\nu-1} z^2 + \ldots + b^{(\nu)}_{\nu n-1} z^n + \ldots\,, \quad |z| < 1\,,$$

gilt die Ungleichung

$$(9) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(\nu n - 1)\left|b_{\nu n-1}^{(\nu)}\right|^2 \leqq 1\,, \quad (\nu = 2, 3, \ldots)\,,$$

und für ihren absoluten Betrag die Abschätzung

$$(10) \quad \left|B_\nu(z)\right| \leqq \left|b_{\nu-1}^{(\nu)}\right| r + \ldots + \left|b_{\nu n-1}^{(\nu)}\right| r^n + \ldots\,, \quad |z| = r < 1\,,$$

$$\leqq \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\nu n - 1)\left|b_{\nu n-1}^{(\nu)}\right|^2\right)}\sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n}}{\nu n - 1}\right)} \leqq$$

$$\leqq \sqrt{1}\,\sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n}}{\nu n - 1}\right)} \leqq \sqrt{\left(\frac{1}{\nu - 1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n}}{n}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{\nu - 1}\log\frac{1}{1 - r^2}\right)}.$$

Beim Beweis von (7), (8), (9) haben wir den Bieberbachschen Flächensatz und den Verzerrungssatz benutzt, und die gut bekannte Tatsache, dass die Funktion

$$(11) \quad \varphi_\nu(z) = \sqrt[\nu]{[f(z^\nu)]} = z + a_{\nu+1}^{(\nu)}z^{\nu+1} + \ldots + a_{\nu n+1}^{(\nu)}z^{\nu n+1} + \ldots\,, \quad (\nu = 2, 3, \ldots)\,,$$

im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär und schlicht ist, wenn die Funktion $f(z)$ dort regulär und schlicht ist; in (11) ist dabei der bestimmte Zweig der ν-Wurzel zu nehmen (vgl. dazu [5], Satz 3a).

Es folgt dann aus (7) für $\nu = 2$

$$\frac{z}{f(z)} = [1 + B_2(z)]^2 \quad \text{oder} \quad \sqrt{\frac{z}{f(z)}} = 1 + B_2(z)\,,$$

so dass sich die Ungleichung (6) auf

$$(12) \qquad \left|B_2(z)\right| < 1$$

reduziert. Für den absoluten Betrag von $B_2(z)$ haben wir aber eine bessere Abschätzung, als uns die Ungleichung (10) gibt, denn es gilt bekanntlich

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n-1}}{2n - 1} = r + \frac{r^3}{3} + \ldots + \frac{r^{2n-1}}{2n - 1} + \ldots = \frac{1}{2}\log\frac{1 + r}{1 - r}\,, \quad r < 1\,.$$

Man hat also

$$\left|B_2(z)\right| \leqq \left|b_1^{(2)}\right| r + \left|b_3^{(2)}\right| r^2 + \ldots + \left|b_{2n-1}^{(2)}\right| r^n + \ldots\,, \quad |z| = r < 1\,,$$

$$\leqq \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty}(2n - 1)\left|b_{2n-1}^{(2)}\right|^2\right)}\sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n}}{2n - 1}\right)} \leqq \sqrt{1}\,\sqrt{\left(\frac{r}{2}\log\frac{1 + r}{1 - r}\right)} < 1\,,$$

$$r\log\frac{1 + r}{1 - r} < 2\,, \quad 0{,}83 < r < 0{,}84\,,$$

(vgl. dazu [5], (16)).

Es könnte im ersten Augenblick vorkommen, dass eine weitere Verschärfung nicht mehr möglich ist. Setzt man nämlich für die Koeffizienten der Funktion $B_2(z)$ den Wert

$$|b_{2n-1}^{(2)}| = \frac{1}{\sqrt{[n(n+1)(2n-1)]}}, \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

ein, so erhält man für die Bedingung (9)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)|b_{2n-1}^{(2)}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\frac{1}{n(n+1)(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1,$$

und für die Abschätzung von $|B_2(z)|$

$$|B_2(z)| \leqq \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)|b_{2n-1}^{(2)}|^2\right)}\sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n}}{2n-1}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\right)}\sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{2n}}{2n-1}\right)} = \sqrt{\left(\frac{r}{2}\log\frac{1+r}{1-r}\right)},$$

das ist aber die alte Abschätzung. Das Ergebnis ist nur scheinbar; es ist nämlich im vorhinein nicht klar, ob die Funktion $f(z)$, die mit der Funktion $B_2(z)$ (mit den vorgeschriebenen Koeffizienten $b_{2n-1}^{(2)}$), durch die Gleichung $\sqrt{[z/f(z)]} = 1 + B_2(z)$ verbunden ist, im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär und schlicht ist. Durch eine tiefere Analyse der Ungleichung (12) zeigt sich eine weitere Verschärfung der ersten Abschätzung.

