Luděk Granát

Metrické vlastnosti nerozvinutelných monosystémů dimense $n+1$ v eukleidovském prostoru E_{2n+1}

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 91 (1966), No. 4, 412--422

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117582`

METRICKÉ VLASTNOSTI NEROZVINUTELNÝCH MONOSYSTÉMŮ DIMENSE $n+1$ V EUKLEIDOVSKÉM PROSTORU E_{2n+1}

LUDĚK GRANÁT, Praha

(Došlo dne 8. září 1965)

Tato práce navazuje na článek [5]. Jejím cílem je zobecnění některých vztahů známých pro přímkové plochy na uvedené monosystémy a nalezení geometrického významu některých invariantů monosystému.

Mějme v eukleidovském prostoru E_{2n+1} nerozvinutelný monosystém[1]) V_{n+1} dimense $n+1$, tj. množinu n-rozměrných prostorů

$$(1) \qquad \boldsymbol{B}_n(t) = [A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_n(t)]\,, \quad \boldsymbol{u}_i(t)\,\boldsymbol{u}_j(t) = \delta_{ij}\,, \quad i, j = 1, \ldots, n\,,$$

závislých na jednom parametru t, při čemž

$$(2) \qquad \det [A', \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n, \boldsymbol{u}'_1, \ldots, \boldsymbol{u}'_n] \neq 0\,.$$

Nechť pro každé t z uvažovaného intervalu Ω má charakteristická rovnice matice $\mathbf{E}(t)$ jednoduché kořeny. Matice $\mathbf{E}(t)$ je matice koeficientů kvadratické formy

$$|'\boldsymbol{v}'(t)| = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i(t)\,\alpha_j(t)\,'\boldsymbol{u}'_i(t)\,'\boldsymbol{u}'_j(t)\,,$$

při čemž $\boldsymbol{u}'_j(t) = \sum_{i=1}^{n} {}^i a_j\, \boldsymbol{u}_j(t) + {}'\boldsymbol{u}'_j(t)$, kde $'\boldsymbol{u}'_j(t)$ jsou vektory prostoru $C_n(t)$ totálně kolmého k $\boldsymbol{B}_n(t)$ v prostoru $[A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_n(t), \boldsymbol{u}'_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}'_n(t)]$.

Zvolíme-li za $A(t)$ strikční křivku monosystému V_{n+1} lze určit reper $\{A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \ldots$ $\ldots, \boldsymbol{u}_{2n+1}(t)\}$ tak, že platí $A' = \sum_{i=1}^{n} p_i \boldsymbol{u}_i + \varepsilon \boldsymbol{u}_{2n+1} \sqrt{(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2)}$. Omezíme-li naše vyšetřování na interval $\bar{\Omega} \subset \Omega$, kde pro všechna $t \in \bar{\Omega}$ platí $p_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$,

[1]) Názvy a označení viz [5].

pak podle [5] lze určit v E_{2n+1} pohyblivý reper $\{A(t), \mathbf{u}_1(t), \ldots, \mathbf{u}_{2n+1}(t)\}$ tak, že platí

$$
\begin{aligned}
(3) \qquad & A' = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_{2n+1} \sqrt{\left(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2\right)}, \\
& \mathbf{u}'_m = \sum_{i=1}^{n} {}^m q_i \mathbf{u}_i + c_m \mathbf{u}_{n+m}, \quad {}^m q_i + {}^i q_m = 0, \\
& \mathbf{u}'_{n+m} = -c_m \mathbf{u}_m + \sum_{i=1}^{n} {}^m r_i \mathbf{u}_{n+i} + s_m \mathbf{u}_{2n+1}, \quad {}^m r_i + {}^i r_m = 0, \\
& \mathbf{u}'_{2n+1} = -\sum_{i=1}^{n} s_i \mathbf{u}_{n+i}, \\
& p_i > 0, \quad c_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\
& m = 1, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

1. DISTRIBUČNÍ PARAMETR

Společnou kolmici dvou mimoběžných lineárních prostorů E_r, E_s, která má s každým z nich právě jeden bod společný, nazveme osou těchto prostorů. Vzdálenost průsečíků daných prostorů s jejich osou nazveme délkou této osy.

Věta 1. *Buď l_h délka osy prostorů $\mathbf{B}_n(t_0)$ a $\mathbf{B}_n(t_0 + h)$. Pak* $\lim_{h\to 0} l_h/h = \sqrt{\left(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2\right)}$.

