Václav Havel

Über angeordnete Ternärgruppoide

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 94 (1969), No. 1, 15--20

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117645`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 94 (1969), Praha

ÜBER ANGEORDNETE TERNÄRGRUPPOIDE

VÁCLAV HAVEL, Brno

(Received Juny 9, 1967)

Im Jahre 1958 zeigte SYBILLA PRIESS-CRAMPE, wie sich die Anordnung von affinen, bzw. projektiven Ebenen in der Sprache der entsprechenden Ternärkörper ausdrückt (siehe dazu [1], bzw. [7], Kap. 7). In der vorliegenden Note werden wir uns mit einer ählichen Frage für „Parallelstrukturen" (welche eine Verallgemeinerung der affinen Ebenen vorstellen) befassen. Die Anordnung von diesen Parallelstrukturen überführt sich in die Anordnung von entsprechenden „Ternärgruppoiden". Wir zeigen, dass eine Reihe der Anordnungseigenschaften von Ebenen und Ternärkörpern ihre Gültigkeit auch für Parallelstrukturen und Ternärgruppoide behält.

Definition 1. Ein *Ternärgruppoid* ist ein Paar (S, τ), wo S eine wenigstens zweielementige Menge ist und $\tau : S \times S \times S \to S$ eine Abbildung ist, wobei folgende Bedingungen gelten sollen:

(1) es existiert ein ausgezeichnetes Element $0 \in S$ mit $\tau(a, 0, b) = \tau(0, a, b) = b \quad \forall a, b \in S$,

(2) es existiert ein ausgezeichnetes Element $1 \in S$ mit $\tau(a, 1, 0) = a \quad \forall a \in S$,

(3) zu jedem $(u, v, y) \in (S \setminus \{0\}) \times S \times S$ gibt es genau ein $x \in S$ mit $\tau(x, u, v) = y$,

(4) zu jedem $(u, x, y) \in S \times S \times S$ gibt es genau ein $v \in S$ mit $\tau(x, u, v) = y$.

Weiter definiert man binäre Operationen $\underset{\tau}{+}$ und $\underset{\tau}{\cdot}$ auf S mittels $\tau(a, 1, b) =: a \underset{\tau}{+} b$ und $\tau(a, b, 0) =: a \underset{\tau}{\cdot} b \quad \forall a, b \in S$.

Behauptung 1. *Es sei (S, τ) ein Ternärgruppoid. Gilt für $0' \in S$, $\tau(a, 0', b) = b$ $\forall a, b \in S$, so ist $0' = 0$. Weiter ist $0 \neq 1$.*

Beweis. Es gelte $\tau(a, 0', b) = b \quad \forall a, b \in S$ für ein $0' \in S \setminus \{0\}$. Wir wählen irgendwelche Elemente $v_0 \neq y_0$ in S (was möglich ist, weil card $S \geqq 2$). Nach (3) gibt es also genau ein $x_0 \in S$, so dass $\tau(x_0, 0', v_0) = y_0$. Das steht aber im Widerspruch zu $\tau(x_0, 0', v_0) = v_0$. Also ist $0' = 0$.

Weiter setzen wir voraus, dass $0 = 1$ ist. Es sei a_0 in $S \setminus \{0\}$ willkürlich gewählt.

Nach (2) ist $\tau(a_0, 1, 0) = a_0$ und nach (1) folgt $\tau(a_0, 1, 0) = \tau(a_0, 0, 0) = 0$, so dass $a_0 = 0$, im Widerspruch zu der durchgeführten Wahl von a_0. Daher $0 \neq 1$.

Eine binäre Relation $<$ in einer Menge M heisst da *Anordnung* auf M, wenn folgendes gilt:

(i) $a < b \Rightarrow a \neq b$,
(ii) $a < b,\ b < c \Rightarrow a < c$,
(iii) $a \neq b \Rightarrow a < b$ oder $b < a$.

Definition 2. Ein Ternärgruppoid (S, τ) heisst *angeordnet*, wenn eine Anordnung $<$ auf S ausgezeichnet ist, so dass folgendes gilt:

(5) $$v_1 < v_2 \Rightarrow \tau(x, u, v_1) < \tau(x, u, v_2)\,,$$

(6) sind $x, x_0, u_1, v_1, u_2, v_2$ Elemente aus S, für welche $\tau(x_0, u_1, v_1) = \tau(x_0, u_2, v_2)$, $u_1 < u_2$, $x_0 \lesseqgtr x$, dann gilt $\tau(x, u_1, v_1) \lesseqgtr \tau(x, u_2, v_2)$.

