Časopis pro pěstování matematiky

Adolf Karger
Axiody obecného afinního pohybu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 93 (1968), No. 4, 378--385

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117632`

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1968

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* `http://project.dml.cz`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 93 (1968), Praha

AXOIDY OBECNÉHO AFINNÍHO POHYBU

ADOLF KARGER, Praha

(Došlo 15. června 1967)

1. ÚVOD

Nechť G je souvislá m-dimensionální $(m \geqq 1)$ Lieova grupa afinních transformací afinního prostoru $\tilde{A}_n$. Každou transformaci $g \in G$ lze psát ve tvaru

$$g = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \boldsymbol{a}, & b \end{pmatrix} \tag{1}$$

kde b je nesingulární matice typu $n \times n$ a $\boldsymbol{a}$ je sloupec typu n. Grupa G indukuje přirozeným způsobem grupu lineárních transformací v zaměření $\tilde{V}_n$ afinního prostoru $\tilde{A}_n$, kterou budeme značit opět G, a to takto: Buďte $g \in G$, $V \in \tilde{V}_n$, $A, B \in \tilde{A}_n$ a nechť $V = A - B$. Položme

$$gV = gA - gB\,.$$

Vektor gV zřejmě závisí pouze na vektoru V a na transformaci $g \in G$. Buď dále $\{A, E_1, \ldots, E_n\}$ repér v $\tilde{A}_n$ a $\{E_1, \ldots, E_n\}$ reper ve $\tilde{V}_n$. n-tici souřadnic bodu $X \in A_n$ resp. vektoru $v \in V_n$ pišme do sloupce a značme ji $\boldsymbol{x}$ resp. $\boldsymbol{v}$. Pak pro $g \in G$ ve tvaru (1) platí

$$gX = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \boldsymbol{a}, & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{a} + b\boldsymbol{x} \end{pmatrix}, \quad gV = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \boldsymbol{a}, & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b\boldsymbol{v} \end{pmatrix}.$$

Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ grupy G uvažujme jako podalgebru v $\mathfrak{gl}(n + 1)$, tj. jako algebru matic typu $(n + 1) \times (n + 1)$. Rovnicemi

$$X = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ \boldsymbol{x}, & -\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \text{tj.} \quad x^i_j = -\delta^j_i\,,$$

kde ε je jednotková matice, je definován afinní prostor A_n v $\mathfrak{gl}(n + 1)$, rovnicemi

$$V = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ \boldsymbol{v}, & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{tj.} \quad x^j_i = 0\,,$$

je definováno jeho zaměření V_n. Uvažujeme-li grupu ad G jako grupu automorfizmů celé algebry $\mathfrak{gl}(n+1)$, zjistíme snadno, že ad G operuje v A_n (ve V_n) stejně jako grupa G v $\tilde{A}_n$ (ve $\tilde{V}_n$). Tím je dána isomorfní representace grupy G v ad $GL(n+1)$, které v dalším použijeme. Předpokládejme tedy, že grupa G je grupou lineárních transformací v $\mathfrak{gl}(n+1)$, vytvořená shora uvedeným způsobem.

2. AFINNÍ POHYB

Mějme nyní afinní pohyb $g(t)$ z G třídy C^1, jeho pevný řídicí kužel nechť je $\mathbf{R}(t)$, a jeho hybný řídicí kužel označme $\bar{\mathbf{R}}(t)$ ([1]).

Definice. Pohyb indukovaný ve V_n pohybem $g(t)$ z G nazývejme vektorovým pohybem přiřazeným pohybu $g(t)$.

Tečný vektor T trajektorie bodu $X \in A_n$ v bodě X je dán vztahem $T = [\mathbf{R}, X]$, tečný vektor U trajektorie vektoru $V \in V_n$ je dán vztahem $U = [\mathbf{R}, V]$ ([1]).

