# RECENSE

*L. Auslander, R. E. MacKenzie:* INTRODUCTION TO DIFFERENTIABLE MANIFOLDS. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York—San Francisco—Toronto—London 1963. Stran 219, cena $ 9,95.

Popišme nejprve obsah knihy.

Kap. 1. *Euklidovská, afinní a diferencovatelná struktura na* $R^n$. Toto je zcela úvodní kapitola, zaměřená na podání definice diferencovatelných funkcí na $R^n$, zobrazení a vyjasnění struktury grupy afinit a isometrií. Výklad je však podán tak, aby $R^n$ se stal příkladem obecné variety.

Kap. 2. *Diferencovatelné variety.* Vychází se od příkladu variety v $E^n$, dané systémem rovnic (k tomu účelu se dokazuje věta o implicitních funkcích), potom se provede obecná definice variety pomocí pokrytí souřadnicovými okolími. Studují se tečné a kotečné prostory variety, zobrazení a jejich diferenciály.

Kap. 3. *Projektivní prostory a projektivní algebraické variety.* Je ukázána přesná (ale zcela názorná) definice reálného i komplexního projektivního prostoru. Výklad končí důkazem faktu, že projektivní algebraická varieta je kompaktní topologický prostor a v nesingulárním případě na ní může být zavedena diferencovatelná struktura.

Kap. 4. *Tečný fibrovaný prostor* (= bundle) *diferencovatelné variety.* Jsou podány elementární vlastnosti vektorových polí, toků (= flows) a 1-forem na varietě.

Kap. 5. *Podvariety a Riemannovy metriky.* Definuje se pojem podvariety (přesně se ukazuje, že na anuloidu $M$ existují podvariety dimense 1, které jsou všude husté v $M$) a součinu dvou variet. Po zavedení definice Riemannovy metriky se ukazuje, že tuto metriku je možno zavésti na každé varietě.

Kap. 6. *Whitneyova vnořovací věta.* Celá kapitola je věnována důkazu uvedené věty (pro obecně nekompaktní případ).

Kap. 7. *Lieovy grupy a jejich jednoparametrické podgrupy.* Po obecné definici Lieovy grupy se přechází k podrobnému studiu plné lineární grupy. Pro tuto grupu se definuje exponenciální zobrazení a studuje se globální chování jejích jednoparametrických podgrup. Pro obecnou Lieovu grupu jsou podány jen definice zleva invariantních polí a exp.

Kap. 8. *Integrální variety a Lieovy podgrupy.* Je dokázána věta o integrovatelnosti uzavřeného $p$-vektorového pole na varietě včetně existence maximálních integrálních variet. V průběhu důkazu se užívá pojmu Lieovy derivace vektorového pole a také teprve zde je zaveden pojem Poissonovy závorky dvou vektorových polí. Předchozí je aplikováno na Lieovy grupy. Nejprve se definuje Lieova algebra Lieovy grupy a dokazuje se existence podgrupy k dané Lieově podalgebře.

Kap. 9. *Fibrované prostory.* Definice se podává pomocí souřadnicových fibrovaných prostorů. Jako příklad jsou uvedeny homogenní prostory (s důkazem existence diferencovatelné struktury). Kapitola končí definicí redukce a vektorově fibrovaných prostorů (= vector bundles), pro něž jsou udány universální prostory.

Kap. 10. *Multilineární algebra.* V této kapitole jsou shrnuty všechny potřebné algebraické pojmy: tensorový součin, symetrisace, alternace, vnější algebra. Závěrem je uvedena definice vnějších forem na varietě a jejich vnějšího diferenciálu.

Jak je viděti z obsahu, kniha jest úvodním textem. Snahou autorů je, aby čtenář nebyl ani tak seznámen s mnoha fakty, ale předložené látce dokonale porozuměl a příslušné úvahy mu nečinily nejmenších obtíží. Výklad je proto naprosto neformální a vše se ilustruje na příkladech, pokud ovšem příklad již dříve nemotivuje zavedení různých definic. S vyjímkou kap. 9 je ke každé kapitole připojena řada cvičení, která nejsou obtížná. Není mi zcela jasné, nakolik je vhodné začínati prostorem $R^n$ jako příkladem pro pozdější definici diferencovatelné variety: přirozené splývání tečných prostorů k $R^n$ s jeho vektorovým zaměřením jest vlastně již konexí na $R^n$ a tak $R^n$ nese na sobě další strukturu.

Domnívám se, že obsah recensované knihy by měl (při nejmenším!) znáti každý posluchač specialisace mat. analysa, ovšem doplněný některými dalšími fakty (např. teorie integrace na varietě, de Rhamova věta, komplexní variety).