Die im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre, beschränkte Funktion

$$B_2(z) = b_1^{(2)}z + b_3^{(2)}z^2 + \ldots + b_{2n-1}^{(2)}z^n + \ldots, \quad |z| < 1,$$

bildet den Einheitskreis $|z| < 1$ auf einen, allgemein mehrblättrigen, Bereich ab, dessen Fläche durch die folgende Integralformel gegeben ist:

$$F = \iint_{|z|^2 \leqq r} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_{|z|^2 \leqq r}\left|\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^r\int_0^{2\pi}\left|\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right|\varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta, \quad z = \varrho e^{i\vartheta}, \quad \varrho < 1, \quad r < 1, \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi.$$

Unter Benutzung der CAUCHY-RIEMANNSCHEN Differentialgleichungen erhält man weiter

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |B_2'(z)|^2,$$

$$F = \int_0^r\int_0^{2\pi}|B_2'(z)|^2\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta = \int_0^r\int_0^{2\pi}B_2'(z)\,\overline{B_2'(z)}\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_0^r\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}nb_{2n-1}^{(2)}\varrho^{n-1}e^{i(n-1)\vartheta}\sum_{n=1}^{\infty}n\overline{b_{2n-1}^{(2)}}\varrho^{n-1}e^{-i(n-1)\vartheta}\varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta.$$

Betrachtet man, dass alle Glieder mit der ganzzahligen Potenz von $e^{in\vartheta}$ bei der Integration herausfallen, so findet man

$$F = 2\pi \int_0^r \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |b_{2n-1}^{(2)}|^2 \varrho^{2n-1} \, d\varrho = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |b_{2n-1}^{(2)}|^2 r^{2n}$$

und daraus, wenn $r \to 1$,

$$F = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |b_{2n-1}^{(2)}|^2 .$$

Für die Koeffizienten der Funktion $B_2(z)$ gilt aber nach (9) die Ungleichung $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)|b_{2n-1}^{(2)}|^2 \leqq 1$, so dass man die folgende Abschätzung erhält

$$F = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n \, |b_{2n-1}^{(2)}|^2 \leqq \pi \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \, |b_{2n-1}^{(2)}|^2 \leqq \pi .$$

Die Fläche F kann also nicht grösser sein, als die Fläche des Einheitskreises $|z| < 1$. Die Ungleichung (12) aber verlangt mehr: Für die Fläche F muss nicht nur die Ungleichung $F \leqq \pi$ gelten, sondern dieselbe muss im Innern des Einheitskreises $|B_2(z)| < 1$ liegen, oder, im Falle der vollen Überdeckung, mit ihm identisch sein. Es liegt nun nahe zu vermuten, dass die Relation (7) für $\nu > 2$ vielleicht zu einer besseren Abschätzung von r führen könnte.

Die Ungleichung (6)

$$\left|1 - \sqrt{\frac{z}{f(z)}}\right| < 1 \quad \text{oder} \quad \left|\sqrt{\frac{z}{f(z)}} - 1\right| < 1$$

kann man in dieser Form schreiben:

$$\left|\sqrt[4]{\frac{z}{f(z)}} - 1\right| \left|\sqrt[4]{\frac{z}{f(z)}} + 1\right| < 1 . \tag{13}$$

Diese Ungleichung ist immer erfüllt, wenn die Funktion

$$w_4(z) = \sqrt[4]{\frac{z}{f(z)}} = 1 + B_4(z)$$

den Einheitskreis $|z| < 1$ auf ein in der rechten Hälfte der Lemniskate $\varrho^2 = 2 \cos 2\varphi$, $0 \leqq \varphi \leqq \pi/4$ gelegenes Gebiet abbildet (vgl. dazu (7)). Die Ausdrücke

$$\left|\sqrt[4]{\frac{z}{f(z)}} - 1\right| \quad \text{und} \quad \left|\sqrt[4]{\frac{z}{f(z)}} + 1\right|$$

stellen die Entfernungen des Punktes $w_4(z)$ von den Punkten $(+1{,}0)$ bzw. $(-1{,}0)$ dar und für den absoluten Betrag der Funktion $w_4(z)$ erhält man aus (8)

$$0 < \sqrt{(1 - |z|)} \leqq \left|\sqrt[4]{\frac{z}{f(z)}}\right| = |w_4(z)| = |1 + B_4(z)| \leqq \sqrt{(1 + |z|)} < \sqrt{2}\,, \quad |z| < 1\,,$$

also genau den maximalen Wert von $|w_4(z)|$ für die Hauptachse der Lemniskate $\varrho^2 = 2\cos 2\varphi$, Max $|w_4(z)| \leqq$ Max $\varrho = \sqrt{2}$. (Ich bitte den gefälligen Leser sich beim Beweis des Satzes 3 eine Zeichnung zu machen).

Die Ungleichung (13) kann man für die Abschätzung von r benutzen, aber man erhält nichts neues. Es folgt nämlich aus der Relation (7)

$$[1 + B_2(z)]^2 = [1 + B_4(z)]^4 \quad \text{oder} \quad B_2(z) = 2B_4(z) + B_4^2(z)\,,$$

so dass sich aus (13) die Ungleichung

$$|1 + B_4(z) - 1|\,|1 + B_4(z) + 1| = |2B_4(z) + B_4^2(z)| = |B_2(z)| < 1$$

ergibt, und das ist die Ungleichung (12).