Wir werden die Bezeichnung $(S, \tau, <)$ benützen.

Behauptung 2. *Es sei $(S, \tau, <)$ ein angeordnetes Ternärgruppoid. Dann ist $0 < 1$, die Menge S ist unendlich, es gilt*

(*) $$\tau(x, u_1, v_1) = \tau(x, u_2, v_2) \quad \forall x \in S \Rightarrow u_1 = u_2\,, \quad v_1 = v_2\,,$$

und für $1' \in S$ mit $\tau(a, 1', 0) = a \quad \forall x \in S$ ist $1' = 1$.

Beweis. Es gelte $0 > 1$. Setzen wir $x = 1$, $x_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ und wenden (6) an. Die Voraussetzungen in (6) sind nun tatsächlich erfüllt und der Schluss lautet $\tau(1, 0, 0) < \tau(1, 1, 0)$ oder $0 < 1$ (nach (1) und (2)). Das widerspricht der Voraussetzung $0 > 1$, weil $0 \neq 1$ nach Behauptung 1. Also ist $0 < 1$.

Nach (5) ist die Abbildung $v \to \tau(1, 1, v)$ isoton, wobei zu 0 das Element $\tau(1, 1, 0) = 1$ entspricht, zu 1 das Element $\tau(1, 1, 1) = 1$, u. s. w. Es ist S also unendlich.

Es seien u_1, v_1, u_2, v_2 Elemente aus S, für welche $\tau(x, u_1, v_1) = \tau(x, u_2, v_2)\ \ \forall x \in S$ gelten soll. Insbesondere für $x = 0$ folgt also $v_1 = v_2$. – Wählen wir weiter $u_1 = 0$, $u_2 \neq 0$. Dann übergeht $\tau(x, u_1, v_1) = \tau(x, u_2, v_1)$ in $v_1 = \tau(x, u_2, v_1)$, $u_2 \neq 0$, woraus nach (3) $x \in S$ eindeutig bestimmt ist. Das widerspricht der Tatsache, dass die vorige Gleichung nach Annahme für jedes $x \in S$ erfüllt ist (wobei card $S \geqq 2$ sein muss). Daher folgt aus $u_1 = 0$ auch $u_2 = 0$. – Es sei $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$, $u_1 \neq u_2$. O. B. d. A. nehmen wir an, dass $u_1 < u_2$. Die Gleichung $\tau(x, u_1, v_1) = \tau(x, u_2, v_1)$ gilt für jedes $x \in S$, also auch für $x = 0$. Wir wenden Bedingung (6) für $x_0 = 0$, $0 < x$ an und erhalten $\tau(x, u_1, v_1) < \tau(x, u_2, v_1)$, was dem vorangehenden widerspricht. Darum ist $u_1 = u_2$.

Es gelte $\tau(a, 1', 0) = a\ \forall a \in S$ für ein $1' \in S$. Dann folgt $\tau(x, 1, 0) = \tau(x, 1', 0)$ $\forall x \in S$ und nach vorigem auch $1' = 1$.

Behauptung 3. *Jedes angeordete Ternärgruppoid* $(S, \tau, <)$ *erfüllt folgende Bedingungen*:

$$x_1 < x_2\,, \quad 0 \lessgtr u \Rightarrow \tau(x_1, u, v) \lessgtr \tau(x_2, u, v)\,, \tag{7}$$

$$u_1 < u_2\,, \quad 0 \lessgtr x \Rightarrow \tau(x, u_1, v) \lessgtr \tau(x, u_2, v)\,, \tag{8}$$

$$a < b \Rightarrow a \overset{+}{\underset{\tau}{}} c < b \overset{+}{\underset{\tau}{}} c\,, \quad c \overset{+}{\underset{\tau}{}} a < c \overset{+}{\underset{\tau}{}} b\,, \tag{9}$$