Důkaz. Abychom mohli využít výsledků z práce [3], zvolme v $\mathbf{B}_n(t)$ přirozenou basi $\{A(t), \bar{\mathbf{u}}_1(t), \ldots, \bar{\mathbf{u}}_n(t)\}$, tj. takovou ortonormální basi, pro níž platí $\bar{\mathbf{u}}'_i \bar{\mathbf{u}}_j = 0$, $i, j = 1, \ldots, n$. Průsečíky osy s prostory $\mathbf{B}_n(t_0)$ a $\mathbf{B}_n(t_0 + h)$ budou

$$P(h) = A(t_0) + \sum_{i=1}^{n} \alpha^i(h)\, \bar{\mathbf{u}}_i(t),$$

$$Q(h) = A(t_0 + h) + \sum_{i=1}^{n} \beta^i(h)\, \bar{\mathbf{u}}_i(t_0 + h).$$

M. Jůza v [3] dokázal, že platí $\lim_{h\to 0} \beta^i(h) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Ze vztahu (8) v téže práci plyne

$$\lim_{h\to 0} \frac{\beta^i(h) - \alpha^i(h)}{h} = -A'(t_0)\, \bar{\mathbf{u}}_i(t_0), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Z těchto vztahů dostaneme pomocí Taylorova rozvoje

$$\mathbf{k}_h = Q(h) - P(h) = hA'(t_0) - h \sum_{i=1}^{n} \left(A'(t_0)\, \bar{\mathbf{u}}_i(t_0)\right) \bar{\mathbf{u}}_i + o(h).$$

Protože $A(t)$ je strikční křivkou monosystému, tj. platí $A'(t)\, \bar{\mathbf{u}}'_i(t) = 0$ pro $i = 1, \ldots, n$, existuje reper $\{A, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{2n+1}\}$ tak, že lze psát $A' = \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i \bar{u}_i + \bar{u}_{2n+1} \sqrt{(1 - \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i^2)}$; $[A, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{2n}]$, $[A, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n, \bar{u}'_1, \ldots, \bar{u}'_n]$, $[A, u_1, \ldots, u_n, u'_1, \ldots, u'_n]$, $[A, u_1, \ldots, u_{2n}]$ jsou tytéž prostory. Tím i $\bar{u}_{2n+1} = u_{2n+1}$ a $\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i^2$.

$$k_h = hA' - h\sum_{i=1}^{n} (A'\bar{u}_i)\,\bar{u}_i + o(h) = h\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i \bar{u}_i + h\,\bar{u}_{2n+1} \sqrt{(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2)} -$$
$$- h\sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i \bar{u}_i + o(h) = h\bar{u}_{2n+1} \sqrt{(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2)} + o(h) = h\,u_{2n+1} \sqrt{(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2)} + o(h)\,.$$

$$\lim_{h\to 0} l_h/h = \lim_{h\to 0} \sqrt{(k_h k_h)}/h = \sqrt{(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2)}$$

Věta 2. *Budiž $\varphi_{h,i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ úhel prostorů $B_n(t_0)$ a $B_n(t_0 + h)$.* [2] *Pak platí při vhodném očíslování úhlů* $\lim_{h\to 0} |h/\sin \varphi_{h,i}| = 1/c_i$.

Důkaz. Písmenem M označme matici

$$\begin{Vmatrix} u_1(t_0 + h)\, u_1(t_0), & u_1(t_0 + h)\, u_2(t_0), & \ldots, & u_1(t_0 + h)\, u_n(t_0) \\ u_2(t_0 + h)\, u_1(t_0), & u_2(t_0 + h)\, u_2(t_0), & \ldots, & u_2(t_0 + h)\, u_n(t_0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_n(t_0 + h)\, u_1(t_0), & u_n(t_0 + h)\, u_2(t_0), & \ldots, & u_n(t_0 + h)\, u_n(t_0) \end{Vmatrix}$$

Podle [6] $\cos^2 \varphi_{h,i} = \lambda_i$, kde λ_i je kořenem polynomu $|MM' - \lambda I_n| = 0$ (M' je matice transponovaná k M a I_n je jednotková matice stupně n).