Je-li

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ \mathrm{R}_1, & \mathrm{R}_2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ \boldsymbol{x}, & -\varepsilon \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ \boldsymbol{v}, & 0 \end{pmatrix},$$

je

$$[\mathbf{R}, X] = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ \mathbf{R}_2\boldsymbol{x} + \mathbf{R}_1, & 0 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{R}, V] = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ \mathrm{R}_2\boldsymbol{v}, & 0 \end{pmatrix}.$$

Vektor $\mathbf{R} \in \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(n+1)$ operuje tedy dvojím způsobem jako lineární operátor:

$$\mathbf{R} : A_n \to V_n \quad \text{a to tak, že} \quad X \to [\mathbf{R}, X],$$
$$\mathbf{R} : V_n \to V_n \quad \text{a to tak, že} \quad V \to [\mathbf{R}, V].$$

Vlastnostmi tohoto operátoru se budeme nyní zabývat a ukážeme, že jimi jsou v podstatě dány též vlastnosti afinního pohybu.

3. INVARIANTNÍ PODPROSTORY AFINNÍHO POHYBU

Zvolme libovolný vektor

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ \mathrm{R}_1, & \mathrm{R}_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(n+1).$$

Charakteristický mnohočlen $\chi(\lambda) = \det |\mathrm{R}_2 - \lambda \mathrm{E}|$ matice R_2 je nezávislý na adjungovaném zobrazení z G a má tedy invariantní význam. Předpokládejme, že jeho nenulové kořeny jsou jednoduché. Nechť

$$\chi(\lambda) = \lambda^i \prod_{\mu=1}^{k} (\lambda - \lambda_\mu) \prod_{\nu=k+1}^{k+l} (\lambda^2 + a_\nu \lambda + b_\nu), \quad \text{kde} \quad i + k + 2l = n,$$

je jeho rozklad na ireducibilní faktory. Jednotlivým faktorům charakteristického mnohočlenu odpovídají ve V_n invariantní podprostory $\mathscr{V}_0, \mathscr{V}_\mu, \mathscr{V}_\nu$, $\mu = 1, \ldots, k$, $\nu = k + 1, \ldots, k + l$. Množinu $\{\mathscr{V}_\mu, \mathscr{V}_\nu\}$ invariantních podprostorů nenulových kořenů označme $\sum$.

Definice. Lineární soustavu $L_\alpha \subseteq A_n$ nazývejme α-invariantní lineární soustavou, krátce α-soustavou, jestliže platí

$$(2) \qquad [\mathbf{R}, L_\alpha] \subseteq \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0\,, \quad \text{kde} \quad \mathscr{V}_\alpha \in \sum \quad \text{nebo} \quad \mathscr{V}_\alpha = \{0\}$$

(tj. $[\mathbf{R}, L_\mu] \subseteq \mathscr{V}_\mu \oplus \mathscr{V}_0$ pro $\mu \geqq 1$, nebo $[\mathbf{R}, L_0] \subseteq \mathscr{V}_0$).

Věta 1. *Je-li $L_\alpha = A + \mathscr{W}$ α-soustava, kde $A \in A_n$ a $\mathscr{W} \subseteq V_n$, je*

$$(3) \qquad \mathscr{W} \subseteq \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0\,.$$

Důkaz. Nechť $L_\alpha = A + \mathscr{W}$ je α-soustava. Pak $[\mathbf{R}, A + \mathscr{W}] = [\mathbf{R}, A] + [\mathbf{R}, \mathscr{W}] = \mathsf{R}_1 + \mathsf{R}_2\boldsymbol{a} + \mathsf{R}_2\boldsymbol{w} \subseteq \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0$. Z toho plyne

$$(4) \qquad \mathsf{R}_1 + \mathsf{R}_2\boldsymbol{a} \in \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0\,.$$

Ze (4) máme $\mathsf{R}_2\boldsymbol{w} \subseteq \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0$.