Um eine schärfere Abschätzung zu gewinnen, drückt man die Ungleichung (13) *im Reellen in dieser Form aus*

$$\begin{aligned} (14) \qquad & \sqrt{[1^2 + |w_4(z)|^2 - 2\,.\,1\,.\,|w_4(z)|\cos\varphi_z]}\,. \\ & .\sqrt{[1^2 + |w_4(z)|^2 - 2\,.\,1\,.\,|w_4(z)|\cos(\pi - \varphi_z)]} < 1\,, \\ & 0 < |w_4(z)| < \sqrt{2}\,, \quad 0 \leqq \varphi_z < \pi/4\,, \end{aligned}$$

oder

$$(15) \qquad [1 + |w_4(z)|^2 - 2|w_4(z)|\cos\varphi_z]\,[1 + |w_4(z)|^2 + 2|w_4(z)|\cos\varphi_z] < 1\,,$$

oder

$$(16) \qquad (1 + |w_4(z)|^2)^2 - 4|w_4(z)|^2\cos^2\varphi_z < 1\,.$$

Für die Entfernung des Punktes $w_4(z)$ vom Punkt $(+1{,}0)$ gilt aber die Relation

$$(17) \qquad \left|\sqrt[4]{\frac{z}{f(z)}} - 1\right| = |B_4(z)| = \sqrt{[1 + |w_4(z)|^2 - 2|w_4(z)|\cos\varphi_z]}\,,$$

so dass die Ungleichung (15) die folgende Form annimmt:

$$(18) \qquad |B_4(z)|^2\,(1 + |w_4(z)|^2 + 2|w_4(z)|\cos\varphi_z) < 1\,.$$

Die Ungleichung (16) ist für die Abschätzung von r nicht geeignet, denn die Funktion $B_4(z)$ tritt hier explizit nicht auf; sie dient uns nur zur Abschätzung des Verlaufes der Werte von $\cos\varphi_z$. Auch die Ungleichung (18) gibt uns wieder nur die alte Abschätzung

$$\begin{aligned} |B_4(z)|^2\,(1 + |w_4(z)|^2 + 2|w_4(z)|\cos\varphi_z) &= |B_4(z)|^2\,|\sqrt[4]{[z/f(z)]} + 1|^2 = \\ &= |B_4(z)|^2\,|2 + B_4(z)|^2 = |2B_4(z) + B_4^2(z)|^2 = |B_2(z)|^2 < 1\,. \end{aligned}$$

Erst durch die folgende Umformung der Ungleichung (18), *bei der wir die innere Abhängigkeit von* $B_4(z)$ *womöglich weit verfolgen, gelangen wir zu einer schärferen Abschätzung.*

Die Ungleichung (18) *kann man in dieser Form schreiben*:

$$\begin{aligned}(19)\qquad & |B_4(z)|^2 \{k[1 + |w_4(z)|^2 - 2|w_4(z)| \cos \varphi_z] - \\ & - [(k-1)(1 + |w_4(z)|^2) - 2(k+1)|w_4(z)| \cos \varphi_z]\} < 1 ,\end{aligned}$$

wo k eine beliebige, positive, ganze Zahl $k = 1, 2, \ldots$ *ist, und daraus folgt wegen* (17)

$$\begin{aligned}(20)\qquad & |B_4(z)|^2 \{k|B_4(z)|^2 - \\ & - [(k-1)(1 + |w_4(z)|^2) - 2(k+1)|w_4(z)| \cos \varphi_z]\} < 1 .\end{aligned}$$

Die Ungleichung (20) ist identisch mit der Ungleichung (16). Ist aber die Ungleichung (16) für den Wert $\cos \varphi_z = 1/\sqrt{2}$ erfüllt, ist sie umsomehr für alle zugehörige Werte von $\cos \varphi_z$ erfüllt, denn es ist im Intervall $0 \leqq \varphi_z < \pi/4$ immer $1/\sqrt{2} < \cos \varphi_z \leqq 1$. Man kann also in der Ungleichung (20) für $\cos \varphi_z$ den Wert $\cos \varphi_z = 1/\sqrt{2}$ einsetzen und die Ungleichung

$$(21)\quad |B_4(z)|^2 \{k|B_4(z)|^2 - [(k-1)(1 + |w_4(z)|^2) - \sqrt{(2)}(k+1)|w_4(z)|]\} < 1$$

betrachten und diese weiter durch die Ungleichung

$$\begin{aligned}(22)\qquad & |B_4(z)|^2 \{k|B_4(z)|^2 - \\ & - \operatorname{Min} [(k-1)(1 + |w_4(z)|^2) - \sqrt{(2)}(k+1)|w_4(z)|]\} < 1\end{aligned}$$

ersetzen. Die Funktion

$$\psi(|w_4(z)|) = (k-1)(1 + |w_4(z)|^2) - \sqrt{(2)}(k+1)|w_4(z)|$$

nimmt ihr Minimum für den Wert

$$|w_4(z)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{k+1}{k-1}$$

an, wie man sich leicht überzeugen kann. Setzt man jetzt diesen Wert in (22) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} & |B_4(z)|^2 \left\{k|B_4(z)|^2 - \left[(k-1) + (k-1)\frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 - \right.\right. \\ & \qquad \left.\left. - \sqrt{(2)}(k+1)\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{k+1}{k-1}\right]\right\} < 1 , \\ & |B_4(z)|^2 \left\{k|B_4(z)|^2 - \frac{k^2 - 6k + 1}{2(k-1)}\right\} < 1 ,\end{aligned}$$

$$(23)\qquad |B_4(z)|^4 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{5k-1}{k^2-1}\right)|B_4(z)|^2 < \frac{1}{k} .$$

