Časopis pro pěstování matematiky

Robert Karpe

Některé relace mezi kombinačními čísly $p(n)$

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 94 (1969), No. 1, 108--114

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117642`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 94 (1969), Praha

RŮZNÉ

NĚKTERÉ RELACE MEZI KOMBINAČNÍMI ČÍSLY $p(n)$

ROBERT KARPE, Brno

(Došlo 27. října 1967)

Definice 1. Nechť $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ je množina všech přirozených čísel. Nechť $M \subseteq N$ je její libovolně zvolená podmnožina.

Nechť n je libovolné přirozené číslo. Pak konečnou, nerostoucí posloupnost přirozených čísel

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_m \geqq 1$$

nazveme *kombinace s opakováním, součtu n, z prvků množiny M*, jestliže platí:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m = n\,, \quad a_i \in M\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Viz [1], úvod kapitoly 5.

Ve shodě s citovanou knihou zavedeme označení:

$\Gamma[\int n; M]$ pro soubor, $\Gamma(\int n; M)$ pro počet všech různých kombinací s opakováním, součtu n, sestavených z prvků množiny M.

Ve shodě se [2], kapitola 19, zavedeme zjednodušené označení: $p[n] = \Gamma[\int n; N]$, $p(n) = \Gamma(\int n; N)$.

Poznámka 1. Podle definice vytvořujících funkcí, viz [2], str. 313, 314, platí:

$$\text{(a)} \quad \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots} = q(0) + q(1) \cdot x^1 + \ldots + q(n) \cdot x^n + \ldots$$

kde koeficient $q(n) = \Gamma(\int n; 1, 3, 5, \ldots)$; $q(0) = 1$.

$$\text{(b)} \quad \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots} = p(0) + p(1) \cdot x^1 + \ldots + p(n) \cdot x^n + \ldots$$

kde koeficient $p(0) = 1$.

(c) Po substituci $x = z^r$ a po vynásobení činitelem z^k obdržíme z předchozí rovnice:

$$\frac{z^k}{(1 - z^r)(1 - z^{2r})(1 - z^{3r})\dots} = p(0) \,.\, z^k + p(1) \,.\, z^{k+r} + p(2) \,.\, z^{k+2r} + $$
$$+ \dots + p\left(\frac{n - k}{r}\right) . \, z^n + \dots$$

Poznámka 2. V dalším se používá – jako obvykle v kombinatorické analýze – formálních identit pro formální mocninné řady, tj. rovnost dvou mocninných řad se chápe jako množina vztahů pro jejich koeficienty. Otázkami jako zdali daná řada konverguje, nebo kdy má daný výraz smysl, se tedy nebudeme zabývat.

Byly nalezeny různé relace mezi čísly $p(n)$; viz například [2], kapitola 19. Cílem tohoto článku je nalézt některé další vztahy mezi těmito čísly.

Věta 1. *Pro libovolné přirozené n platí vztahy:*

(1) $$p(n) = \sum_{i=1} (-1)^i \, p(n - 3i^2 + i) + (-1)^i \, p(n - 3i^2 - i) =$$
$$= \sum_{i=1} p\left(\frac{1}{2}\left[n - \binom{i}{2}\right]\right),$$

(2) $$p\left(\frac{n}{2}\right) + \sum_{i=1} (-1)^i \, p\left(\frac{n}{2} - 3i^2 + i\right) + (-1)^i \, p\left(\frac{n}{2} - 3i^2 - i\right) =$$
$$= \sum_{i=1} (-1)^{\binom{i}{2}} . \, p\left(n - \binom{i}{2}\right),$$

(3) $$\sum_{i=1} p\left(\frac{n}{4} - \frac{1}{2}\binom{i}{2}\right) = \sum_{i=1} (-1)^{\binom{i}{2}} . \, p\left(n - \binom{i}{2}\right),$$

kde $p(0) = 1$, $p(m) = 0$ *pro* $m \notin N$.

Pěkně jednoduše se jeví zvláštní případ vzorce (3). Vyslovme jej proto samostatně:

Věta 1a. *Pro libovolné liché číslo n platí:*

(3a) $$\sum_{i=1} (-1)^{\binom{i}{2}} . \, p\left(n - \binom{i}{2}\right) = 0 \, .$$

Důkaz. (a) Platí známá Eulerova identita:

$$(1 - t)(1 - t^2)(1 - t^3)\dots = 1 + \sum_{i=1} (-1)^i \left[t^{\frac{i}{2}(3i+1)} + t^{\frac{i}{2}(3i-1)}\right] =$$
$$= 1 - t - t^2 + t^5 + t^7 - t^{12} - t^{15} + \dots$$

Viz [2], str. 323, relace (19.9.3).