*Alois Švec*, Praha

*S. Lang:* INTRODUCTION TO DIFFERENTIABLE MANIFOLDS. Interscience Publishers, John Wiley & Sons, Inc., New York—London 1962. Stran 126, cena $ 7,00.

V diferenciální topologii se studují homotopické třídy zobrazení, diferencovatelné struktury na topologických varietách, atd. V diferenciální geometrii se na diferencovatelné varietě uvažuje další struktura (vektorové pole, vnější forma, tensorové pole, Riemannova metrika) a studují se vlastnosti této struktury nebo struktur z ní vytvořených. Konečně v teorii diferenciálních rovnic se studují vektorová pole a jejich integrální křivky, singulární body, stabilita řešení. Existuje řada pojmů, společných těmto třem oblastem; Langova kniha si klade za úkol tyto pojmy vyložiti.

Pojem diferencovatelné variety je v knize zcela obecný, neboť se uvažují nekonečně dimensionální variety modelované z Banachových nebo Hilbertových prostorů místo obvyklých konečně dimensionálních vektorových prostorů. Nekonečně dimensionální přístup není o mnoho složitější. V teorii diferenciálních forem je např. možno vystačiti s pojmem multilineárního spojitého zobrazení. Nekonečně dimensionální variety jsou velmi užitečné právě v diferenciální topologii (Morseova teorie). Také se ukazuje plodným (Eells) zaváděti strukturu variety do množiny diferencovatelných zobrazení jedné konečně dimensionální diferencovatelné variety do druhé. Obsah knihy je následující:

Kap. I. *Diferenciální počet.* Kniha v podstatě navazuje na Dieudonné, Differential Calculus, kap. VIII. Zde se začíná výkladem topologických vektorových prostorů, všechny další úvahy se omezují na Banachovy prostory. Definují se derivace zobrazení jednoho Banachova prostoru do druhého, integrály a dokazuje se Taylorova formule a věta o inversních funkcích.

Kap. II. *Variety.* Definice variety je podána celkem obvyklým způsobem pomocí atlasů, ale s výše popsaným zobecněním. Jsou definovány podvariety a studována vnoření a transversalita; autor se zmiňuje i o varietách s hranicí. Velká pozornost je věnována dělení jednotky na varietě. V případě nekonečné dimense vznikají potíže s existencí diferencovatelného dělení jednotky, tak např. není známo, připouští-li Banachův prostor takové dělení. Pomocí Eellsova postupu se ukazuje následující věta: Nechť $A, B \neq \emptyset$ jsou uzavřené disjunktní podmnožiny separabilního Hilbertova prostoru $E$, potom existuje reálná funkce třídy $C^\infty$ $f: E \to R$, pro niž $f(x) = 0$ pro $x \in A$, $f(x) = 1$ pro $x \in B$, $0 \leqq f(x) \leqq 1$. Z toho plyne existence dělení jednotky třídy $C^p$ pro parakompaktní variety třídy $C^p$, modelované pomocí separabilních Hilbertových prostorů.

Kap. III. *Vektorově fibrované prostory* (= vector bundles). Po obecné definici se studuje tečný prostor dané variety, exaktní sekvence, normální vektorově fibrované prostory vnořené variety a různé operace (direktní součet, tensorový součin).

Kap. IV. *Vektorová pole a diferenciální rovnice.* Ve velmi abstraktní formě je dokázána věta o existenci lokálních řešení diferenciálních rovnic závislých na parametrech a možnosti prodloužení řešení pro všechna reálná čísla. Dále jsou studovány rovnice, které jsou lokálně tvaru $y'' =$

$= f(y, y')$, kde $f$ je homogenní stupně 2 v proměnné $y'$; tato rovnice je tzv. spray na varietě. Ukazuje se, že na varietě existuje spray jakmile tato varieta připouští dělení jednotky. Kapitola končí důkazem existence pásového okolí uzavřené podvariety variety, připouštějící dělení jednotky.

Kap. V. *Diferenciální formy.* Pro obecné variety jsou definovány pojmy a dokázány věty, známé dobře v klasickém podání: Poissonova závorka dvou vektorových polí, vnější diferenciál, Poincaréovo lemma.

Kap. VI. *Frobeniova věta.*

Kap. VII. *Riemannovy metriky.* Buď dán vektorově fibrovaný prostor, jehož fibry jsou Hilbertovy prostory a base připouští dělení jednotky, potom je ukázáno, že celý prostor připouští Riemannovu metriku. Je zkoumána grupa Hilbertových automorfismů a její exponenciální zobrazení. Kapitola končí definicí geodetik pomocí dané Riemannovy metriky podle R. Palaise.