Wenn $k \to \infty$ sieht man leicht ein, dass die Ungleichung (23) sicher erfüllt ist, falls die Ungleichung

$$(24) \qquad |B_4(z)|^4 - \tfrac{1}{2}|B_4(z)|^2 < 0$$

gilt, und diese ist offenbar erfüllt, wenn die Ungleichung

$$(25) \qquad |B_4(z)|^2 < \tfrac{1}{2}$$

gilt. Für den absoluten Betrag von $B_4(z)$ haben wir wieder eine bessere Abschätzung, als uns die Ungleichung (10) gibt, denn es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{4n-1} = \frac{r^2}{3} + \frac{r^4}{7} + \ldots = \frac{\sqrt{r}}{4} \log \frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}} - \frac{\sqrt{r}}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{r}\,, \quad r < 1\,.$$

Man hat also

$$\begin{aligned}
|B_4(z)| &\leqq |b_3^{(4)}|\, r + |b_7^{(4)}|\, r^2 + \ldots + |b_{4n-1}^{(4)}|\, r^n + \ldots, \quad |z| = r < 1\,,\\
&\leqq \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty} (4n-1)\, |b_{4n-1}^{(4)}|^2\right)} \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n}}{4n-1}\right)} \leqq \\
&\leqq \sqrt{1} \sqrt{\left(\frac{\sqrt{r}}{4} \log \frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}} - \frac{\sqrt{r}}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{r}\right)} < \frac{1}{\sqrt{2}}\,,
\end{aligned}$$

$$\sqrt{(r)} \log \frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}} - 2\sqrt{(r)} \operatorname{arctg} \sqrt{r} < 2\,,$$

$$0{,}90 < r < 0{,}91\,,$$

(vgl. dazu [5], (17)).

Durch konsequente Verfolgung und Erweiterung des Grundgedanken gelangt man zur scharfen Ungleichung $|B_4(z)|^2 < 1$, aus der die dritte Verschärfung folgt.

Machen wir nun eine kurze Übersicht.

Die Bedingung (1) ist mit der Ungleichung (6) äquivalent

$$\Re\left\{\sqrt{\frac{f(z)}{z}}\right\} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\sqrt{\frac{z}{f(z)}} - 1\right| < 1\,,$$

und diese ist sicher erfüllt, wenn die Ungleichung (13)

$$\left|\sqrt{\frac{z}{f(z)}} - 1\right| = \left|\sqrt[4]{\frac{z}{f(z)}} - 1\right| \left|\sqrt[4]{\frac{z}{f(z)}} + 1\right| < 1$$

gilt. Die Ungleichung (13) kann man aber durch folgende — miteinander identische — Ungleichungen ersetzen

$$(16) \qquad \begin{gathered} (1 + |w_4(z)|^2)^2 - 4|w_4(z)|^2 \cos^2 \varphi_z < 1\,,\\ 0 < |w_4(z)| < \sqrt{2}\,, \quad 0 \leqq \varphi_z < \pi/4\,, \end{gathered}$$

$$(18) \qquad |B_4(z)|^2 (1 + |w_4(z)|^2 + 2|w_4(z)| \cos \varphi_z) < 1\,,$$

$$(20) \qquad |B_4(z)|^2 \{k|B_4(z)|^2 -$$
$$- [(k-1)(1 + |w_4(z)|^2) - 2(k+1)|w_4(z)| \cos \varphi_z]\} < 1\,, \quad (k = 1, 2, \ldots)\,.$$

Die erste Abschätzung haben wir aus der Ungleichung

$$(12) \qquad |\sqrt{[z/f(z)]} - 1| = |B_2(z)| < 1$$

gewonnen. Zur zweiten Abschätzung haben wir die Ungleichungen (16) und (20) benutzt. Dabei haben wir gesehen, dass die Ungleichung (16) für alle zugehörige Werte von $\cos \varphi_z$ sicher gilt, wenn sie für den Wert $\cos \varphi_z = 1/\sqrt{2}$ erfüllt ist. Wenn man diesen Wert in die Ungleichung (20) einsetzt, und diese durch die Ungleichung (22) ersetzt, erhält man nach dem Grenzübergang $k \to \infty$ die Abschätzung

$$(25) \qquad |B_4(z)|^2 < \tfrac{1}{2}\,.$$

Diese Betrachtungen kann man aber sehr vereinfachen, wenn man noch die identischen Ungleichungen (18) und (20) benutzt. Die Ungleichung (18) gilt offenbar für alle zugehörige Werte von $|w_4(z)|$, wenn sie für den Wert $|w_4(z)| = \sqrt{2}$ erfüllt ist, und dasselbe gilt daher für die mit ihr identische Ungleichung (20). Man kann jetzt beide Betrachtungen, d. h. die Vergleichungen von (16), (20) und von (18), (20), verbinden und behaupten:

Die Bedingung $\Re\{\sqrt{[f(z)/z]}\} > \frac{1}{2}$ ist sicher erfüllt, wenn die Ungleichung

$$(20) \qquad |B_4(z)|^2 \{k|B_4(z)|^2 -$$
$$- [(k-1)(1 + |w_4(z)|^2) - 2(k+1)|w_4(z)| \cos \varphi_z]\} < 1$$

für die Werte $|w_4(z)| = \sqrt{2}$, $\cos \varphi_z = 1/\sqrt{2}$, und für jede, beliebige, positive, ganze Zahl $k = 1, 2, \ldots$ gilt.