Provedeme-li zde substituci $t = z^2$ a obě strany takto vzniklé nové identity násobíme výrazem $(1 - z)^{-1} (1 - z^2)^{-1} (1 - z^3)^{-1} \ldots$, obdržíme po úpravě:

$$\text{(A)} \qquad \frac{1}{(1 - z)(1 - z^3)(1 - z^5)\ldots} = \frac{1 - z^{2.1} - z^{2.2} + z^{2.5} + z^{2.7} - \ldots}{(1 - z)(1 - z^2)(1 - z^3)\ldots}$$

(b) Současně též platí identita:

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{(1 - z)(1 - z^3)(1 - z^5)\ldots} = \frac{1 + z + z^3 + \ldots + z^{\binom{i}{2}} + \ldots}{(1 - z^2)(1 - z^4)(1 - z^6)\ldots}$$

Viz [2], str. 323, věta 354.

(c) Uvažujme o rovnosti mezi pravými stranami identit (A), (B): Nechť pravá strana (A) je rozložena do řady zlomků:

$$\frac{1}{(1 - z)(1 - z^2)(1 - z^3)\ldots} - \frac{z^2}{(1 - z)(1 - z^2)(1 - z^3)\ldots} - \ldots$$

a obdobně též pravá strana (B).

Nechť každý z těchto zlomků je vyjádřen rozvojem v mocninnou řadu; pak — označováno podle poznámky 1-c — je patrno, že v rozvoji i-tého zlomku rozložené pravé strany (A), resp. (B), se nachází u mocniny z^n koeficient $p(n - k_i)$, resp. $p(\frac{1}{2}(n - k_i))$.

Odtud ve smylu poznámky 2. vyplývá vztah (1).

Poznámka 3. Z identit (A), (B), a z poznámky 1-a je patrno, že součet všech členů z jedné strany rovnosti (1) dává číslo $q(n)$.

(d) Platí identita:

$$\text{(C)} \qquad \frac{1}{(1 - x^2)(1 - x^6)(1 - x^{10})\ldots} = \frac{1 - x - x^3 + \ldots + (-x)^{\binom{i}{2}} + \ldots}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)\ldots}.$$

Důkaz. V identitě (B) položme $z = -x$ a obě strany takto vzniklé nové identity násobme výrazem $(1 - x)^{-1} . (1 - x^3)^{-1} . (1 - x^5)^{-1} \ldots$

Z toho po malé úpravě obdržíme (C).

(e) Identity (A), (B) po provedení substituce $z = x^2$ nazvěme (A^+), (B^+). Uvažujme pak o rovnosti mezi pravými stranami identit (A^+), (C), resp. (B^+), (C):

Analogicky s postupem, uvedeným v odstavci (c), uvážíme že v rozvoji i-tého zlomku rozložené pravé strany (A^+), resp. (B^+), resp. (C), se nachází u mocniny x^n koeficient $p(\frac{1}{2}(n - k_i))$, resp. $p(\frac{1}{4}(n - k_i))$, resp. $p(n - k_i)$.

Odtud ve smyslu poznámky 2. vyplývá vztah (2), resp. (3).

Poznámka 4. Vzhledem k tomu, že společná levá strana identit (A^+), (B^+), (C) je vytvořující funkcí pro kombinační čísla $\Gamma(\int i; 2, 6, 10, \ldots)$, $i \in N$, viz [2], str. 313, 314, je patrno že součet všech členů z jedné strany rovnosti (2), resp. (3), dává číslo $\Gamma(\int n; 2, 6, 10, \ldots)$.

Definice 2. Nechť kombinace K_1, resp. K_2 je konečná, nerostoucí posloupnost prvků: $(m_1, m_2, \ldots, m_r)$, resp. $(n_1, n_2, \ldots, n_s)$.

Pak *aditivním součinem* těchto dvou kombinací je opět konečná, nerostoucí posloupnost prvků: $(p_1, p_2, \ldots, p_{r+s})$, kde každý z prvků m_i, n_j, je právě jednou prvkem p_k. Je to tedy opět kombinace. Označme ji K_3.

Příklad: $K_1 = (4, 2)$, $K_2 = (3, 1, 1)$; $K_3 = (4, 3, 2, 1, 1)$.

Uvedený vztah označíme takto: $K_1 \vee K_2 = K_3$.