Dodatek I. *Spektrální věta.* Tento dodatek je zápisem poznámek z von Neumannova semináře v r. 1950. Začíná definicí Hilbertova prostoru, funkcionálů, operátorů, hermiteovských operátorů a končí větou o kompaktnosti spektra.

Dodatek II. *Lokální souřadnice.* V lokálních souřadnicích je ukázán obvyklý tvar vnějších forem, Christoffelových symbolů a geodetik.

Celá kniha je pokusem o vysoce obecný a pokud možno rychlý výklad základních fakt z teorie diferencovatelných variet. Mnohé definice jsou proto značně formální a i když autor mnohdy upozorňuje na jejich názorný význam, není čtení knihy snadnou záležitostí. Rozhodně nedoporučuji čtení čtenáři, který není se základními pojmy seznámen v klasickém podání. Jestliže však zná trochu klasiky, pomůže mu kniha upřesnit jeho znalosti a upozornit ho na fakt, že jeho znalosti jsou daleko obecnější a hlubší než sám tuší. Ukázání souvislostí mezi abstraktními partiemi v knize a jejich (u nás až příliš běžně tradovanými) klasickými formulacemi by mohlo např. vést k vypracování referátů pro kand. zkoušky.

*Alois Švec*, Praha

*L. Fejes Tóth:* REGULÄRE FIGUREN. Akadémiai Kiadó Budapest 1965. Strán 316, obrázkov 164, anaglyfov 12.

Prvá kniha prof. Fejes Tótha (Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum. Berlin—Göttingen—Heidelberg 1953, u nás dostať ruský preklad) vzbudila značnú pozornosť, podnietila intenzívne bádanie o okruhu problémov, ktoré v poslednom čase sa zhrnuli do tzv. diskrétnej geometrie. Recenzovaná nová jeho kniha na prvú do značnej miery nadväzuje, no, je možné ju čítať aj samotnú.

Kniha sa delí na dve časti: I. Systematológia pravidelných útvarov, II. Genetika pravidelných útvarov. Pri systematológii sa vychádza z určitej definície pravidelnosti a skúmajú sa metrické vlastnosti pravidelných útvarov. Pri genetike naproti tomu je pravidelnosť (zväčša rozmiestnení) dôsledkom istých požiadaviek extremálnosti.

V I. časti, obsahujúcej moderne poňaté staršie poznatky o pravidelných útvaroch, sú kapitoly: 1. Rovinné ornamenty. 2. Sférické útvary. 3. Hyperbolické mozaiky. 4. Mnohosteny. 5. Pravidelné polytópy.

Kapitoly II. časti nadväzujú na rovnako očíslované kapitoly I. dielu a pretože práve v nich sú obsiahnuté hlavné výsledky diskrétnej geometrie približne z rokov 1952—1962, uvedieme ich obsah trochu podrobnejšie.

II. 1. *Útvary v euklidovskej rovine.* — Nerovnosti o mnohouholníkoch (s použitím Jensenovej nerovnosti). Uloženia a pokrytia šesťuholníka konvexnými útvarmi. Uloženia a pokrytie roviny nezhodnými kruhmi a otázka stability takých uložení.

II. 2. *Sférické útvary*. — Izoperimetrická vlastnosť pravidelných sférických mnohouholníkov. Najkratšia sférická sieť, ktorej oblasti majú rovnaký obsah. Nerovnosti o hviezdicovitých mozaikách.

II. 3. *Problémy v hyperbolickej rovine*. — Hustota uloženia a pokrytia zhodnými kruhmi. Uloženia a pokrytia horocyklami. Extremálna vlastnosť mozaiky $\{p, 3\}$.

II. 4. *Problémy v trojrozmernom priestore*. — Extremálne vlastnosti pravidelných mnohostenov (vzťahy medzi objemom, povrchom, polomerom vpísanej a opísanej gule). Guľové oblaky. Hustota uloženia a pokrytia priestoru zhodnými guľami.

II. 5. *Problémy vo viacrozmerných priestoroch*. — Nerovnosti pre objem mnohostena v hyperbolickom 3-rozmernom priestore. Extremálne vlastnosti pravidelných polytópov v euklidovských priestoroch. Uloženia a pokrytia v priestoroch konštantnej krivosti.

Problematika II. dielu je značne široká, stále sa v nej intenzívne pracuje, preto nepôsobí tento diel takým uceleným dojmom ako diel prvý.

Celkove posudzujúc, aj keď sa recenzovaná kniha svojou stavbou líši od prvej knihy prof. Fejes Tótha, má jej prednosti: Uvádza čitateľa do veľkého počtu živých problémov, v poznámkach na konci kapitol je podaný prehľad o otázkach príbuzných; ďalšie štúdium uľahčuje rozsiahly temer úplný zoznam literatúry.