Setzt man diese Werte in (20) ein, so findet man

$$(26) \qquad |B_4(z)|^2 \{k|B_4(z)|^2 - [(k-1)(1+2) - 2(k+1)\sqrt{2}\,.\,1/\sqrt{2}]\} < 1\,,$$

$$|B_4(z)|^2 \{k|B_4(z)|^2 - k + 5\} < 1\,,$$

$$|B_4(z)|^2 \left\{|B_4(z)|^2 - 1 + \frac{5}{k}\right\} < \frac{1}{k}\,.$$

Wenn $k \to \infty$, sieht man leicht ein, dass die Ungleichung (26) sicher erfüllt ist, falls die Ungleichung

$$(27) \qquad |B_4(z)|^2 < 1$$

gilt; wegen (10) erhält man dann aus (27)

$$|B_4(z)|^2 \leqq \frac{1}{3}\log\frac{1}{1-r^2} < 1\,, \quad r < \sqrt{(1-1/e^3)}\,, \quad 0{,}97 < r < 0{,}98\,.$$

Benutzt man die schärfere Abschätzung für den absoluten Betrag von $B_4(z)$, so findet man

$$\sqrt{(r)}\log\frac{1+\sqrt{r}}{1-\sqrt{r}} - 2\sqrt{(r)}\operatorname{arctg}\sqrt{r} < 4\,, \quad 0{,}98 < r < 0{,}99\,.$$

Die Ungleichung $|B_4(z)|^2 < 1$ ist scharf; die Zahl 1 kann durch keine grössere Zahl ersetzt werden. Dies kann man leicht vom geometrischen Standpunkt aus einsehen. Der absolute Betrag von $B_4(z)$ stellt die Entfernung des Punktes $w_4(z)$ vom Punkt $(1, 0)$ dar:

$$|w_4(z) - 1| = |\sqrt[4]{[z/f(z)]} - 1| = |B_4(z)|\,,$$

also im Grenzfall die Entfernung der Punkte der rechten Hälfte der Lemniskate $\varrho^2 = 2\cos 2\varphi$, $0 \leqq \varphi \leqq \pi/4$ vom Punkt $(1, 0)$, und diese Entfernung kann niemals grösser als 1 sein.

Bemerkung: Die Bedingung (1) ist äquivalent mit der Ungleichung

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| + \Re\left\{\frac{f(z)}{z}\right\} > \frac{1}{2}\,,$$

die eine Abbildung des Einheitskreises $|z| < 1$ durch die Funktion $f(z)/z$ auf das Äussere der Parabel $v^2 = -u + \frac{1}{4}$ darstellt. Der Beweis ist ganz elementar. Denn setzt man $\sqrt{[f(z)/z]} = u_1 + iv_1$, so erhält man

$$\frac{f(z)}{z} = u_1^2 - v_1^2 + 2iu_1v_1$$

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| = \sqrt{[(u_1^2 - v_1^2)^2 + (2u_1v_1)^2]} = u_1^2 + v_1^2\,, \quad \Re\left\{\frac{f(z)}{z}\right\} = u_1^2 - v_1^2\,.$$

Aus der Bedingung (1)

$$\Re\left\{\sqrt{\frac{f(z)}{z}}\right\} = u_1 > \frac{1}{2}$$

ergibt sich weiter

$$u_1^2 > \tfrac{1}{4}\,,$$

$$u_1^2 + v_1^2 + u_1^2 - v_1^2 = 2u_1^2 > \tfrac{1}{2}\,,$$

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| + \Re\left\{\frac{f(z)}{z}\right\} > \frac{1}{2}\,. \tag{28}$$

Setzt man noch $f(z)/z = u + iv$, so ergibt sich aus (28)

$$\sqrt{[u^2 + v^2]} + u > \tfrac{1}{2}, \quad u^2 + v^2 > \tfrac{1}{4} - u + u^2, \quad v^2 > \tfrac{1}{4} - u .$$

Die Gleichung $v^2 = -u + \frac{1}{4}$ stellt eine Parabelgleichung mit dem Brennpunkt im Nullpunkt, mit dem Scheitel im Punkt $(\frac{1}{4}, 0)$ und mit dem Parameter $p = -\frac{1}{2}$ dar.

III

Nun beweise ich entsprechende Sätze über eine im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre, ungerade, schlichte, normierte Funktion $g(z)$.

Satz 4. *Es sei*

$$g(z) = z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \ldots$$

eine im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre, ungerade, schlichte Funktion;

a) *wenn die Funktion $g(z)$ dort die Bedingung*

$$\Re\left\{\frac{g(z)}{z}\right\} > \frac{1}{2} \tag{2}$$

erfüllt, so ist

$$|c_{2n-1}| \leqq 1, \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

die Schranke ist genau, es gibt Funktionen, für die sie erreicht wird,

b) *jede Funktion $g(z)$ erfüllt die Bedingung (2) im Innern des Kreises vom Radius r*

$$0{,}989 < r < 0{,}990,$$

r ist die zwischen 0 *und* 1 *liegende Wurzel der Gleichung*

$$\log \frac{1}{1 - r^4} = 3, \quad \text{d. i.} \quad r = \sqrt[4]{\left(1 - \frac{1}{e^3}\right)}.$$

