Bohdan Zelinka

Nespočetné systémy hranově disjunktních cest v grafu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 93 (1968), No. 3, 251--255

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117614`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 93 * PRAHA 8. 8. 1968 * ČÍSLO 3

NESPOČETNÉ SYSTÉMY HRANOVĚ DISJUNKTNÍCH CEST V GRAFU

BOHDAN ZELINKA, Liberec

(Došlo dne 20. září 1966)

Je známa tato věta:

Jsou-li a, b dva uzly grafu G a existuje-li systém δ cest z a do b, kde δ je přirozené číslo, a žádné dvě z cest tohoto systému nemají společnou hranu, existuje systém δ cest z a do b, z nichž žádné dvě nemají společnou hranu a společné uzly libovolných dvou cest se vyskytují ve stejném pořadí, jdeme-li od a do b po obou cestách.

G. A. DIRAC [1] položil otázku, zda tato věta platí i v případě, kdy δ je nekonečné kardinální číslo. V práci [2] je ukázáno, že pro $\delta = \aleph_0$ věta neplatí. Zde budeme vyšetřovat další nekonečná kardinální čísla. Všude předpokládáme platnost axiomu výběru a z něho vyplývající existenci dobrého uspořádání kardinálních čísel.

Věta 1. *Budiž $\mathfrak{d}$ regulární kardinální číslo různé od $\aleph_0$. Jsou-li a, b dva uzly grafu G a existuje-li systém $\mathfrak{d}$ cest z a do b a žádné dvě cesty tohoto systému nemají společnou hranu, existuje systém $\mathfrak{d}$ cest z a do b, z nichž žádné dvě nemají společnou hranu a společné uzly libovolných dvou cest se vyskytují ve stejném pořadí, jdeme-li od a do b po obou cestách.*

Důkaz. Budiž G graf, a, b dva jeho uzly a nechť existuje systém $\mathscr{C}$ cest z a do b, z nichž žádné dvě nemají společnou hranu a nechť card $\mathscr{C} = \mathfrak{d}$, kde $\mathfrak{d}$ je regulární kardinální číslo různé od $\aleph_0$. Délka každé cesty je konečná. Označme $\mathscr{C}_n$ pro každé přirozené n podsystém systému $\mathscr{C}$ složený ze všech cest délky n. Zřejmě $\mathscr{C}_m \cap \mathscr{C}_n = \emptyset$ pro $m \neq n$ a $\mathscr{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{C}_n$, tedy card $\mathscr{C} = \sum_{n=1}^{\infty}$ card $\mathscr{C}_n$. Kdyby bylo card $\mathscr{C}_n < \mathfrak{d}$ pro všechna přirozená n, bylo by card $\mathscr{C} < \mathfrak{d}$, protože $\mathfrak{d}$ je regulární a větší než $\aleph_0$; došli bychom tedy ke sporu. Existuje tedy alespoň jedno přirozené číslo p takové, že card $\mathscr{C}_p = \mathfrak{d}$.

Budeme nyní sestrojovat posloupnost systémů cest $\{\mathscr{S}_k\}$, posloupnost cest $\{D_k\}$ a posloupnost uspořádaných množin uzlů $\{M_k\}$. Položíme $\mathscr{S}_0 = \mathscr{C}_p$, $M_0 = \emptyset$.