Je-li i násobnost nulového kořene, platí pro $\boldsymbol{x} \in V_n$: Je-li $\mathsf{R}_2\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}_0$, je $\mathsf{R}_2^i(\mathsf{R}_2\boldsymbol{x}) = 0$, a tedy $\mathsf{R}_2^i\boldsymbol{x} = 0$, a tedy $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}_0$. Rozlišujme nyní dva případy:

a) Nechť $\mathscr{V}_\alpha = \{0\}$. Pak $\mathsf{R}_2\mathscr{W} \subseteq \mathscr{V}_0$, a tedy $\mathscr{W} \subseteq \mathscr{V}_0 = \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0$.

b) Nechť $\mathscr{V}_\alpha \in \sum$. Je-li $\boldsymbol{w} \in \mathscr{W}$, pak $\mathsf{R}_2\boldsymbol{w} \in \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0$.

$\mathsf{R}_2\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_\alpha + \boldsymbol{v}_0$, kde $\boldsymbol{v}_\alpha \in \mathscr{V}_\alpha$, $\boldsymbol{v}_0 \in \mathscr{V}_0$. $\boldsymbol{v}_\alpha = \mathsf{R}_2\boldsymbol{u}_\alpha$ pro nějaké $\boldsymbol{u}_\alpha$ z $\mathscr{V}_\alpha$. Pak ale $\mathsf{R}_2(\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}_\alpha) = \boldsymbol{v}_0 \in \mathscr{V}_0$, a tedy $\boldsymbol{w} - \boldsymbol{u}_\alpha \in \mathscr{V}_0$ a $\boldsymbol{w} \in \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0$, což jsme měli dokázat. Obrácená věta neplatí vzhledem k (4).

Větou 1 jsou popsány všechny α-soustavy. Nejdůležitější jsou samozřejmě ty, které jsou maximální, tj. nejsou částí jiné α-soustavy. Všimněme si tedy nyní vlastností těchto maximálních α-invariantních lineárních soustav (pišme krátce α^m-soustav).

Věta 2. Je-li L_α *α^m-soustava, je*

$$L_\alpha = A + \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0\,, \quad \textit{kde} \quad [\mathbf{R}, A] \in \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0\,.$$

Důkaz. Nechť $A + \mathscr{W} = L_\alpha$ je α-soustava a nechť je $\mathscr{W} \subset \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0$, (tj. $\mathscr{W} \neq \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0$). Pak $[\mathbf{R}, A + \mathscr{W}] \subseteq \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0$, a tedy $[\mathbf{R}, A] \in \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0$. Z toho plyne

$$[\mathbf{R}, A + \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0] = [\mathbf{R}, A] + [\mathbf{R}, \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0] = [\mathbf{R}, A] + \mathscr{V}_\alpha \subseteq \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0\,,$$

a tedy L_α není maximální.

Důsledek. α^m-soustavy mají dimensi i resp. i + 1 resp. i + 2, podle toho, je-li $\alpha = 0$ resp. odpovídá-li α reálnému nenulovému resp. imaginárnímu kořenu charakteristické rovnice matice R_2. Zabývejme se nyní existencí a jednoznačností α^m-soustav.

Lemma 1. *Ke každému α existuje bod $A \in A_n$ takový, že platí*

$$[\mathbf{R}, A] \in \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0 .$$

Důkaz. Buď $X \in A_n$ libovolný bod. Rozložme V_n na direktní součet $V_n = \mathscr{V}_\alpha \oplus \oplus \mathscr{V}_0 \oplus \mathscr{H}$, kde $\mathscr{H}$ je direktní součet invariantních podprostorů, příslušných ostatním charakteristickým kořenům. Pak $[\mathbf{R}, X] = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$, kde $\boldsymbol{x}_1 \in \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0$, $\boldsymbol{x}_2 \in \mathscr{H}$. Je-li $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ libovolný vektor z V_n, kde opět $\boldsymbol{v}_1 \in \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0$, $\boldsymbol{v}_2 \in \mathscr{H}$, platí $[\mathbf{R}, X + \boldsymbol{v}] = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + R_2\boldsymbol{v}_1 + R_2\boldsymbol{v}_2$. Jelikož R_2 působí v $\mathscr{H}$ jako automorfizmus, lze vybrat $\boldsymbol{v}_2$ tak, aby $R_2\boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{x}_2$. Pak ale $[\mathbf{R}, X + \boldsymbol{v}] = \boldsymbol{x}_1 + R_2\boldsymbol{v}_1 \in \in \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0$, což jsme měli dokázat.