Beweis. a) Ist die Funktion $g(z)$ im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär, ungerade und schlicht, so ist die gerade Funktion

$$\frac{g(z)}{z} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + c_3 z^2 + c_5 z^4 + \ldots + c_{2n-1} z^{2n-2} + \ldots$$

dort auch regulär. Aus der Gültigkeit der Bedingung (2)

$$\Re\left\{\frac{g(z)}{z} - \frac{1}{2}\right\} > 0 \quad \text{oder} \quad \Re 2\left\{\frac{g(z)}{z} - \frac{1}{2}\right\} > 0,$$

für die Funktion

$$2\left\{\frac{g(z)}{z} - \frac{1}{2}\right\} = 1 + 2c_3 z^2 + 2c_5 z^4 + \ldots + 2c_{2n-1} z^{2n-2} + \ldots,$$

erhält man unter Benutzung des Satzes (1)

$$|2c_{2n-1}| \leqq 2, \quad \text{d. i.} \quad |c_{2n-1}| \leqq 1, \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Die Schranke wird z. B. für die ungerade, schlichte Funktion

$$g(z) = \frac{z}{1 - z^2} = z + z^3 + z^5 + \ldots, \quad |z| < 1,$$

$$\Re\left\{\frac{g(z)}{z}\right\} = \Re\left\{\frac{1}{1 - z^2}\right\} > \frac{1}{2}, \quad |c_{2n-1}| = 1, \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

erreicht.

b) Alles verläuft ähnlich wie beim Satz 3.

1) Erste Abschätzung: Die Bedingung (2) ist, wie man leicht aus einer Zeichnung erkennt, mit der Ungleichung

$$\left|\frac{g(z)}{z} - 1\right| < \left|\frac{g(z)}{z}\right| \tag{29}$$

äquivalent, und da die Funktion $g(z)/z$ im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär und von Null verschieden ist, folgt daraus

$$\left|1 - \frac{z}{g(z)}\right| < 1. \tag{30}$$

Ist die Funktion $g(z)$ im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär und schlicht, so ist die Funktion

$$\begin{aligned} \sqrt[\nu]{[g(z^\nu)]} &= \sqrt[\nu]{[z^\nu + c_3 z^{3\nu} + \ldots + c_{2n-1}^{(\nu)} z^{\nu(2n-1)} + \ldots]} = \\ &= z + c_{2\nu+1}^{(\nu)} z^{2\nu+1} + \ldots + c_{2\nu n+1}^{(\nu)} z^{2\nu n+1} + \ldots, \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \end{aligned} \tag{31}$$

nach (11), dort auch regulär und schlicht; die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt[\nu]{[g(z^\nu)]}} = \frac{1}{z} + b_{2\nu-1}^{(\nu)} z^{2\nu-1} + \ldots + b_{2\nu n-1}^{(\nu)} z^{2\nu n-1} + \ldots, \quad 0 < |z| < 1, \tag{32}$$

ist dann regulär und schlicht im Gebiet $0 < |z| < 1$ und für ihre Koeffizienten gilt nach dem Bieberbachschen Flächensatz die Ungleichung $\sum_{n=1}^{\infty} (2\nu n - 1) |b_{2\nu n-1}^{(\nu)}|^2 \leqq 1$.

Den Ausdruck (32) kann man in dieser Form schreiben:

$$(33)\qquad \frac{z}{\sqrt[\nu]{[g(z^\nu)]}} = \sqrt[\nu]{\frac{z^\nu}{g(z^\nu)}} = 1 + b_{2\nu-1}^{(\nu)} z^{2\nu} + \ldots + b_{2\nu n-1}^{(\nu)} z^{2\nu n} + \ldots, \quad |z| < 1\,;$$

ersetzt man jetzt z^ν durch z, so erhält man

$$(34)\qquad \frac{z}{g(z)} = [1 + b_{2\nu-1}^{(\nu)} z^2 + \ldots + b_{2\nu n-1}^{(\nu)} z^{2n} + \ldots]^\nu = [1 + B_{2\nu}^{(\nu)}(z^2)]^\nu\,.$$

Es folgt aus (34) für $\nu = 1$

$$\frac{z}{g(z)} = 1 + B_2^{(1)}(z^2)\,,$$

so dass sich die Ungleichung (30) auf

$$(35)\qquad |B_2^{(1)}(z^2)| < 1$$

reduziert. Für den absoluten Betrag von $B_2^{(1)}(z^2)$ haben wir die Abschätzung

$$|B_2^{(1)}(z^2)| \leqq |b_1^{(1)}|\, r^2 + |b_3^{(1)}|\, r^4 + \ldots + |b_{2n-1}^{(1)}|\, r^{2n} + \ldots \leqq$$
$$\leqq \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\,|b_{2n-1}^{(1)}|^2\right)} \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{4n}}{2n-1}\right)} \leqq \sqrt{1}\sqrt{\left(\frac{r^2}{2}\log\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)},$$

vgl. dazu die Abschätzung der Ungleichung (12)).