Další členy posloupností definujeme rekurentně. Mějme definován systém cest $\mathscr{S}_{l-1}$ a uspořádanou množinu uzlů M_{l-1} pro $l \geqq 1$. O systému $\mathscr{S}_{l-1}$ předpokládejme, že má mohutnost $\mathfrak{d}$ (pro $\mathscr{S}_0$ to platí podle výše uvedeného). Vezmeme-li libovolné dvě cesty C, C' z $\mathscr{S}_{l-1}$, pak $K_c(C')$ bude značit množinu společných uzlů cest C a C' (s výjimkou a a b) uspořádanou podle toho, v jakém pořadí se vyskytují její prvky, jdeme-li po cestě C' z a do b. Předpokládejme, že pro každé dvě cesty C, C' z $\mathscr{S}_{l-1}$ je $K_c(C') \supset M_{l-1}$. (Pro M_0 to zřejmě platí.) Přitom je-li dána cesta C, počet navzájem různých množin $K_c(C')$ je zřejmě konečný. Poněvadž $\mathscr{S}_{l-1}$ je množina mohutnosti $\mathfrak{d}$, existuje alespoň jedna uspořádaná množina $L \supset M_{l-1}$ taková, že $K_c(C') = L$ pro $\mathfrak{d}$ různých cest C' z $\mathscr{S}_{l-1}$. Zvolme takovou cestu D_{l-1}, že existuje vlastní uspořádaná nadmnožina M_l množiny M_{l-1} tak, že $K_{D_{l-1}}(C') = M_l$ pro $\mathfrak{d}$ cest C' z $\mathscr{S}_{l-1}$ (pokud taková cesta existuje). Systém cest C' z $\mathscr{S}_{l-1}$, pro které $K_{D_{l-1}}(C') = M_l$, označíme $\mathscr{S}_l$. Neexistuje-li cesta D_{l-1}, která by splňovala podmínku, není M_l ani $\mathscr{S}_l$ definováno. Z definice vyplývá, že M_k (pokud je definována) je vlastní uspořádanou nadmnožinou množiny M_l a $\mathscr{S}_k$ je podsystémem $\mathscr{S}_l$ pro $k < l$. Vidíme také, že systém $\mathscr{S}_l$ takto sestrojený má opět mohutnost $\mathfrak{d}$ a že $M_l \subset K_c(C')$ pro libovolné dvě cesty C, C' z $\mathscr{S}_l$, platí to tedy pro všechna l. Protože však všechny cesty systému $\mathscr{S}_0$ mají délku p, je mohutnost každé z množin M_k nejvýše $p - 1$ a tedy posloupnost $\{M_k\}$ nemůže mít více než p členů. Totéž platí ovšem i o posloupnosti $\{\mathscr{S}_k\}$. Existuje tedy takové přirozené číslo $m \leqq p$, že k žádné cestě $C \in \mathscr{S}_m$ neexistuje $\mathfrak{d}$ cest C' takových, že $K_c(C')$ je vlastní nadmnožinou množiny M_m. Je-li C cesta z $\mathscr{S}_m$, budiž $\mathscr{P}(C)$ systém cest C' z $\mathscr{S}_m$ takových, že $K_c(C')$ je vlastní nadmnožinou M_m. Sestrojíme nyní transfinitní posloupnost cest $\{C_\iota\}$. Cesta C_0 je libovolně zvolená cesta z $\mathscr{S}_m$. Máme-li sestrojeny cesty $C_\varkappa$ pro $\varkappa < \iota$, zvolíme za C_ι libovolnou cestu ze systému $\mathscr{S}_m \dot{-} \bigcup_{\varkappa < \iota} \mathscr{P}(C_\varkappa)$. Pokračujeme takto tak dlouho, dokud $\mathscr{S}_m \dot{-} \bigcup_{\varkappa < \iota} \mathscr{P}(C_\varkappa) \neq \emptyset$. Je-li λ ordinální číslo naší posloupnosti, dokážeme, že card $\lambda = \mathfrak{d}$. Zřejmě $\mathscr{S}_m \dot{-} \bigcup_{\varkappa < \lambda} \mathscr{P}(C_\varkappa) = \emptyset$, tedy, poněvadž $\mathscr{P}(C_\varkappa) \subset \mathscr{S}_m$ podle definice, $\mathscr{S}_m = \bigcup_{\iota < \lambda} \mathscr{P}(C_\iota)$. Podle definice čísla m je card $\mathscr{P}(C_\iota) < \mathfrak{d}$ pro všechna $\iota < \lambda$. Kdyby bylo card $\lambda < \mathfrak{d}$, bylo by card $\mathscr{S}_m < \mathfrak{d}$, protože $\mathfrak{d}$ je nespočetné regulární kardinální číslo. Posloupnost $\{C_\iota\}_{\iota < \lambda}$ má tedy mohutnost $\mathfrak{d}$. Přitom pro každé dvě cesty $C_\iota, C_\varkappa$ z této posloupnosti je $K_{c_\iota}(C_\varkappa) = M_m$ a ovšem i $K_{c_\varkappa}(C_\iota) = M_m$. Tedy posloupnost $\{C_\iota\}_{\iota < \lambda}$ je hledaným systémem cest.

Dokážeme nyní, že věta neplatí obecně pro singulární $\mathfrak{d}$. Budiž $\mathfrak{d}$ kardinální číslo takové, že $\mathfrak{d} = \sum_{i < \omega_0} \mathfrak{d}_i$ kde $\mathfrak{d}_i < \mathfrak{d}$ pro všechna $i < \omega_0$. V [2] byl sestrojen graf G_∞ obsahující systém $\mathscr{C} = \{C_1, C_2, \ldots\}$ mohutnosti $\aleph_0$ cest z uzlu a do uzlu b, z nichž žádné dvě nemají společnou hranu; přitom však v každém takovémto systému existují dvojice cest takové, že některé jejich společné uzly se vyskytují v různém pořadí, jdeme-li podél obou těchto cest z a do b. Sestrojíme z grafu G_∞ graf $\hat{G}$ následujícím způsobem. Budiž $\mathscr{C} = \{C_1, C_2, \ldots\}$ systém $\aleph_0$ hranově disjunktních cest v G_∞. Je-li h hrana cesty C_n, kde n je přirozené číslo, a x, y její koncové uzly, přidáme ke grafu G_∞ systém $Z(h)$ uzlů mohutnosti $\mathfrak{d}_n$ a každý z uzlů tohoto systému spojíme s uzly x a y. Pro různé hrany h bereme systémy $Z(h)$ disjunktní a neobsahující uzly grafu G_∞. Toto provedeme pro hrany všech cest systému C.