$$a < b\,, \quad 0 \lessgtr c \Rightarrow a \overset{\cdot}{\underset{\tau}{}} c \lessgtr b \overset{\cdot}{\underset{\tau}{}} c\,, \quad c \overset{\cdot}{\underset{\tau}{}} a \lessgtr c \overset{\cdot}{\underset{\tau}{}} b\,, \tag{10}$$

$$\tau(x, u, v_1) < \tau(x, u, v_2) \Rightarrow v_1 < v_2\,, \tag{5'}$$

$$\tau(x_0, u_1, v_1) = \tau(x_0, u_2, v_2)\,, \quad \tau(x, u_1, v_1) \lessgtr \tau(x, u_2, v_2)\,, \tag{6'}$$

$$u_1 < u_2 \quad (\text{zw. } x_0 \lessgtr x) \Rightarrow x_0 \lessgtr x \quad (\text{bzw. } u_1 < u_2)\,.$$ [1]

Beweis. Wählen wir in S Elemente $u_2 > 0$; x_0; v_2 und bestimmen $v_1 = \tau(x_0, u_2, v_2)$. Dann ist $\tau(x_0, 0, v_1) = v_1 = \tau(x_0, u_2, v_2)$, sowie auch $0 < u_2$, so dass nach (6) $x_0 \lessgtr x \Rightarrow \tau(x, 0, v_1) \lessgtr \tau(x, u_2, v_2)$ und also auch $\tau(x_0, u_2, v_2) \lessgtr \tau(x, u_2, v_2)$.

Nach (1) gilt $\tau(0, u_1, v) = \tau(0, u_2, v)$. Es gelte weiter $0 \lessgtr x$, $u_1 < u_2$. Nach (6) bekommen wir also $\tau(x, u_1, v) \lessgtr \tau(x, u_2, v)$.

Die Bedingung (7) für $u = 1$ lässt sich mithilfe der Operation $\overset{+}{\underset{\tau}{}}$ als $x_1 < x_2$, $0 < 1 \Rightarrow x_1 \overset{+}{\underset{\tau}{}} v < x_2 \overset{+}{\underset{\tau}{}} v$ umformen. Die Bedingung (5) für $u = 1$ gibt $v_1 < v_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x \overset{+}{\underset{\tau}{}} v_1 < x \overset{+}{\underset{\tau}{}} v_2$.

Die Bedingung (7) für $v = 0$ lässt sich mithilfe der Operation $\overset{\cdot}{\underset{\tau}{}}$ als $x_1 < x_2$, $0 \lessgtr u \Rightarrow x_1 \overset{\cdot}{\underset{\tau}{}} u \lessgtr x_2 \overset{\cdot}{\underset{\tau}{}} u$ umformen. Die Bedingung (8) für $v = 0$ gibt analog $u_1 < u_2, 0 \gtrless x \Rightarrow x \overset{\cdot}{\underset{\tau}{}} u_1 \lessgtr x \overset{\cdot}{\underset{\tau}{}} u_2$

Aus der Voraussetzung $v_1 \geqq v_2$ folgt wegen (5) $\tau(x, u, v_1) \geqq \tau(x, u, v_2)$. Also $\tau(x, u, v_1) < \tau(x, u, v_2) \Rightarrow v_1 < v_2$.

Angenommen $\tau(x_0, u_1, v_1) = \tau(x_0, u_2, v_2)$, $\tau(x, u_1, v_1) < \tau(x, u_2, v_2)$. Ist erstens $u_1 < u_2$, $x_0 \geqq x$, dann folgt nach (6) $\tau(x, u_1, v_1) < \tau(x, u_2, v_2)$ gegen der Voraussetzung. Also $u_1 < u_2$ impliziert $x_0 < x$. Ähnlich für den Fall $\tau(x, u_1, v_1) >$ $> \tau(x, u_2, v_2)$. Ist zweitens $x_0 < x$, $u_1 \geqq u_2$, dann bekommen wir nach (6) $\tau(x, u_1, v_1) \geqq$ $\geqq \tau(x, u_2, v_2)$. Ist zweitens $x_0 < x$, $u_1 \geqq u_2$, dann bekommen wir nach (6) $\tau(x, u_1, v_1) \geqq \tau(x, u_2, v_2)$, gegen die Annahme. Also folgt $u_1 < u_2$ aus $x_0 < x$. Ähnlich für den Fall $\tau(x, u_1, v_1) > \tau(x, u_2, v_2)$, $x_0 > x$.