Man hat also

$$r^2 \log\frac{1+r^2}{1-r^2} < 2\,, \quad 0{,}90 < r < 0{,}91\,.$$

2) Zweite Abschätzung: Die Ungleichung (30)

$$\left|1 - \frac{z}{g(z)}\right| < 1 \quad \text{oder} \quad \left|\frac{z}{g(z)} - 1\right| < 1\,,$$

kann man in dieser Form schreiben:

$$(36)\qquad \left|\sqrt{\frac{z}{g(z)}} - 1\right| \left|\sqrt{\frac{z}{g(z)}} + 1\right| < 1\,.$$

Diese Ungleichung ist immer erfüllt, wenn die Funktion

$$W_2(z) = \sqrt{\frac{z}{g(z)}} = 1 + B_4^{(2)}(z^2)$$

(vgl. dazu (34)) den Einheitskreis $|z| < 1$ auf ein in der rechten Hälfte der Lemniskate $\varrho^2 = 2\cos 2\varphi$, $0 \leqq \varphi \leqq \pi/4$ gelegenes Gebiet abbildet. Die Ausdrücke

$$\left|\sqrt{\frac{z}{g(z)}} - 1\right| \quad \text{und} \quad \left|\sqrt{\frac{z}{g(z)}} + 1\right|$$

stellen die Entfernungen des Punktes $W_2(z)$ von den Punkten $(+1, 0)$ resp. $(-1, 0)$ dar. Für die Funktion $g(z)$ gelten bekanntlich die Abschätzungen

$$(37) \qquad \frac{|z|}{1 + |z|^2} \leqq |g(z)| \leqq \frac{|z|}{1 - |z|^2}, \quad |z| < 1,$$

(vgl. dazu [5], (47)), und da die Funktion $g(z)/z$ im Einheitskreis $|z| < 1$ regulär und von Null verschieden ist, folgt daraus für die Funktion $z/g(z)$

$$(38) \qquad 0 < 1 - |z|^2 \leqq \left|\frac{z}{g(z)}\right| \leqq 1 + |z|^2 < 2, \quad |z| < 1,$$

und für die Funktion $W_2(z)$

$$(39) \quad 0 < \sqrt{(1 - |z|^2)} \leqq \left|\sqrt{\frac{z}{g(z)}}\right| = |W_2(z)| \leqq \sqrt{(1 + |z|^2)} < \sqrt{2}, \quad |z| < 1.$$

Man hat also wieder den maximalen Wert von $|W_2(z)|$ für die Hauptachse der Lemniskate $\varrho^2 = 2\cos 2\varphi$, $\operatorname{Max} |W_2(z)| \leqq \operatorname{Max} \varrho = \sqrt{2}$, wie im Satz 3 für die Funktion $w_4(z)$. Die Ungleichung (30) ist also sicher erfüllt, wenn die Ungleichung

$$|B_4^{(2)}(z^2)|^2 < \tfrac{1}{2}$$

gilt. Für den absoluten Betrag von $B_4^{(2)}(z^2)$ hat man die Abschätzung

$$\begin{aligned} |B_4^{(2)}(z^2)| &\leqq |b_3^{(2)}|\, r^2 + |b_7^{(2)}|\, r^4 + \ldots + |b_{4n-1}^{(2)}|\, r^{2n} + \ldots \leqq \\ &\leqq \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty} (4n - 1)\, |b_{4n-1}^{(2)}|^2\right)} \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{4n}}{4n - 1}\right)} \leqq \\ &\leqq \sqrt{1} \sqrt{\left(\frac{r}{4} \log \frac{1 + r}{1 - r} - \frac{r}{2} \operatorname{arctg} r\right)}, \end{aligned}$$

und so ergibt sich

$$r \log \frac{1 + r}{1 - r} - 2r \operatorname{arctg} r < 2, \quad 0{,}95 < r < 0{,}96,$$

(vgl. dazu [5], (17)).

3) Dritte Abschätzung: Ganz ähnlich wie im Satz 3 kann man behaupten, dass die Bedingung (2) sicher erfüllt ist, wenn die Ungleichung

$$(41) \qquad |B_4^{(2)}(z^2)|^2 < 1$$

gilt und daraus folgt wegen (10)

$$\log\frac{1}{1-r^4} < 3\,, \quad r < \sqrt[4]{\left(1-\frac{1}{e^3}\right)}, \quad 0{,}989 < r < 0{,}990\,.$$

Bemerkung: Die Bedingung (2) kann nicht im ganzen Einheitskreis $|z| < 1$ für jede ungerade, schlichte Funktion $g(z)$ erfüllt werden; FEKETE und SZEGÖ haben nämlich bewiesen [4], dass ungerade, schlichte Funktionen existieren, für die $\operatorname{Max}|c_5| = \frac{1}{2} + e^{-2/3} = 1{,}01 > 1$ ist.

IV

Zuletzt beweise ich einige kleinere Teilergebnisse über eine im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre, schlichte Funktion

$$f(z) = d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + \ldots, \quad f(0) = d_0 \neq 0\,, \quad f'(0) = d_1 \neq 0\,, \quad |z| < 1\,.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit setzen wir $d_0 = 1$. Der allgemeine komplexe Koeffizient d_0 stellt bekanntlich eine Drehung und eine Verkürzung resp. eine Dilatation dar.