Lemma 2. *Buďte L a M dvě α^m-soustavy. Pak $L = M$.*

Důkaz. Nechť $L = A + \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0$, $M = B + \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0$. Pak $[\mathbf{R}, A] \in \mathscr{V}_\alpha \oplus \oplus \mathscr{V}_0$, $[\mathbf{R}, B] \in \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0$, a tedy $[\mathbf{R}, A - B] \in \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0$. Označme $A - B = \boldsymbol{v}$. Pak $[\mathbf{R}, \boldsymbol{v}] = \boldsymbol{v}_\alpha + \boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{v}_\alpha \in \mathscr{V}_\alpha$, $\boldsymbol{v}_0 \in \mathscr{V}_0$. Jelikož $\boldsymbol{v}_\alpha \in \mathscr{V}_\alpha$, existuje $\boldsymbol{u} \in \mathscr{V}_\alpha$ takový, že $R_2\boldsymbol{u} = [\mathbf{R}, \boldsymbol{u}] = \boldsymbol{v}_\alpha$. Pak ale platí $[\mathbf{R}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}] = \boldsymbol{v}_0 \in \mathscr{V}_0$, a tedy $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \in \mathscr{V}_0$ a $\boldsymbol{v} \in \in \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0$, čímž je důkaz proveden. Důsledkem obou lemmat je

Věta 3. *Ke každému α existuje právě jedna α^m-soustava.*

Věta 4. *Buď L_α α^m-soustava, L_β β^m-soustava a nechť $\alpha \neq \beta$. Pak $L_\alpha \cap L_\beta = L_0$.*

Důkaz. Nejdříve ukážeme, že každá α^m-soustava obsahuje 0^m-soustavu. Skutečně, nechť $A \in L_0$. Pak $[\mathbf{R}, A] \in \mathscr{V}_0 \subseteq \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0$, a tedy A leží v α^m-soustavě. Obráceně nechť $A \in L_\alpha \cap L_\beta$ pro $\alpha \neq \beta$. Pak $[\mathbf{R}, A] \in \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0$, $[\mathbf{R}, A] \in \mathscr{V}_\beta \oplus \mathscr{V}_0$, a tedy $[\mathbf{R}, A] \in \mathscr{V}_0$. Z toho plyne $A \in L_0$.

4. POPIS AFINNÍHO POHYBU

Nechť nyní $\mathbf{R}(t)$ resp. $\bar{\mathbf{R}}(t)$ je pevný resp. hybný řídicí kužel afinního pohybu $g(t)$ z G. Pak platí ([1])

$$\mathbf{R}(t) = \operatorname{ad} g(t)\, \bar{\mathbf{R}}(t) . \tag{5}$$

Z (5) plyne, že charakteristické rovnice operátorů R_2 a $\bar{R}_2$ jsou stejné pro každé t a mají tedy touž množinu kořenů. Ukažme, jak souvisejí α^m-soustavy operátorů $\mathbf{R}$ a $\bar{\mathbf{R}}$, příslušné témuž α.