---

[1]) Später werden wir noch in den Behauptungen 4, 5 und 7 folgendermassen getrennte Teile von Bedingungen (9) und (10) benützen:

$$a < b \Rightarrow a \overset{+}{\underset{\tau}{}} c < b \overset{+}{\underset{\tau}{}} c\,, \tag{9$_1$}$$

$$a < b \Rightarrow c \overset{+}{\underset{\tau}{}} a < c \overset{+}{\underset{\tau}{}} b\,, \tag{9$_2$}$$

$$a < b\,, \quad 0 \lessgtr c \Rightarrow a \overset{\cdot}{\underset{\tau}{}} c \lessgtr b \overset{\cdot}{\underset{\tau}{}} c \tag{10$_1$}$$

$$a < b\,, \quad 0 \lessgtr c \Rightarrow c \overset{\cdot}{\underset{\tau}{}} a \lessgtr c \overset{\cdot}{\underset{\tau}{}} b\,. \tag{10$_2$}$$

Behauptung 4. *Es sei* (S, τ) *ein Ternärgruppoid, welches folgende Bedingungen erfült:*

$$(11) \qquad \tau(a, b, c) = a \cdot_\tau b +_\tau c \qquad \forall a, b, c \in S\,,$$

$$(12) \qquad (a +_\tau b) +_\tau c = a +_\tau (b +_\tau c) \quad \forall a, b, c \in S\,.$$

Ist $<$ *eine Anordnung auf S, dann gelten* (5) *und* (6) *genau dann, wenn* (9) *gilt gemeinsam mit*

(13) für $u_1 < u_2$ ist die Abbildung $x \to -_\tau (x \cdot_\tau u_1) +_\tau (x \cdot_\tau u_2)$ isoton.

Beweis. Es sei also $(S, \tau, <)$ ein angeordnetes Ternärgruppoid mit (11) und (12). Nach Behauptung 3 gilt dann (9), so dass nur noch (13) nachzuprüfen ist. Untersuchen wir also Elemente $x, x_0, u_1, v_1, u_2, v_2 \in S$, für welche $u_1 < u_2$ und $x_0 \cdot_\tau u_1 +_\tau v_1 = x_0 \cdot_\tau u_2 +_\tau v_2$ gilt. Nach (6) ist dann $x_0 \lessgtr x \Rightarrow x \cdot_\tau u_1 +_\tau v_1 \lessgtr x \cdot_\tau u_2 +_\tau v_2$. Weil $(S, +_\tau)$ eine Loop mit neutralem Element 0 ist (was aus Definition 1 folgt), ergibt sich aus (12), dass $(S, +_\tau)$ sogar eine Gruppe ist. Die Gleichungen $x_0 \cdot_\tau u_1 +_\tau v_1 = x_0 \cdot_\tau u_2 +_\tau v_2$, $x \cdot_\tau u_1 +_\tau v_1 = x \cdot_\tau u_2 +_\tau v_2$ können wir also als $-_\tau (x_0 \cdot_\tau u_1) +_\tau (x_0 \cdot_\tau u_2) = v_1 -_\tau v_2$, $-_\tau (x \cdot_\tau u_1) +_\tau (x \cdot_\tau u_2) \lessgtr v_1 -_\tau v_2$ schreiben, wobei benützt wurde, dass $(S, +_\tau)$ eine Gruppe ist und auch die Bedingung (9). Wir haben also insgesamt $-_\tau (x_0 \cdot_\tau u) +_\tau (x_0 \cdot_\tau u) \lessgtr -_\tau (x \cdot_\tau u_1) +_\tau (x \cdot_\tau u_2)$ für $x_0 \lessgtr x$. Die Wahl von v_1 und v_2 ist stets so möglich, dass x_0 ein willkürliches Element aus S sein wird: zu gegebenen x_0, u_1, v_1, u_2, v_2 bestimmt man v_2 mittels $x_0 \cdot_\tau u_1 +_\tau v_1 = x_0 \cdot_\tau u_2 +_\tau v_2$. Also ist die Abbildung $x \to -_\tau (x \cdot_\tau u_1) +_\tau (x \cdot_\tau u_2)$ isoton.