Kniha vyšla aj v anglickej verzii (Regular Figures, Akadémiai Kiadó — Pergamon Press, 1964); odlišnosť od nemeckej verzie je minimálna. Technické vybavenie oboch verzií je výborné; prispieva k tomu veľký počet výrazných (i farebných) obrázkov a priložené anaglyfy.

*Ernest Jucovič*, Košice

*Rudolf Piska - Václav Medek*: DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE I. SNTL—SVTL, Praha 1966, 1. vyd., nákl. 6000 výt., str. 336, obr. 368, cena Kčs 23,50 váz.

Tato kniha je druhou z celostátních učebnic deskriptivní geometrie, je však určena svým zaměřením pro výuku na stavebních fakultách vysokých technických škol.

Vzhledem k dosavadnímu stavu ve výuce geometrie a deskriptivní geometrie na všeobecně vzdělávacích středních školách a na stavebních průmyslovkách je opět značná část vydaného prvního dílu knihy věnována zopakování a ucelení potřebných znalostí. Přitom se však vymaňuje otázka, zda je tento přístup opravdu účelný, neboť se tím především prodlužuje vydání celé učebnice a bylo by jistě vhodnější uvedené opakování vydat samostatně pro všechny technické školy.

První díl knihy je rozdělen na čtyři části, druhý díl, který bude obsahovat vytvoření a vlastnosti různých ploch a technické aplikace deskriptivní geometrie je již v tisku.

V první části je krátce vysvětlen význam deskriptivní geometrie (kap. 1) při studiu stavebního inženýrství a zároveň stručně naznačen vývoj deskriptivní geometrie. Dále (kap. 2 a 3) jsou vyloženy základní geometrické příbuznosti v rovině a v prostoru a jejich použití při řešení některých úloh. Zde se také čtenář setká poprvé s pojmy nevlastních útvarů a s komplexním rozšířením prostoru (a tedy také roviny). Základní vlastnosti promítání (kap. 4) vedou pak k určení zobrazovacích způsobů vhodných právě pro praktické použití, přičemž pro pravoúhlé promítání je zvlášť probrán průmět pravého úhlu. Pro další výklady je velmi důležitý pojem dělicího poměru a dvojpoměru (kap. 2), z něhož byly odvozeny vlastnosti některých lineárních příbuzností, zejména vztahy kolineace a afinity. Zde je také s výhodou užito metod analytické geometrie obdobně jako dále při kuželosečkách, příp. i jinde.

Základní ohniskové vlastnosti kuželoseček (kap. 6) jsou uvedeny jen v přehledu. Z vlastností kružnice a jejího rovnoběžného průmětu jsou odvozeny některé (metrické) vlastnosti elipsy a její konstrukce pomocí perspektivní afinity s kružnicí. Z rovnoběžného promítání hyperboly, příp. paraboly jsou obdobně získány podobné vztahy pro hyperbolu, příp. parabolu. Zde je rovněž stanoven perspektivně kolineární obraz ke kružnici a ukázáno jeho použití při konstrukci kuželosečky z některých ji určujících prvků.

Druhá část se zabývá výkladem *Mongeova promítání.* Po určení průmětu bodu (kap. 7) a některých technických pojmech (vynechání os, uspořádání průmětů, transformace průměten) je vyloženo promítání přímky a roviny (kap. 8) s příslušnými polohovými i metrickými úlohami. Po průmětech jednoduchých geometrických těles (kap. 9) s určením řezů rovinami jsou stanoveny vzájemné průniky těles. Způsob určení průniku a jeho konstrukce není však tak přehledný jako je tzv. metoda číslování, která je většinou u nás používána. Tato část je ukončena (kap. 10) první technickou aplikací při rovnoběžném osvětlování těles.

V třetí části je pojednáno o *axonometrickém promítání* a to (kap. 11) o kosoúhlé axonometrii s příslušnými základními úlohami a uvedením tzv. zářezové metody k rychlé konstrukci názorného obrázku objektu daného půdorysem a nárysem. V pravoúhlé axonometrii (kap. 12) je nejdříve uvedena podstata Skuherského metody a dále jsou řešeny různé úlohy.

Konečně ve čtvrté části je vyloženo *středové promítání* (kap. 13) opět se všemi příslušnými úlohami, přičemž výklad je veden tak, aby konstrukcí bylo možno použít v lineární perspektivě (kap. 14). Jsou ukázány různé způsoby používané při konstrukci perspektiv. Protože v této kapitole je uvedena také konstrukce tzv. trojúběžníkové perspektivy, bylo snad možno uvést též základ cylindrické perspektivy, obou používají architekti, zejména v různých druzích výstavnictví. Kniha je zakončena výkladem o použití osvětlení a zrcadlení v perspektivě.