Podle Taylorova rozvoje

$$u_i(t_0 + h) = u_i(t_0) + h\,u'_i(t_0) + \tfrac{1}{2}h^2\,u''_i(t_0) + o(h^2)\,.$$

Odtud, protože $u_i(t)\,u_j(t) = \delta_{ij}$, $u'_i u_i = 0$, $u''_i u_i = -u'_i u'_i$, $i, j = 1, \ldots, 2n + 1$,

$$u_i(t_0 + h)\,u_i(t_0) = 1 - \tfrac{1}{2}h^2\,u'_i(t_0)\,u'_i(t_0) + o(h^2)\,,$$

a pro $i \neq k$

$$u_i(t_0 + h)\,u_k(t_0) = h\,u'_i(t_0)\,u_k(t_0) + \tfrac{1}{2}h^2\,u''_i(t_0)\,u_k(t_0) + o(h^2)\,.$$

Podle vztahů (3) platí pro $i, k = 1, \ldots, n$, $k \neq i$:

$$u'_i u_k = {}^i q_k\,,$$
$$u'_i u'_i = \sum_{j=1}^{n} {}^i q_j^2 + c_i^2\,,$$
$$u''_i = \sum_{j=1}^{n} {}^i q'_j u_j + c'_i u_{n+i} + \sum_{j=1}^{n} {}^i q_j \Big(\sum_{m=1}^{n} {}^j q_m u_m + c_j u_{n+j}\Big) +$$
$$+ c_i\Big(-c_i u_i + \sum_{m=1}^{n} {}^i r_m u_{n+m} + s_i u_{2n+1}\Big)\,,$$
$$u''_i u_k = {}^i q'_k + \sum_{j=1}^{n} {}^i q_j\, {}^j q_k\,.$$

---

[2]) Definice úhlu dvou prostorů E_r a E_s viz [6].

Dále platí pro $i, j, k = 1, \ldots, n,\ i \neq k,\ i \neq j,\ j \neq k$:

$$(\boldsymbol{u}_i(t_0 + h)\,\boldsymbol{u}_i(t_0))^2 = 1 - h^2\,\boldsymbol{u}_i'(t_0)\,\boldsymbol{u}_i'(t_0) + o(h^2) = 1 - h^2(\sum_{j=1}^{m} {}^iq_j^2 + c_i^2) + o(h^2)\,,$$

$$(\boldsymbol{u}_i(t_0 + h)\,\boldsymbol{u}_k(t_0))^2 = h^2(\boldsymbol{u}_i'(t_0)\,\boldsymbol{u}_k(t_0))^2 + o(h^2) = h^2\,{}^iq_k^2 + o(h^2)\,,$$

$$(\boldsymbol{u}_i(t_0 + h)\,\boldsymbol{u}_i(t_0))\,(\boldsymbol{u}_k(t_0 + h)\,\boldsymbol{u}_i(t_0)) = h(\boldsymbol{u}_k'(t_0)\,\boldsymbol{u}_i(t_0)) + \tfrac{1}{2}h^2\,\boldsymbol{u}_k''(t_0)\,\boldsymbol{u}_i(t_0) + o(h^2) =$$
$$= h\,{}^kq_i + \tfrac{1}{2}h^2({}^kq_i' + \sum_{m=1}^{n} {}^kq_m\,{}^mq_i) + o(h^2)\,,$$

$$(\boldsymbol{u}_i(t_0 + h)\,\boldsymbol{u}_j(t_0))\,(\boldsymbol{u}_k(t_0 + h)\,\boldsymbol{u}_j(t_0)) = h^2(\boldsymbol{u}_i'(t_0)\,\boldsymbol{u}_j(t_0))\,(\boldsymbol{u}_k'(t_0)\,\boldsymbol{u}_j(t_0)) + o(h^2) =$$
$$= h^2\,{}^iq_j\,{}^kq_j + o(h^2)\,.$$

Členy v hlavní diagonále matice $\boldsymbol{MM}'$ budou

$$\sum_{m=1}^{n}(\boldsymbol{u}_i(t_0 + h)\,\boldsymbol{u}_m(t_0))^2 = (\boldsymbol{u}_i(t_0 + h)\,\boldsymbol{u}_i(t_0)) + \sum_{\substack{m=1\\ m\neq i}}^{n}(\boldsymbol{u}_i(t_0 + h)\,\boldsymbol{u}_m(t_0))^2 =$$
$$= 1 - h^2(\sum_{m=1}^{n} {}^iq_m^2 + c_i^2) + h^2\sum_{m=1}^{n} {}^iq_m^2 + o(h^2) =$$
$$= 1 - h^2c_i^2 + o(h^2)\,, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Ostatní členy matice $\boldsymbol{MM}'$ budou

$$(4)\quad (\boldsymbol{u}_i(t_0 + h)\,\boldsymbol{u}_i(t_0))\,(\boldsymbol{u}_k(t_0 + h)\,\boldsymbol{u}_i(t_0)) + (\boldsymbol{u}_i(t_0 + h)\,\boldsymbol{u}_k(t_0))\,(\boldsymbol{u}_k(t_0 + h)\,\boldsymbol{u}_k(t_0)) +$$
$$+ \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i\\ j\neq k}}^{n}(\boldsymbol{u}_i(t_0 + h)\,\boldsymbol{u}_j(t_0))\,(\boldsymbol{u}_k(t_0 + h)\,\boldsymbol{u}_j(t_0))\,.$$