Věta 5. *Při vektorovém pohybu ve V_n, přiřazeném pohybu $g(t)$, se postupně ztotožňují invariantní podprostory, neboli přesněji.*

Je-li $\mathscr{V}_\mu(\overline{\mathscr{V}}_\mu)$ invariantní podprostor operátoru $R_2(\overline{R}_2)$, příslušný kořenu λ_μ, platí

$$\mathrm{ad}g(t)\,\overline{\mathscr{V}}_\mu = \mathscr{V}_\mu\,.$$

Důkaz. Buďte $\mathscr{V}_\mu(\overline{\mathscr{V}}_\mu)$ invariantní podporostory kořenu λ_μ. Pak pro $v \in \overline{\mathscr{V}}_\mu$ platí

$$(a_0\mathrm{ad}^2\overline{\mathbf{R}} + a_1\mathrm{ad}\overline{\mathbf{R}} + a_2\mathrm{E})^k\, v = 0\,,$$

kde na levé straně je třeba vzít příslušný irreducibilní mnohočlen zobrazení $\mathrm{ad}\overline{\mathbf{R}}$, zúženého na V_n. Vzhledem k tomu, že pro všechna $X, Y \in \mathrm{gl}(n+1)$ platí

$$\mathrm{ad}g(t)\,((\mathrm{ad}^k X)\,Y) = (\mathrm{ad}^k(\mathrm{ad}g(t)\,X))\,(\mathrm{ad}g(t)\,Y)\,,$$

máme

$$(a_0\mathrm{ad}^2\mathbf{R} + a_1\mathrm{ad}\mathbf{R} + a_2\mathrm{E})^k\,(\mathrm{ad}g(t)\,v) = 0\,,$$

a tedy $\mathrm{ad}g(t)\,v \in \mathscr{V}_\mu$. Jelikož $\mathrm{ad}g(t)$ je automorfizmus, je tím věta dokázána. Afinní pohyb pak popisuje

Věta 6. *Při afinním pohybu se postupně ztotožňují α^m-soustavy, neboli přesněji: Buďte $L_\alpha(\overline{L}_\alpha)$ α^m-soustavy operátoru $\mathbf{R}(\overline{\mathbf{R}})$. Pak*

$$L_\alpha = \mathrm{ad}g(t)\,\overline{L}_\alpha\,.$$

Důkaz. Nechť $A \in \overline{L}_\alpha$. Pak $[\overline{\mathbf{R}}, A] \in \overline{\mathscr{V}}_\alpha \oplus \overline{\mathscr{V}}_0$, a tedy $[\mathbf{R}, \mathrm{ad}gA] \in \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0$ podle věty 5, a tedy $\mathrm{ad}g(t)\,A \in L_\alpha$. Máme tedy $\mathrm{ad}g(t)\,\overline{L}_\alpha \subseteq L_\alpha$ a opět vzhledem k regulárnosti zobrazení $\mathrm{ad}g$ je $\mathrm{ad}g(t)\,\overline{L}_\alpha = L_\alpha$.

Předpokládejme nyní, že všechna $L_\alpha(t)$ jsou diferencovatelně závislá na t na celém definičním intervalu. Označme $T_\alpha(X, t)$ tečný prostor α^m-soustavy $L_\alpha(t)$ v bodě X a podobně pro $\overline{L}_\alpha(t)$. Za uvedeného předpokladu platí

Věta 7. *Při afinním pohybu se postupně ztotožňují tečné prostory α^m-soustavy, tj.: Jsou-li $L_\alpha(\overline{L}_\alpha)$ α^m-soustavy pevného (hybného) řídicího kužele, je*

$$T_\alpha(X, t) = \mathrm{ad}g(t)\,\overline{T}_\alpha(\overline{X}, t)\,.$$

Důkaz. Předpokládejme, že t je kanonický parametr pohybu (z důkazu bude vidět, že to není podstatné). Nechť $\overline{X}(t) \in \overline{L}_\alpha(t)$ je diferencovatelná křivka. Pak