Pro aditivní součin dvou kombinačních souborů zavedeme obdobné označení: $\Gamma[\int n_1; M_1] \vee \Gamma[\int n_2; M_2]$. Zřejmě zde platí: $\Gamma[\int n_1; M_1] \vee \Gamma[\int n_2; M_2] \subset \subset \Gamma[\int(n_1 + n_2); M_1 \cup M_2]$.

Lemma 1. *Budiž $M = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ posloupnost daných přirozených čísel a budiž $kM = \{ka_1, ka_2, ka_3, \ldots\}$ posloupnost příslušných k-násobků. Pak platí:*

$$\Gamma\left(\int n; kM\right) = \Gamma\left(\int \frac{n}{k}; M\right), \quad \textit{je-li} \ \frac{n}{k} \ \textit{celé číslo},$$

$$= 0, \quad \textit{není-li} \ \frac{n}{k} \ \textit{celé číslo}.$$

Platnost lemmatu je zřejmá.

Lemma 2. *Nechť číslo $a = \Gamma(\int n_1; M_1)$, resp. číslo $b = \Gamma(\int n_2; M_2)$, označuje počet všech různých kombinací v souboru $\Gamma[\int n_1; M_1]$, resp. v souboru $\Gamma[\int n_2; M_2]$. Nechť průnik $M_1 \cap M_2$ je množina prázdná. Pak počet všech kombinací v souboru vytvořeném aditivním součinem $\Gamma[\int n_1; M_1] \vee \Gamma[\int n_2; M_2]$ je vyjádřen součinem $a \,.\, b$.*

Platnost lemmatu je zřejmá.

Pro stručnost zavedeme nyní tato označení:

$$p_2(n), \quad p_2[n], \quad \text{místo} \quad \Gamma\left(\int n; 2, 4, 6, \ldots\right), \quad \Gamma\left[\int n; 2, 4, 6, \ldots\right],$$

$$q_2(n), \quad q_2[n], \quad \text{místo} \quad \Gamma\left(\int n; 1, 3, 5, \ldots\right), \quad \Gamma\left[\int n; 1, 3, 5, \ldots\right].$$

Poznámka 5. Vzhledem k dřívějšímu označení je tedy $q_2(n) = q(n)$.

Věta 2. *Pro libovolné přirozené n platí:*

$$p(n) = \sum_{i=0} p(i)\, q_2(n - 2i), \quad \textit{kde} \quad p(0) = q_2(0) = 1. \tag{4}$$

Důkaz. Snadno uvážíme, že pro libovolné přirozené n platí:

$$p[n] = q_2[n] \cup p_2[2] \vee q_2[n-2] \cup p_2[4] \vee q_2[n-4] \cup \ldots,$$

takže podle lemmatu 1. a lemmatu 2. platí:

$$p(n) = p(0)\, q_2(n) + p(1)\, q_2(n-2) + p(2)\, q_2(n-4) + \ldots,$$

c.b.d.

Kombinační číslo $q_2(n)$ umíme však vyjádřit pomocí čísel $p(i)$, a to třemi různými způsoby. Proto platí:

Věta 3. *Pro libovolné přirozené číslo n platí:*

$$(5) \qquad p(n) = \sum_{i=0} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^j\, p(i)\, p(n - 3j^2 - j - 2i),$$

$$(6) \qquad p(n) = \sum_{i=0} \sum_{j=1} p(i) \,.\, p\left(\frac{1}{2}\left[n - \binom{j}{2}\right] - i\right),$$

$$(7) \qquad p(n) = \sum_{i=0} \sum_{j=1} (-1)^{\binom{j}{2}} \,.\, p(i) \,.\, p\left(2n - \binom{j}{2} - 4i\right).$$

Důkaz ad (5): Platí vztah:

$$q_2(m) = p(m) + \sum_{j=1} (-1)^j\, p(m - 3j^2 + j) + (-1)^j\, p(m - 3j^2 - j),$$

vyplývající z identity (A), viz věta (1) a poznámka 3.