Es sei ein Ternärgruppoid (S, τ) mit (11) und (12) gegeben und weiter noch eine Anordnung $<$ auf S mit (9) und (13). Mit Gebrauch von (11) folgt sofort aus (9_2) die verlangte Bedingung (5). Was die Herleitung von (6) betrifft, kann man das Verfahren aus dem ersten Teil des Beweises umkehren. Dabei gebraucht man nut (9) und die Tatsache, dass $(S, +_\tau)$ eine Gruppe ist.

Behauptung 5. *Es gibt ein Ternärgruppoid* (S, τ) *mit* (*), (11), (12) *und mit folgenden weiteren Eigenschaften:* $(S \setminus \{0\}, \cdot_\tau)$ *ist keine Loop und es existiert eine Anordnung* $<$ *auf S, so dass* A) (5), (10_1) *gelten, dagegen* (10_2) *nicht,* B) (5), (10) *gelten, aber* (6) *gilt nicht,* C) (5), (6) *gelten.*

Beweis. Es sei nun $(S, +, ., <)$ der üblicherweise angeordnete Körper der reellen Zahlen. Wir definieren eine ternäre Operation $\tau : S \times S \times S \to S$ mittels:

A) $\tau(a, b, c) = c$ für $b = 0$, $\tau(a, b, c) = a + c$ für $b \neq 0$, $|a| \leqq 1$ und $\tau(a, b, c) = ab + 1 - b + c$ für $b \neq 0$, $|a| > 1$; man kann nachprüfen, dass dabei (5), (10_1) in Kraft ist und (10_2) nicht;

B) $\tau(a, b, c) = ab + c$ für $|b| \leqq 1$, $\tau(a, b, c) = 2ab + c$ für $|b| > 1$, $|a| \leqq 1$ und $\tau(a, b, c) = 2ab + 2 - 2b + c$ für $|b| > 1$, $|a| > 1$; man kann nachprüfen, dass hier (5) und (10) gilt, nicht aber (6);

C) $\tau(a, b, c) = ab + c$ für $|b| \leqq 1$ und $\tau(a, b, c) = 2ab + c$ für $|b| > 1$; man kann nachprüfen, dass hier (5) und (14) gilt, also auch (6). In jedem Fall kann man dabei nichtverschwindende reelle Zahlen a_0, d_0 angeben, so dass $a_0 \mathbin{\dot{:}} y \neq d_0$ für jede nichtverschwindende reelle Zahl y ist. $(S \setminus \{0\}, \mathbin{\dot{:}})$ ist also keine Loop.

Unter einer *Zerlegung* einer Menge M verstehen wir eine nichtleere Menge von nichtleeren Untermengen aus M, welche paarweise elementsfremd sind und M überdecken.

Definition 3. Unter einer *Parallelstruktur* versteht man hier ein Tripel $(\mathbf{P}, \mathbf{L}, \|)$, wo (i) $\mathbf{P}$ eine Menge ist mit Elementen, die *Punkte* heissen sollen, (ii) L eine Menge ist von gewissen Untermengen aus $\mathbf{P}$ die *Geraden* genannt sind und (iii) $\|$ eine Zerlegung von $\mathbf{L}$ ist, so dass jedes Element von $\|$ eine Zerlegung von $\mathbf{P}$ vorstellt. Weiter fordern wir, dass: (a) $\mathbf{P} = S \times S$, wo S eine wenigstens zweielementige Menge ist, (b) $Y_a = \{(x, y) \mid x = a\}$, $X_a = \{(x, y) \mid y = a\} \in \mathbf{L}$ $\forall a \in S$; $D = \{(x, y) \mid x = y\} \in \mathbf{L}$; (c) $\mathbf{Y} = \{Y_a \mid a \in S\}$, $\mathbf{X} = \{X_a \mid a \in S\} \in \|$, (d) $\operatorname{card}(Y_a \cap L) = \operatorname{card}(X_a \cap L) = 1$ $\forall a \in S$, $\forall L \in \mathbf{L} \setminus (\mathbf{X} \cup \mathbf{Y})$, (e) es gibt eine ausgezeichnete bijektive Abbildung $\mathbf{f} : S \to \| \setminus \{\mathbf{Y}\}$; dabei bezeichnen wir $0 := \mathbf{f}^{-1}(X)$, $1 := \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{D})$, wo $\mathbf{D} \in \|$ durch $D \in \mathbf{D}$ bestimmt ist.