V tomto dílu knihy, který se zabývá v podstatě zobrazovacími metodami, není zatím tzv. kótované promítání. Zřejmě bude uvedeno až před kapitolou o topografických plochách, jak je tomu u mnoha jiných učebnic (německých, polských aj.). Podobně kosoúhlé promítání by zasloužilo více místa než bylo uvedeno v kap. 11, kdy je popsáno jako jeden typ kosoúhlé axonometrie.

Podle toho, kdo psal kapitolu, je kniha napsána střídavě česky a slovensky. Tato okolnost vůbec nevadí tomu, kdo již poměrně dobře zná základy deskriptivní geometrie, pro studující v prvním ročníku by bylo přijatelnější sepsání v jednom jazyku (třeba slovensky, neboť Urbanova kniha pro strojní fakulty přibližně z téže látky je napsána česky).

Je s podivem, že v knize je značné množství tiskových chyb, přičemž na opravence je uvedena jen jedna textová a dvě obrázkové. Většina z nich nevadí při jejím čtení, jsou však tu chyby, které ruší smysl textu a které si studující nemůže sám opravit, neví-li, oč jde. Rovněž při dělení slov je častým prohřešek proti duchu českého jazyka.

Obrázky, které v hojném počtu doprovázejí text, jsou vypracovány způsobem známým z knih vydaných dříve v Německu a v poslední době v Rakousku. Jsou vypracovány velmi pečlivě, někdy však vadí přílišná tloušťka výsledné čáry. Obdobně jako při úpravě textu i při reprodukci obrázků se ukazuje nezodpovědný přístup nakladatelství a tiskárny při vydání knihy takového významu pro výchovu budoucích inženýrů. Vzhledem ke špatnému papíru a stále se horšící kvalitě reprodukce obrázků (řada z nich obsahuje zjevné typografické závady — rozmazání, neúplný otisk), ztrácí se výchovný vliv knihy na její čtenáře, které jinde nutíme k pěkné úpravě vlastní grafické práce.

V knize je uvedena vedle řešených úloh v textu ještě mnoho velmi pěkných příkladů k procvičení nastudované látky. Bylo by vhodné (při dalším vydání knihy) opatřit ve většině úloh dané útvary kótami, tím totiž získá čtenář při konstrukci možnost kontroly správného postupu, neboť v podstatě při libovolném zadání mohou nastat při řešení takové komplikace, které jej odradí od dalšího pracovního postupu.

Kniha je však napsána (přes některé výhrady, které mohou být velmi subjektivní) způsobem, který v dané situaci byl asi jedině možný. Má své dobré tempo výkladu s mnoha různými a potřebnými konstrukcemi, takže se stane vhodnou pomůckou při studiu deskriptivní geometrie.

*Karel Drábek*, Praha

*S. Sternberg:* LECTURES ON DIFFERENTIAL GEOMETRY. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1964. Stran 390, cena $ 12,00.

Kniha je založena na lekcích, přednesených autorem na Harvard Univ. (Cambridge, Mass.) v akademickém roce 1960—61. Pro její studium se předpokládá znalost elementů moderní algebry (grupy, vektorové prostory), topologie a základů analysy. Zaměření knihy je dáno spíše autorovými zálibami — prof. Sternberg je hlavně znalcem $G$-struktur — než jeho snahou podati vyvážený přehled základů diferenciální geometrie nebo úplný přehled některých jejích partií. Sám autor doporučuje, aby čtenář si přečetl další knihy, a to Langovu Introduction to Diff. Manifolds, Nomizovu Lie Groups and Diff. Geometry, de Rhamovu Variétés Différentiables, konečně některou knihu o klasické diferenciální geometrii. Uveďme však nejprve obsah knihy.

Kap. 1. *Algebraický úvod.* V této kapitole jsou uvedena základní algebraická fakta, potřebná v dalším textu: tensorové součiny vektorových prostorů, tensorová algebra, kontravariantní a symetrické algebry, vnější algebra, Cartanovo lemma, normální tvar vnější 2-formy, vnější rovnice. Všechen materiál je zcela standartní a jeho podání a značení je velmi blízké Bourbakiho multilineární algebře.

