

## Úlohy a problémy

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 92 (1967), No. 4, 476--477

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/117613>

### Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1967

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ÚLOHY A PROBLÉMY

2. Nechť  $A_n(r \times r)$ ,  $b_n(r \times 1)$ ,  $r \geq 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$  jsou lebesgueovsky integrovatelné matice na  $I = \langle 0, 1 \rangle$ . Nechť

1°  $A_n \rightarrow 0$ ,  $b_n \rightarrow 0$  asymptoticky na  $I$ .

2°  $A_n \geq 0$ ,  $b_n \geq 0$  na  $I$ .

Nechť  $\varphi_n$  je řešení rovnice

$$(\mathcal{E}_n) \quad x(t) = 1 + \int_0^t (A_n x + b_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

na  $I$ . (Takové řešení existuje právě jedno.)

Rozhodněte, zda platí následující věta:

$\varphi_n \rightarrow 1$  stejnoměrně na  $I$ , právě když funkce  $\int_0^t A_n$ ,  $\int_0^t b_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  jsou stejně absolutně spojité na  $I$ .

Poznámka. Pro  $r = 1$  věta platí. Je totiž

$$(*) \quad \varphi_n(t) = \exp \int_0^t A_n \left( 1 + \int_0^t b_n(s) \exp \left( - \int_0^s A_n \right) \right)$$

a z Lebesgue-Vitaliho věty snadno plyne, že podmínka je postačující. Nechť obráceně  $\varphi_n \rightarrow 1$  stejnoměrně na  $I$ . Protože

$$\varphi_n(t) \geq \exp \int_0^t A_n \geq 1, \quad \text{je} \quad \lim \int_0^1 A_n = 0 = \int_0^1 0,$$

tedy podle Lebesgue-Vitaliho věty  $\int_0^t A_n$  jsou stejně absolutně spojité na  $I$ . Z(\*) nyní vyplývá, že  $\int_0^t b_n(s) \exp(-\int_0^s A_n)$  stejnoměrně na  $I$ . Buď  $B_n(t) = \int_0^t b_n$ ,  $t \in I$ ; pak  $\int_0^t b_n(s) \exp(-\int_0^s A_n) = B_n(t) \exp(-\int_0^t A_n) + \int_0^t B_n(s) A_n(s) \exp(-\int_0^s A_n) \geq B_n(t) \exp(-\int_0^t A_n)$ . Je tedy  $\lim B_n(1) = 0 = \int_0^1 0$ , a výsledek plyne zase z Lebesgue-Vitaliho věty.

Karel Karták, Praha

**Řešení úlohy č. 1** (autor J. Mařík) z roč. 81 (1956), str. 247:

*Úloha: Dokažte bez použití teorie Lebesgueova integrálu tuto větu: Budte  $f, g$  konečné funkce v intervalu  $(0,1)$ ; funkce  $g$  nechť je spojitá, funkce  $f$  nechť má primitivní funkci a nechť je nezáporná. Potom funkce  $fg$  má primitivní funkci.*

*Řešení.* Všechny uvažované funkce jsou definovány na  $\langle 0,1 \rangle$  a jsou konečné. Řekneme, že  $f \in \mathcal{N}$ , jestliže existuje  $F$  tak, že  $F' = f$ , přičemž derivace na hranici

$\langle 0, 1 \rangle$  jsou jednostranné. Necht'  $F(t) = \int_0^t f$ ; pak  $F$  je neklesající, tedy pro každou spojitou  $g$  existuje Riemann-Stieltjesův integrál  $H(t) = \int_0^t g dF$ . Avšak jest např.  $\int_t^{t+h} g dF \leq \max \{g(u); u \in \langle t, t+h \rangle\} [F(t+h) - F(t)]$ , z čehož už lehce plyne, že  $H'(t) = f(t)g(t)$ ,  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ , takže  $fg \in \mathcal{N}$ .

**Řešení úlohy č. 10** (autor J. Mařík) z roč. 82 (1957) str. 454.

*Úloha: Bud'  $\mathfrak{M}$  nespočetný systém částí intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ , z nichž každá má kladnou vnější míru. Rozhodněte, zda existuje bod  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ , který leží v nekonečně mnoha množinách ze systému  $\mathfrak{M}$ .*

Odověď je záporná, jak vyplývá z článku N. Luzin, W. Sierpiński: Sur une décomposition d'un intervalle en une infinité non-dénombrable d'ensembles non-mesurables, C.r. Acad. Sci Paris, 165 (1917), str. 422–424.

Karel Karták, Praha