Bemerken wir, dass man zu jeder Parallelstruktur $\mathscr{P} = (S \times S, \mathbf{L}, \|)$ ein Ternärgruppoid $\mathscr{T}_{\mathscr{P}} = (S, \tau)$ kanonisch zuordnen kann, wobei (*) gilt und $\tau(a, b, c) = d :\Leftrightarrow$ der Punkt (a, d) liegt auf der Geraden, welche den Punkt $(0, c)$ enthält und zu $\mathbf{f}(b)$ gehört. Umgekehrt, zu jedem Ternärgruppoid $\mathscr{T} = (S, \tau)$ mit (*) kann eine Parallelstruktur $\mathscr{P}_{\mathscr{T}} = (S \times S, \mathbf{L}, \|)$ zugeordnet werden, so dass $\mathbf{L} := \mathbf{Y} \cup \{\{(x, y) \mid y = \tau(x, u, v)\} \mid (u, v) \in S \times S\}$, $\| := \{\mathbf{Y}\} \cup \{\{\{(x, y) \mid y = \tau(x, u, v)\} \mid v \in S\} \mid u \in S\}$, $\mathbf{f}(u) := \{\{(x, y) \mid y = \tau(x, u, v) \mid v \in S\}$ $\forall u \in S$ ist.

Es sei $\mathscr{P} = (S \times S, \mathbf{L}, \|)$ eine Parallelstruktur. Neben den schon in der Definition 3 (Bedingungen (b) und (c)) eingeführten Bezeichnungen gebrauchen wir noch folgendes: $L_{u,v} := \{(x, y) \mid y = \tau(x, u, v)\}$ $\forall (u, v) \in S \times S$, wo τ durch $\mathscr{T}_{\mathscr{P}} = (S, \tau)$ bestimmt ist; $\mathscr{L}_u := \{L_{u,v} \mid v \in S\}$ $\forall u \in S$; $\mathscr{G}_{a,b} := \{L_{u,v} \mid (a, b) \in L_{u,v}\}$ $\forall (a, b) \in S \times S$; für jedes $(u, c) \in S \times S$ sei $\varrho_{u,c} : \mathscr{L}_u \to Y_c$ eine Abbildung, die mittels der Regel $\varrho_{u,c}(L) := L \cap Y_c$ $\forall L \in \mathscr{L}_u$ bestimmt ist; für jedes $(a, b, c) \in S \times S \times S$, $a \neq c$ sei $\lambda_{a,b,c} : \mathscr{G}_{a,b} \to Y_c$ eine Abbildung mit $\lambda_{a,b,c}(L) = L \cap Y_c$ $\forall L \in \mathscr{G}_{a,b}$; für jedes $c \in S$ sei $\mu_c : S \to \mathbf{X}$ eine Abbildung mit $\mu_c(x) := X_{\tau(x,1,c)}$ $\forall x \in S$. Ist weiter noch $<$ eine Anordnung auf S, dann ist eine natürliche Anordnung $<_{Y_a}$ auf jeder Geraden Y_a, $a \in S$ induziert, so dass $(a, y_1) <_{Y_a} (a, y_2) :\Leftrightarrow y_1 < y_2$. Weiter ist eine natürliche Anordnung $<_{\mathscr{L}_u}$ auf jedem $\mathscr{L}_u$, $u \in S$ induziert, so dass $L_{u,v_1} <_{\mathscr{L}_u} L_{u,v_2} :\Leftrightarrow v_1 < v_2$. Endlich ist auf jedem $\mathscr{G}_{a,b}$, $(a, b) \in S \times S$ eine natürliche Anordnung $<_{\mathscr{G}_{a,b}}$ induziert, so dass $L_{u_1,v_1} <_{\mathscr{G}_{a,b}} L_{u_2,v_2} :\Leftrightarrow u_1 < u_2$.