Kap. 2. *Diferencovatelné variety.* Diferencovatelná varieta třídy $C^k$ je definována pomocí množiny všech reálných funkcí třídy $C^k$, ihned se však ukazuje ekvivalence této definice s obvyklou definicí, užívající atlasů. Dále se definují diferencovatelná zobrazení, vložení a vnoření (imbeddings a immersions). Na základě těchto definic se podrobně dokazuje známá Sardova věta tvrdící (zhruba řečeno) to, že kritické hodnoty zobrazení $f: M_1 \to M_2$ třídy $C^k$ mají míru nula jestliže $k - 1 \geqq \max(\dim M_1 - \dim M_2, 0)$. Důvodem k uvedení Sardovy věty je hlavně to, že k vyslovení této vysoce neelementární věty stačí prakticky pojem diferencovatelného zobrazení. Sardovy věty a možnosti dělení jednotky je však okamžitě také využito k důkazu řady vět o aproximacích zobrazení třídy $C^k$. První věta tohoto druhu tvrdí, že zobrazení $f: M_1 \to M_2$ třídy $C^k$ je možno při $\dim M_2 \geqq 2 . \dim M_1$ libovolně dobře aproximovati vnořením. Dále se ukáže, že pro $\dim M_2 > 2 . \dim M_1$ je možno každé vnoření aproximovati vzájemně jednoznačným vnořením; kombinací s předchozím výsledkem tím vychází oslabená Whitneyova věta o možnosti vložení variety třídy $C^k$, $k \geqq 2$, do euklidovského prostoru dimense $2 . \dim M + 1$. Další aproximační věta pochází od Thoma a tvrdí, že následující věta platí zcela obecně pro libovolné variety a libovolné zobrazení třídy $C^k$: Nechť $I$ je interval, $E$ rovina, $C$ křivka v $E$ a $f: I \to E$ zobrazení; existuje libovolně dobrá aproximace zobrazení $f$ tak, že $C$ a $f(I)$ mají různé tečny ve svých průsečících.

Teprve po tomto velmi hlubokém a přehledném úvodu (snad nejlepším ze všech současných „úvodů" do diferenciální geometrie) je uveden pojem tečného prostoru variety. Zcela obecně je definován prostor objektů 1. řádu na varietě, zahrnující jako hlavní příklad prostor všech tensorů. Velmi podrobně jsou studována vektorová pole a Lieova derivace.

Kap. III. *Integrální počet na varietách.* První část této kapitoly je pochopitelně věnována Stokesově větě. Definuje se vnější diferenciál vnější formy a singulární simplexy na varietě, což umožňuje vyslovení a důkaz zmíněné věty; není však dokázána de Rhamova věta. Je uvedena i další teorie integrace, kde integrál hustoty na varietě je definován jako funkcionál splňující jisté předpoklady, zaručující existenci a jednoznačnost. Dále se dokazuje Poincaréovo lemma, určují extrémní kohomologické grupy variety a definuje stupeň zobrazení. Další část kapitoly pojednává o integraci diferenciálních systémů na varietě. Je dokázána Frobeniova věta o existenci maximální souvislé integrální variety úplně integrabilního diferenciálního systému a jako aplikace Darbouxova věta o kanonickém tvaru 1-formy na varietě. Taková struktura vzniká na varietě dimense $2n$ zadáním uzavřené 2-formy hodnosti $n$; jest ukázáno užití těchto struktur v mechanice (zákon o zachování energie, totálního lineárního a úhlového momentu).

Kap. IV. *Variační počet.* Jest nutno zvyknouti si (u nás) na to, že znalost variačního počtu jest pro diferenciálního geometra nutná; samozřejmě největší důležitost mají globální výsledky.

Variační počet ve velkém je založen na Morseově teorii, ve Sternbergově podání se však bohužel Morseova teorie explicitně nevykládá a tak čtenáři zbývá doporučiti přečtení Milnorovy Morse Theory (Princeton, 1961) pro plnější pochopení pozadí látky, vyložené v této kapitole. Pro variační problém jsou nejprve odvozeny Eulerovy rovnice a nutné podmínky, později i některé podmínky postačující. Teorie konjugovaných a fokálních bodů je podána velmi podrobně. Vše předchozí se aplikuje na případ Riemannovy metriky na varietě. Je dokázána existence geodeticky uzavřených okolí bodů. Geodetiky na Riemannově varietě jsou studovány hlavně na kompaktních varietách; výklad vrcholí důkazem věty, podle níž každé dva body lze spojiti geodetikou, jejíž délka se rovná vzdálenosti obou bodů.

Kap. V. *Lieovy grupy.* Lieova grupa a její algebra se definují obvyklým způsobem. Jest ukázáno, že Lieova algebra určuje souvislou Lieovu grupu jednoznačně, důkaz existence se však neprovádí přes to, že v předchozím je k němu vše připraveno. Velmi podrobně je probráno exponenciální zobrazení. Za dosti důležité považuji explicitní výklad existence diferencovatelné struktury na homogenním prostoru. Jsou nalezeny podmínky pro existenci biinvariantních metrik na Lieově grupě. Zcela nepovšimnuty však jsou otázky, týkající se homomorfismů grup a příslušných algeber. Kapitola končí krátkým výkladem o vnějších formách s hodnotami ve vektorovém prostoru.