Satz 5. *Ist*

$$f(z) = 1 + d_1 z + d_2 z^2 + \ldots$$

eine im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre, schlichte Funktion, die dort nur Werte

a) *in der Halbebene $\Re\{f(z)\} > \frac{1}{2}$, oder*

b) *in der Halbebene $\Re\{f(z)\} > 0$, oder*

c) *im Äusseren der Parabel $v^2 = -u + \frac{1}{4}$, oder*

d) *in der vollen, längs der negativen reellen Achse aufgeschnittenen w-Ebene annimmt, so ist*

$$\left.\begin{aligned} a)\ |d_n| &\leqq 1, \\ b)\ |d_n| &\leqq 2, \\ c)\ |d_n| &\leqq n+1, \\ d)\ |d_n| &\leqq 4n, \end{aligned}\right\} (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

Alle Schranken sind genau; es gibt Funktionen, für die sie erreicht werden.

Beweis. a) Man betrachte die Funktion $f(z)$ in der Form

$$2\{f(z) - \tfrac{1}{2}\} = 1 + 2d_1 z + 2d_2 z^2 + \ldots$$

Aus der Gültigkeit der Bedingung a)

$$\Re\{f(z) - \tfrac{1}{2}\} > 0 \quad \text{oder} \quad \Re 2\{f(z) - \tfrac{1}{2}\} > 0$$

erhält man unter Benutzung der Sätze 1 und 2

$$2\{f(z) - \tfrac{1}{2}\} \ll \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2z^2 + 2z^2 + \ldots + 2z^n + \ldots,$$

$$f(z) \ll \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1+z}{1-z} = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots,$$

$$|d_n| \leqq 1\,, \quad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

b) Satz 1.

c) Es sei

$$\varphi(z) = 1 + d_1^{(1)}z + d_2^{(1)}z^2 + \ldots$$

eine im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre, schlichte Funktion, die dort nur Werte in der Halbebene $\Re\{\varphi(z)\} > \frac{1}{2}$ der w_1 – Ebene annimmt; dann ist die Funktion

$$[\varphi(z)]^2 = f(z) = 1 + d_1 z + d_2 z^2 + \ldots$$

im Einheitskreis $|z| < 1$ offenbar auch regulär, schlicht und bildet den Einheitskreis $|z| < 1$ auf das Äussere der Parabel $v^2 = -u + \frac{1}{4}$ ab; die Gerade $u_1 = \frac{1}{2}$ der w_1 – – Ebene geht dabei in die Parabel $v^2 = -u + \frac{1}{4}$ der w – Ebene über.

$$f(z) = [\varphi(z)]^2 = [u_1 + iv_1]^2 = u + iv\,, \quad u_1^2 - v_1^2 = u\,, \quad 2u_1v_1 = v\,,$$

$$u_1 = \tfrac{1}{2}\,, \quad v_1 = v\,, \quad \tfrac{1}{4} - v^2 = u\,, \quad \text{d. i.} \quad v^2 = -u + \tfrac{1}{4}\,.$$

Für die Funktion $\varphi(z)$ erhält man wegen (a)

$$\varphi(z) \ll \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots$$

und daraus unter Benutzung des Satzes 2

$$[\varphi(z)]^2 = f(z) \ll \frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^3 + \ldots + (n+1)\,z^n + \ldots,$$

$$|d_n| \leqq n + 1\,, \quad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

d) Es sei

$$\psi(z) = 1 + d_1^{(2)}z + d_2^{(2)}z^2 + \ldots$$

eine im Einheitskreis $|z| < 1$ reguläre, schlichte Funktion, die dort nur Werte in der Halbebene $\Re\{\psi(z)\} > 0$ der w_2–Ebene annimmt; dann ist die Funktion

$$[\psi(z)]^2 = f(z) = 1 + d_1 z + d_2 z^2 + \ldots$$

im Einheitskreis $|z| < 1$ offenbar auch regulär, schlicht und bildet den Einheitskreis

$|z| < 1$ auf die volle, längs der negativen reellen Achse aufgeschnittene, w–Ebene ab. Die imaginäre Achse der w_2–Ebene geht dabei in die negative reelle Achse der w–Ebene über.

Unter Benutzung der Sätze 1 und 2 erhält man wieder

$$\psi(z) \ll \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2z + 2z^2 + \ldots + 2z^n + \ldots,$$

$$[\psi(z)]^2 = f(z) \ll \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 = 1 + 4z + 8z^2 + \ldots + 4nz^n + \ldots,$$

$$|d_n| \leqq 4n\,, \quad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

Die Schranken werden z. B. für die Funktionen

a) $f(z) = \dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots,$

b) Satz 1,

c) $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + \ldots + (n+1)\, z^n + \ldots,$

d) $f(z) = \left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^2 = 1 + 4z + 8z^2 + \ldots + 4nz^n + \ldots$

erreicht, die mit den Majorantenfunktionen formal identisch sind. Man überzeugt sich leicht, dass diese Funktionen in Einheitskreis $|z| < 1$ regulär und schlicht sind, und dass dort die Bedingungen unter a), b), c), d), erfüllt sind.

Literaturverzeichnis

[1] *Bieberbach:* Lehrbuch der Funktionentheorie II., 1931, S. 71–83.

[2] *Privalov:* Analytische Funktionen, 1955, (tschechische Übersetzung), S. 475–500.

[3] *Pólya-Szegö:* Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, I. Band, 1925, I. Abschn., Nr. 61, 62, 63.

[4] *Fekete-Szegö:* Journal London Math. Soc. *8*, 1933, S. 85–89.

[5] *Dvořák:* Časopis, *92*, 1967, S. 162–192.

Anschrift des Verfassers: Praha 1, Nerudova 32.