Mějme nyní cestu D grafu $\hat{G}$. Každý úsek této cesty sestávající z uzlů x, z, y kde x a y jsou uzly grafu G_∞ spojené hranou h v G_∞ a $z \in Z(h)$, nahradíme hranou h; výslednou cestu (která leží v G_∞) označme D^x. Zřejmě pro každou z cest C_i, $i = 1, 2, \ldots$, existuje systém $\mathscr{D}_i$ sestávající z $\mathfrak{d}_i$ cest takových, že $D^x = C_i$ pro každé $D \in \mathscr{D}_i$ a žádné dvě cesty z $\mathscr{D}_i$ nemají společnou hranu. Snadno bychom též ukázali, že je-li $D' \in \mathscr{D}_i$, $D'' \in \mathscr{D}_j$, $i \neq j$, pak D' a D'' nemají společnou hranu. Potom systém $\mathscr{D} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathscr{D}_i$ obsahuje celkem $\mathfrak{d}$ cest z a do b, z nichž žádné dvě nemají společnou hranu. Obecně ke každé cestě C z a do b v G_∞ maximální možný počet cest z a do b v $\hat{G}$ takových, že žádné dvě z těchto cest nemají společnou hranu a pro každou cestu D z těchto cest platí $D^x = C$, je $\mathfrak{d}_n$, kde n je nejmenší přirozené číslo takové, že C má společnou hranu s cestou $C_n \in \mathscr{C}$. (Graf G_∞ je sestrojen tak, že každá cesta z a do b má společnou hranu s některou z cest systému $\mathscr{C}$.) Předpokládejme nyní, že existuje v $\hat{G}$ systém $\mathscr{E}$ sestávající z $\mathfrak{d}$ cest z a do b takových, že žádné dvě z těchto cest nemají společnou hranu a společné uzly kterýchkoliv dvou z těchto cest se vždy vyskytují v témž pořadí, jdeme-li podél obou těchto cest z a do b. Budiž $\mathscr{F}$ systém cest E^x pro všechna $E \in \mathscr{E}$; všechny tyto cesty leží ovšem v G_∞. Definujme nyní rekurentně cesty F_i pro $i = 1, 2, \ldots$ a systémy cest $\mathscr{E}_i, \bar{\mathscr{E}}_i$ pro $i = 0, 1, 2, \ldots$ Položíme $\mathscr{E}_0 = \emptyset$. Předpokládejme nyní, že máme dán systém $\mathscr{E}_i \subset \mathscr{E}$ mohutnosti $\mathfrak{d}_{n_i}$ kde n_i je přirozené číslo. Označíme $\bar{\mathscr{E}}_i = \mathscr{E} \dot{-} \mathscr{E}_i$, tento systém má zřejmě nohutnost $\mathfrak{d}$. Dále $\mathscr{F}_i$ bude systém všech E^x pro $E \in \bar{\mathscr{E}}_i$. V $\mathscr{E}_i$ vyberme libovolnou cestu E_i a budiž $F_i = E_i^x$, je $F_i \in \mathscr{F}_i$. Budiž $\mathscr{E}_{i+1}$ systém cest z $\bar{\mathscr{E}}_i$ takových, že pro $E \in \mathscr{E}_{i+1}$ cesta E^x má společnou hranu s F_i. Tento systém zřejmě má mohutnost nejvýše $\mathfrak{d}_{n_{i+1}}$, kde n_{i+1} je největší přirozené číslo takové, že F_i má společnou hranu s $C_{n_{i+1}}$. Při této konstrukci je mohutnost $\mathscr{E}_i$ pro každé celé nezáporné i menší než $\mathfrak{d}$, tedy mohutnost $\bar{\mathscr{E}}_i$ je rovna $\mathfrak{d}$. Pro cesty F_i takto definované zřejmě platí, že F_i nemá společnou hranu se žádnou z cest E^x, kde $E \in \mathscr{E}_j$ pro $j > i$, přitom $F_i \in \bar{\mathscr{E}}_i$. Všechny množiny $\mathscr{E}_i$ jsou neprázdné, lze tedy zvolit F_i pro každé i. Označme $\mathscr{F}^* = \{F_1, F_2, \ldots\}$. Systém $\mathscr{F}^*$ má mohutnost $\aleph_0$, každá z jeho cest spojuje a a b a společné uzly libovolných dvou z nich se vyskytují v témž pořadí, jdeme-li podél obou z a do b, neboť tato vlastnost se zachovává při přechodu od E k E^x. Rovněž žádné dvě z těchto cest nemají společnou hranu. To je ovšem spor s tvrzením dokázaným v [2], že v G_∞ systém těchto vlastností neexistuje.