Kap. VI. *Diferenciální geometrie euklidovského prostoru.* V této kapitole se autor snaží aplikovati předchozí výsledky na studium subvariet euklidovského prostoru. Jsou nalezeny rovnice struktury euklidovského prostoru, jeho podvariety a obecně Riemannovy variety. Pro křivku v euklidovské rovině se dochází k Frenetovým formulím a velmi podrobně se studuje tečné zobrazení; např. je dokázána Whitneyova věta o hladké homotopii dvou křivek se stejným stupněm tečného zobrazení. Pro obecné podvariety je definována druhá fundamentální forma, studium se však omezuje na případ nadploch. Jsou dokázány dvě hluboké věty: Hartman-Nirenbergova (jestliže nadplocha je jednoduše souvislá, kompletní a lokálně euklidovská, pak je válcem) a Chern-Lashofova (kompaktní orientovatelná nadplocha je konvexní právě když stupeň sférického zobrazení je $\pm 1$ a Gaussova křivost nemění znaménko.) Pro plochy v euklidovském trojrozměrném prostoru jsou studována její vektorová pole (součet jejich indexů) a je dokázána Bonnetova věta (je-li plocha souvislá, kompletní a pro křivost máme $K \geqq c^2$, pak je uvažovaná plocha kompaktní).

Kap. VII. *Geometrie G-struktur.* Uvedené výsledky jsou z velké části původní a spočívají na výsledcích, dosažených autorem a I. M. Singerem. Výklad však začíná standartními definicemi hlavního a asociovaného fibrovaného prostoru, konexe, grup holonomie a důkazem Ambrose--Singerovy věty o relaci mezi křivostí a algebrou holonomie. Definice $G$-struktur je motivována řadou příkladů (kompletní paralelismus, diferenciální systém, Riemannova metrika, konformní struktury, skoro Hamiltonovské struktury, skoro komplexní struktury). Podotkněme, že dáti $G$-strukturu na varietě $M$ znamená vybrati v každém tečném prostoru variety $M$ podgrupu jeho automorfismů isomorfní s $G$; tak např. Riemannova metrika určuje $O(n)$-strukturu, protože v každém tečném prostoru připouštíme jen ortogonální transformace. Obsahem celé kapitoly je prakticky řešení problému ekvivalence pro $G$-struktury konečného typu. Závěrem jsou studovány konexe na $G$-strukturách.

Dodatky obsahují existenční věty o implicitních funkcích a řešeních obyčejných diferenciálních rovnic a základy teorie integrace v euklidovském prostoru.

Plně souhlasím s autorem, že jeho kniha je psána značně nevyváženě a že v ní je mnoho drobných chyb. Rozhodně se Sternbergovi nepodařilo dosáhnouti přehlednosti knih Nomizových. Jeho kniha je však vysoce podnětná a speciálně poslední kapitola o $G$-strukturách si zaslouží podrobné přečtení. Na druhé straně za nejslabší považuji předposlední kapitolu o podvarietách euklidovského prostoru, jejíž obsah by bylo možno vyložiti mnohem elegantněji a přehledněji; uvedené konkrétní výsledky jsou pak opravdu jen dílčí.

Rozhodně tuto knihu nedoporučuji čísti začátečníkovi. Znalec ji však nepochybně shledá velmi poutavou a zábavnou, protože mu neujde osobitý styl Sternbergova podání a výběru látky. V případě $G$-struktur zde pak najde jedinou knižně zpracovanou informaci. *Alois Švec*, Praha

*N. Bourbaki:* INTÉGRATION. Vydalo nakladatelství Hermann, Paris, 1965. Stran 283.

Šestá kniha Bourbakiho Éléments de Mathématique je věnována integraci; recenzovaný svazek obsahuje první čtyři kapitoly z celkových osmi.

První dvě kapitoly mají pomocný charakter; hlavním výsledkem první (Inégalités de convexité) je důkaz zobecněné Hölderovy nerovnosti, ve druhé (Espaces de Riesz) se studují lineární svazy.

Třetí kapitola má název Mesures sur les espaces localement compacts. Mírou na lokálně kompaktním prostoru X se nazývá lineární funkcionál $\mu$ na prostoru $\mathscr{K}(X; C)$ spojitých komplexních funkcí na X s kompaktním nosičem, který má tuto vlastnost: pro každou kompaktní $K \subset X$ existuje $M_K$ tak, že $|\mu(f)| \leqq M_K \|f\|$. Číslo $\mu(f) = \int f \, d\mu$ se nazývá integrálem $f$ vzhledem k $\mu$. Dále se zde zavádějí např. absolutní hodnota míry, nosič míry, různé topologie na prostoru měr $\mathscr{M}(X; C)$ apod. Pojem integrálu je také rozšířen na spojité funkce s hodnotami v lokálně konvexním prostoru E. V závěru kapitoly se studují součiny měr.