$$X(t) = \mathrm{ad}g(t)\,\overline{X}(t) \in L_\alpha(t) \tag{6}$$

a platí $\overline{X}(t)' \in \overline{T}_\alpha(\overline{X}, t)$, $X(t)' \in T_\alpha(X, t)$. Derivováním vztahu (6) dostaneme ([1]): $X(t)' = \mathrm{ad}g(t)\,(\overline{X}(t)') + \mathrm{ad}g(t)\,[\overline{\mathbf{R}}(t), \overline{X}(t)]$. Podle (5) a (6) máme $\mathrm{ad}g(t)\,(\overline{X}(t)') = X(t)' - [\mathbf{R}(t), X(t)]$. $[\mathbf{R}(t), X(t)] \in \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0 \subseteq T_\alpha(X, t)$, a tedy $\mathrm{ad}g(t)\,(\overline{X}(t)') \in T_\alpha(X, t)$ a z toho už snadno plyne tvrzení věty. Analogická věta platí pro přiřazený vektorový pohyb.

Na příkladě afinního pohybu s $\dim \mathscr{V}_0 = 0$ nebo s $\dim \mathscr{V}_0 = 1$ ukažme, že ve speciálních případech lze dokázat o něco silnější věty, než jsou věty odst. 3 a 4; na tomto příkladě bude rovněž patrné, že to v obecném případě nelze.

Je-li $\dim \mathscr{V}_0 = 0$ nebo $=1$, je hodnost $h(\mathsf{R}_2)$ operátoru R_2 rovna n nebo $n - 1$. Studujme tyto případy odděleně:

a) $h(\mathsf{R}_2) = n$. Pak $\mathscr{V}_0 = \{0\}$. 0^m-soustava má pak dimensi 0 a je dána rovnicí $[\mathbf{R}, A] = 0$. Křivka $A(t)$ se obvykle nazývá polodií (v tomto případě pevnou). Ostatní α^m-soustavy mají pak dimensi 1 pro reálný kořen a dimensi 2 pro imaginární kořen.

b) $h(\mathsf{R}_2) = n - 1$, $h(\mathsf{R}) = n$. Dimense $\mathscr{V}_0$ se rovná jedné. 0^m-soustava má tedy dimensi 1. Přímková plocha vytvořená 0^m-soustavami se nazývá axoidem (pevným). Ostatní α^m-soustavy mají dimensi 2 nebo 3.

c) $h(\mathsf{R}_2) = h(\mathbf{R}) = n - 1$. Platí samozřejmě totéž, co v případě b), neboť α^m-soustavy závisejí pouze na operátoru R_2, ale ukážeme, že v tomto případě lze α^m-soustavy nahradit α-soustavami o 1 menší dimense. Především dokažme

Lemma 3. *Pro 0^m-soustavu L_0 v případě c) platí*

$$[\mathbf{R}, L_0] = 0 .$$

Důkaz. Rovnice $[\mathbf{R}, X] = 0$ má pro $X \in A_n$ jednodimensionální řešení, označme je S. Jelikož $[\mathbf{R}, S] = 0 \in \mathscr{V}_0$, je S, vzhledem k dimensi S, 0^m-soustavou. Z jednoznačnosti α^m-soustav plyne $L_0 = S$.

Důsledek. Pro každou α-soustavu S_α v případě c) platí

$$[\mathbf{R}, S_\alpha] \subseteq \mathscr{V}_\alpha .$$

Důkaz. Buď L_α α^m-soustava, tj. $S_\alpha \subseteq L_\alpha$. Pak máme

$$[\mathbf{R}, S_\alpha] \subseteq [\mathbf{R}, L_\alpha] = [\mathbf{R}, A + \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0] = [\mathbf{R}, \mathscr{V}_\alpha \oplus \mathscr{V}_0] = \mathscr{V}_\alpha ,$$

zvolíme-li $A \in L_0$, což lze podle věty 4.