Definition 4. Eine Parallelstruktur $(S \times S, \mathbf{L}, \|)$ heisst *angeordnet*, wenn auf S eine fixe Anordnung $<$ existiert, so dass jedes $\varrho_{u,c}$, $(u, c) \in S \times S$ natürliche Anordnungen erhält, wogegen jedes $\lambda_{a,b,c}$, $(a, b, c) \in S \times S \times S$, $a \neq c$ natürliche Anordnungen für $a < c$ erhält und für $c < a$ umkehrt. Bezeichung: $(S \times S, \mathbf{L}, \|, <)$.

Behauptung 6. *Ist $\mathscr{T} = (S, \tau, <)$ ein angeordnetes Ternärgruppoid, dann ist $\mathscr{P}_{\mathscr{T}}$ durch $<$ angeordnet. Ist $\mathscr{P} = (S \times S, \mathbf{L}, \|, <)$ eine angeordnete Parallelstruktur, dann ist $\mathscr{T}_{\mathscr{P}}$ durch $<$ angeordnet.*

Beweis. Man kann leicht beglaubigen, dass (5) mit der Erhaltung der natürlichen Anordnungen unter $\varrho_{u,x}$ äquivalent ist, wogegen (6) mit der Erhaltung (bei $x_0 < x$) und mit der Umkehrung (bei $x_0 > x$) der natürlichen Anordnungen unter $\lambda_{x_0,\tau(x_0,u_1,v_1),x}$ äquivalent ist.

Behauptung 7. *Ist $(S, \tau, <)$ ein angeordnetes Ternärgruppoid, dann überführt jedes μ_c, $c \in S$ die Anordnung $<$ in natürliche Anordnung. Es sei $(S \times S, \mathbf{L}, \|)$ eine Parallelstruktur und $<$ eine Anordnung auf S mit folgenden Eigenschaften: $0 < 1$; jedes μ_c, $c \in S$ überführt $<$ in natürliche Anordnung; jedes $\varrho_{u,c}$, $(u, c) \in S \times S$ erhält natürliche Anordnungen; jedes $\lambda_{a,b,c}$, $(a, b, c) \in S \times S \times S$, $a \neq c$ erhält oder umkehrt natürliche Anordnungen. Dann ist die gegebene Parallelstruktur durch $<$ angeordnet.*

Beweis. Der erste Teil folgt unmittelbar daraus, dass in jedem angeordneten Ternärgruppoid $(S, \tau, <)$ (9_1) gilt (siehe Behauptung 3) und (9_1) damit äquivalent ist, dass μ_c $<$ in die natürliche Anordnung überführt. Im zweiten Teil ist die Annahme über μ_c wieder mit (9_1) äquivalent, die Voraussetzung über $\varrho_{u,c}$ ist mit (5) äquivalent, wogegen die Voraussetzung über $\lambda_{a,b,c}$ eine besondere Analyse braucht. Untersuchen wir also die entsprechende Situation: wir haben einen Punkt (x_0, y_0), und es gelte $x_0 < x$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$. Nach Voraussetzung ist $1 = u_2 > u_1 = 0$. Für die ternäre Operation τ (die durch $\mathscr{T}_{\mathscr{P}} = (S, \tau)$ bestimmt ist) gelte nun $y_0 = \tau(x_0, 0, v_1) = \tau(x_0, 1, v_2)$, d. h. $v_1 = x_0 \overset{+}{\tau} v_2$. Wir brauchen entscheiden, ob zwischen $\tau(x, 0, v_1)$ und $\tau(x, 1, v_2)$ (d. h. zwischen v_1 und $x \overset{+}{\tau} v_2$) die Relation $<$ oder $\geqq$ auftritt. Aus $x_0 < x$ folgt aber nach (9_1) $x_0 \overset{+}{\tau} v_2 < x \overset{+}{\tau} v_2$, was wir auch als $v_1 < x \overset{+}{\tau} v_2$ schreiben können. Also erhält bei $x_0 < x$ die Abbildung $\lambda_{x_0,y_0,x}$ natürliche Anordnungen in Übereinstimmung damit, was zu beweisen war. Ähnlich für den Fall $x < x_0$.

Literaturverzeichnis

[1] *Sibylla Crampe:* Angeordnete projektive Ebenen. Math. Zeitschr. *69* (1958), 435–462.

[2] *A. Heyting:* Axiomatic Projective Geometry. Groningen–Amsterdam 1963.

Anschrift des Verfassers: Brno, Hilleho 6, (Vysoké učení technické).