Centrální částí knihy je nejrozsáhlejší čtvrtá kapitola (Prolongement d'une mesure. Espaces $L^p$), ve které jsou vyloženy základy teorie Lebesgueova integrálu funkcí na X s hodnotami v Banachově prostoru F. Označme symbolem $\mathscr{J}_+(X)$ množinu všech nezáporných (ne nutně konečných) zdola polospojitých funkcí na X, a nechť $\mathscr{K}_+ = \mathscr{K} \cap \mathscr{J}_+$. Pro $f \in \mathscr{J}_+$ buď $\mu^*(f) = \sup \{\mu(g); g \in \mathscr{K}_+\}$; pak je $\mu^*$ rozšíření $\mu$ na $\mathscr{J}^+$. Další rozšíření se provede takto: je-li $f \geqq 0$ na X, buď $\mu^*(f) = \int^* f \, d\mu = \inf \{\mu^*(h); h \geqq f, h \in \mathscr{J}_+\}$. Pomocí $\mu^*$ se nyní definuje vnější míra množiny $A \subset X$, množiny míry nula (ensemble $\mu$-négligeable) apod. Je-li nyní $f$ zobrazení X do Banachova prostoru F, položíme $N_p(f) = (\int^*_\infty |f|^p \, d|\mu|)^{1/p}$. Pak platí (théorème de convexité dénombrable): $f_n \geqq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, $1 \leqq p < \infty \Rightarrow N_p(\sum_1^\infty f_n) \leqq \sum_1^\infty N_p(f_n)$; tato nerovnost má v dalším zásadní důležitost. Nejprve je dokázána úplnost prostoru $\mathscr{F}^p(X; \mu) = \{f : X \to F; N_p(f) < \infty\}$ v polonormě $N_p$. Tento prostor ovšem ještě může obsahovat neměřitelné funkce (pojem měřitelnosti se však zavádí později); funkce integrovatelné v $p$-té mocnině tvoří uzávěr $\mathscr{K}(X; F)$ v $\mathscr{F}^p(X; \mu)$; tento prostor $\mathscr{L}^p_F(X; \mu)$ je pečlivě rozlišován od příslušného prostoru tříd $L^p_F(X; \mu)$. Prvky $\mathscr{L}^1_F$ se nazývají integrovatelné funkce; aplikací charakteristické funkce dostáváme integrovatelné množiny.

K definici měřitelnosti nepotřebuje autor ani linearitu prostoru, do něhož se zobrazuje, a používá se jen množin míry nula: Nechť X je lokálně kompaktní prostor a $\mu$ je míra na X. Zobrazení $f$ z X do topologického prostoru F je měřitelné v míře $\mu$, jestliže pro každou kompaktní $K \subset X$ existuje $\mu$-nulová $N \subset K$ a rozklad $K - N = \bigcup_1^\infty K_n$ na kompaktní $K_n$ tak, že zúžení $f$ na $K_n$ je spojité. Většina výsledků je ovšem podána jen pro případ, že F je Banachův prostor. Pojmu měřitelnosti je využito zvláště k charakterizaci integrability funkcí. V tomto druhém vydání byl také přidán odstavec o asymptotické konvergenci, pojaté tak, že je zobecněním konvergence skoro všude i na množinách nekonečné míry.

Kapitola končí paragrafem, ve kterém se zavádí $\mathscr{L}^\infty$ a vykládají se některé výsledky o dualitě v $\mathscr{L}^p$, a v tomto vydání novým, netradičním paragrafem o těžišti míry (Choquet).

Každá z kapitol je doplněna řadou cvičení; mnohá z nich jsou další teorie (např. Riemannův integrál v kompaktních prostorech).

Jako šestá kniha Bourbakiho serie je toto dílo silně závislé na teoriích rozvinutých v předcházejících svazcích, zvláště pak na teorii topologických vektorových prostorů z páté knihy. Tento fakt z ní činí četbu rozhodně obtížnější než u jiných knih tohoto druhu. To, a nejen to, bylo také příčinou některých dosti odmítavých kritik prvního vydání (viz P. R. Halmos, Bull. Amer. Math. Soc. 59 (1953), 249—255). Zdá se však, že Bourbakiho koncepce integrace získává v nových pracech o teorii míry stále větší odezvu.

*Karel Karták*, Praha