V každé α^m-soustavě existují tedy α-soustavy o jedničku menší dimense, pro které $[\mathbf{R}, S] = \mathscr{W}$, je-li $S = A + \mathscr{W}$ a jsou to právě soustavy $S_\alpha = A + \mathscr{V}_\alpha$, kde $A \in L_0$. Platí tedy následující

Tvrzení. *V případě c) prochází každým bodem 0^m-soustavy jediná α-soustava S_α, pro kterou $[\mathbf{R}, S_\alpha] = \mathscr{V}_\alpha$.*

Z konstrukce těchto soustav je vidět, že při pohybu se ztotožňují nejen soustavy L_α a $\bar{L}_\alpha$, ale i S_α a $\bar{S}_\alpha$ a jejich tečné prostory. Znamená to, že okamžitě pohyby se dějí v prostorech A_{n-1}, procházejících body 0^m-soustavy.

6. EUKLIDOVSKÝ POHYB V E_n

Za předpokladů z odst. 5 o hodnosti operátoru $\mathbf{R}$ najděme soustavy L_α a S_α euklidovského pohybu v E_n.

a) Nechť dimense E_n je sudá. Pak $h(R_2) = n$, neboť R_2 je antisymetrická matice. V tomto případě tedy množina α^m-soustav je dána křivkou (polodií), jejímž každým bodem procházejí $n/2$ invariantní podprostory dimense 2, které jsou totálně kolmé, neboť jejich zaměření jsou invariantní podprostory antisymetrického zobrazení R_2.

b) Dimense E_n lichá, $h(R_2) = n - 1$, $h(\mathbf{R}) = n$. Maximální invariantní podprostory jsou dány přímkovou plochou (axoidem) a $(n - 1)/2$ invariantními podprostory dimense 3 k sobě kolmými.

c) Dimense E_n lichá, $h(R_2) = h(\mathbf{R}) = n - 1$. Maximální invariantní podprostory jsou tytéž, jako v případě b). Každým bodem 0^m-soustavy procházejí $(n - 1)/2$ invariantní podprostory dimense 2, které jsou opět totálně kolmé.

Okamžité pohyby pak zřejmě jsou tyto:

a) Rotace kolem bodu polodie.

b) Šroubový pohyb kolem přímky axoidu.

c) Rotace kolem přímky axoidu.

Z uvedeného je rovněž vidět jak by se našly α^m-soustavy v případě euklidovského pohybu s $h(R_2) < n - 1$, neboť normální tvary antisymetrických matic jsou velmi jednoduché.

Seznam literatury

[1] *A. Karger:* Lieovy grupy a kinematická geometrie v rovině. Čas. pro pěst. mat. *93* (1968) str. 186—200.

[2] *W. Clifford* a *J. Mc. Mahon:* Rolling of one curve or surface upon another. Amer. Math. Monthly *68* (1961), 338—341.

Adresa autora: Praha 2, Horská 4 (České vysoké učení technické).

Zusamenfassung

POHLFLÄCHEN DER ALLGEMEINEN AFFINEN BEWEGUNG

ADOLF KARGER, Praha

Die Arbeit knüpft an den Artikel ([1]) des Autors an und es ist eine Verallgemeinerrung der Arbeit von Clifford-Mahon ([2]). In der Arbeit wird gezeigt, daß die einparametrige affine Bewegung in A_n durch die Identifizierung der invarianten Unterräume

des Operators, der durch den Richtkegel definiert wird, erfolgt. Dabei werden auch die Tangentialräume dieser invarianten Unterräume identifiziert.

In dem Absatz 5 sind diese Unterräume für die Bewegung mit dem maximalen Rang bzw. mit dem Rang um Eins kleiner gefunden. In dem Absatz 6 wird es gezeigt, daß man in dem Falle der euklidischen Bewegung in E_n nicht nur die bekannten Figuren (Polbahnkurven, Polflächen) sondern auch die weiteren invarianten Unterräume bekommt, die den nichttrivialen Sinn natürlich erst bei der Dimension Dim $E_n > 3$ haben.