Otevřeným problémem zůstává, platí-li věta pro singulární $\mathfrak{d}$ takové, které není součtem spočetně mnoha kardinálních čísel menších než $\mathfrak{d}$.

Věta 2. *Budiž $\mathfrak{d}$ libovolné kardinální číslo. Jsou-li a, b dva uzly grafu G a existuje-li systém $\mathfrak{d}$ cest z a do b, jehož žádné dvě cesty nemají společnou hranu, a $\mathfrak{e} < \mathfrak{d}$,* *existuje systém $\mathfrak{e}$ cest z a do b, z nichž žádné dvě nemají společnou hranu a společné uzly libovolných dvou cest se vyskytují ve stejném pořadí, jdeme-li od a do b po obou cestách.*

Důkaz. Systém $\mathfrak{d}$ cest obsahuje podsystém mohutnosti $\mathfrak{e}$. Je-li $\mathfrak{e}$ konečné, věta zřejmě platí. Je-lí $\mathfrak{e} = \aleph_\alpha$, pak z $\aleph_\alpha < \mathfrak{d}$ plyne $\aleph_{\alpha+1} \leqq \mathfrak{d}_1$ existuje tedy systém $\aleph_{\alpha+1}$ cest splňujících tvrzení věty a tento systém obsahuje podsystém mohutnosti $\aleph_\alpha$.

Věta 3. *Jsou-li a, b dva uzly grafu G a existuje-li systém $\aleph_0$ cest z a do b, z nichž žádné dvě nemají společnou hranu a délka žádné z nich nepřevyšuje přirozené číslo p, existuje systém $\aleph_0$ cest z a do b, z nichž žádné dvě nemají společnou hranu a společné uzly libovolných dvou cest systému se vyskytují ve stejném pořadí, jdeme-li od a do b po obou cestách.*

Důkaz je obdobný jako u věty 1. Za $\mathscr{S}_0$ bereme celý systém uvedený v podmínce věty. Posloupnost $\{C_\iota\}_{\iota<\lambda}$ musí být nekonečná, protože každé $\mathscr{P}(C_\iota) < \aleph_0$, tedy je konečné.

Hypotéza. *Budiž $\mathfrak{d}$ kardinální číslo. Jsou-li a, b dva uzly grafu G a existuje-li systém $\mathfrak{d}$ cest z a do b, z nichž žádné dvě nemají společnou hranu a délka žádné z nich nepřevyšuje dané přirozené číslo p, existuje systém $\mathfrak{d}$ cest z a do b, z nichž žádné dvě nemají společnou hranu a společné uzly libovolných dvou cest systému se vyskytují ve stejném pořadí, jdeme-li od a do b po obou cestách.*

Literatura

[1] Theory of Graphs and Its Applications. Proceedings of the Symposium held in Smolenice in June 1963. Praha 1964.
[2] *B. Zelinka:* Poznámka o nekonečných hranově disjunktních systémech cest v grafu. Čas. pěst. mat. *92* (1967), 289–293.

Adresa autora: Liberec, Studentská 5 (Vysoká škola strojní a textilní).

Summary

UNCOUNTABLE SYSTEMS OF EDGE-DISJOINT PATHS IN A GRAPH

BOHDAN ZELINKA, Liberec

A well-known theorem of the theory of graphs affirms:

Let two different vertices a and b of a graph be connected by δ paths (δ is a positive integer), each of which has a and b as its end vertices and none two of which have an

edge in common. Then a and b are connected by δ paths such that each of them has a and b as its end vertices, none two of them have an edge in common and common vertices of arbitrary two paths occur always in the same order while going from a to b.

In this paper the problem whether this theorem is also true for uncountable systems of paths is studied. The proof is given that this theorem is true for regular cardinals different from $\aleph_0$ and that it is not true for such cardinals which are the sums of $\aleph_0$ cardinals smaller than they. It is true also when the lengths of the paths are bounded and their number is $\aleph_0$. There is also proved that from the existence of the system satisfying the assumption with an arbitrary cardinality the existence of the system satisfying the assertion with an arbitrary smaller cardinality follows.

The study of these properties of graphs was suggested by G. A. Dirac.