Nyní jej pro stručnost vyjádříme takto:

$q_2(m) = \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^j\, p(m - 3j^2 - j)$. Dosadíme-li sem $m = n - 2i$, a poté pravou stranu za $q_2(n - 2i)$ do (4), obdržíme po malé úpravě vztah (5).

ad (6): Platí vztah:

$q_2(m) = \sum_{j=1} p\left(\frac{1}{2}\left[m - \binom{j}{2}\right]\right)$, vyplývající z identity (B), viz věta (1) a poznámka 3. Odtud zcela obdobně s předchozím postupem obdržíme vztah (6).

ad (7): Platí vztah:

$\Gamma\left(\int m; 2, 6, 10, \ldots\right) = \sum_{j=1} (-1)^{\binom{j}{2}} \,.\, p\left(m - \binom{j}{2}\right)$, vyplývající z identity (C), viz věty (2), (3), a poznámka 4. Podle lemmatu 1. je $\Gamma(\int m; 2, 6, 10, \ldots) = q_2(m/2)$. Substituce $m/2 = n - 2i$ připraví tudíž uvedený vztah pro dosazení do (4). Tím obdržíme vztah (7).

Vztah (5) lze zobecnit:

Uvažujme o kombinačních číslech $\Gamma(\int n; D(k))$, kde $D(k)$ je označení pro posloupnost všech přirozených čísel od nichž byly odňaty všechny násobky jistého čísla k; například:

$$D(3) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, \ldots\}.$$

Označíme-li pro stručnost:

$$p_k(n)\,,\quad p_k[n]\,,\quad \text{místo}\quad \Gamma\left(\int n;\, k, 2k, 3k, \ldots\right),\quad \Gamma\left[\int n;\, k, 2k, 3k, \ldots\right],$$

$$q_k(n)\,,\quad q_k[n]\,,\quad \text{místo}\quad \Gamma\left(\int n;\, D(k)\right),\quad \Gamma\left[\int n;\, D(k)\right],$$

pak zní zobecněný tvar věty 2 takto:

Věta 2a. *Pro libovolné přirozené n a přirozené k* $\neq 1$ *platí*:

$$p(n) = \sum_{i=0} p(i)\, q_k(n - ki)\,; \quad p(0) = q_k(0) = 1\,.$$

Důkaz je zcela analogický s důkazem věty 2.

Kombinační čísla $\Gamma(\int n; D(k))$ je možno vyjádřit pomocí čísel $p(n)$: Podle [2], str. 313, 314, je vytvořující funkcí pro tato čísla následující výraz:

$$\frac{(1 - x^k)(1 - x^{2k})(1 - x^{3k})\ldots}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)\ldots}\,,$$

který podle [2], str. 322, věty 353, je možno upravit takto:

$$\frac{\sum\limits_{-\infty}^{\infty} (-1)^j \,.\, x^{\frac{k}{2}(3j^2 + j)}}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)\ldots}\,.$$

Z toho pak vyplývá:

$q_k(m) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} (-1)^j\, p(m - \frac{1}{2}k(3j^2 + j))$; toto dosadíme (po substituci $m = n - ki$) do věty (2-a), čímž vznikne:

Věta 3a. *Pro libovolné přirozené n platí*:

$$p(n) = \sum_{i=0} \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^j\, p(i)\, p(n - \tfrac{1}{2}k(3j^2 + j) - ki)\,, \tag{5-a}$$

kde k je libovolné přirozené číslo.

(Že platí též $k = 1$, to vyplývá přímo z Macmahonovy formule, viz [2], str. 325, věta (19.10.2)).

Věta 4. *Pro libovolné přirozené n platí*:

$$q(n) = \sum_{i=0} (-1)^i \, q(i) \, q(2n - i) \,, \quad \text{kde} \quad q(0) = 1 \,.$$

Důkaz. Uvažujme o součinu

$$\frac{1}{(1 - x)(1 - x^3)(1 - x^5)\ldots} \cdot \frac{1}{(1 + x)(1 + x^3)(1 + x^5)\ldots} =$$

$$= \frac{1}{(1 - x^2)(1 - x^6)(1 - x^{10})\ldots}$$

Protože platí identita uvedená v poznámce 1-a, platí též identity, které z této obdržíme, když za x dosadíme $-x$, x^2:

$$\frac{1}{(1 + x)(1 + x^3)(1 + x^5)\ldots} = \sum_{i=0} (-1)^i \, q(i) \, x^i \,,$$

$$\frac{1}{(1 - x^2)(1 - x^6)(1 - x^{10})\ldots} = \sum_{i=0} q(i) \, x^{2i} \,.$$

Dosazením uvedených mocninných řad do hořejšího součinu a porovnáním koeficientů při libovolně zvolené mocnině x^{2n}, se věta snadno odvodí.

Literatura

[1] *Netto E.*: „Lehrbuch der Combinatorik“, Berlin 1901.

[2] *Hardy*, *Wright*: „Einführung in die Zahlentheorie“, R. Oldenburg, München 1958.

Adresa autora: Charbulova 14, Brno.