Protože ${}^iq_j + {}^jq_i = 0$, je též ${}^iq_j' + {}^jq_i' = 0$. Součet prvních dvou členů výrazu (4) je roven

$$h\,{}^kq_i + \tfrac{1}{2}h^2({}^kq_i' + \sum_{m=1}^{n} {}^kq_m\,{}^mq_i) + h\,{}^iq_k + \tfrac{1}{2}h^2({}^iq_k' + \sum_{m=1}^{n} {}^iq_m\,{}^mq_k) + o(h^2) =$$
$$= -h^2\sum_{m=1}^{n} {}^mq_k\,{}^mq_i + o(h^2)\,.$$

Součet další části výrazu (4) je roven výrazu $h^2\sum_{j=1}^{n} {}^iq_j\,{}^kq_j + o(h^2)$. Výraz (4), neuvažujeme-li členy vyšších stupňů než druhého vzhledem k h, je roven nule.

$$|\boldsymbol{MM}' - \lambda\boldsymbol{I}_n| =$$
$$= \begin{vmatrix} 1 - \lambda - h^2c_1^2 + o(h^2), & o(h^2), & \ldots, & o(h^2) \\ o(h^2), & 1 - \lambda - h^2c_2^2 + o(h^2), & \ldots, & o(h^2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ o(h^2), & o(h^2), & \ldots, & 1 - \lambda - h^2c_n^2 + o(h^2) \end{vmatrix}$$

K úpravě tohoto determinantu můžeme užít Gaussovy metody pro řešení soustavy lineárních rovnic

$$|MM' - \lambda I_n| =$$

$$= (1 - \lambda - h^2c_1^2 + o(h^2)) \begin{vmatrix} 1, & o(h^2), & \dots, & o(h^2) \\ o(h^2), & 1 - \lambda - h^2c_2^2 + o(h^2), & \dots, & o(h^2). \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ o(h^2), & o(h^2), & \dots, & 1 - \lambda - h^2c_n^2 + o(h^2) \end{vmatrix}$$

Znásobíme-li i-tý řádek determinantu prvním členem i-tého řádku $(i = 2, 3, \dots, n)$ a odečteme jej od i-té řádky, dostaneme

$$|MM' - \lambda I_n| =$$

$$= (1 - \lambda - h^2c_1^2 + o(h^2)) \begin{vmatrix} 1, & o(h^2), & \dots, & o(h^2) \\ 0, & 1 - \lambda - h^2c_2^2 + o(h^2), & \dots, & o(h^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & o(h^2), & \dots, & 1 - \lambda - h^2c_n^2 + o(h^2) \end{vmatrix} =$$

$$= (1 - \lambda - h^2c_1^2 + o(h^2)) \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 - \lambda - h^2c_2^2 + o(h^2), & o(h^2), & \dots, & o(h^2) \\ o(h^2), & 1 - \lambda - h^2c_3^2 + o(h^2), & \dots, & o(h^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ o(h^2), & o(h^2), & \dots, & 1 - \lambda - h^2c_n^2 + o(h^2) \end{vmatrix} .$$

Po n úpravách uvedeného typu dostaneme $|MM' - \lambda I_n| = \prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda - h^2c_i^2 + o(h^2))$. Odtud $\sin^2 \varphi_{h,i} = 1 - \lambda_i = h^2c_i^2 + o(h^2)$, $i = 1, \dots, n$, $\lim_{h\to 0} |h/\sin \varphi_{h,i}| = 1/c_i$, $i = 1, \dots, n$.

Definujeme-li distribuční parametr monosystému obdobným způsobem jako distribuční parametr přímkové plochy, tj. $\lim_{h\to 0} |l_h/\varphi_h|$, kde l_h je délka osy prostorů $B_n(t_0)$ a $B_n(t_0 + h)$ a φ_h je jejich úhel[3]), pak platí:

Věta 3. *Za předpokladů uvedených na první straně tohoto příspěvku má monosystém V_{n+1} pro každé $t \in \overline{\Omega}$ n distribučních parametrů (ne nutně různých)*

$$d_i = \sqrt{(1 - \sum_{m=1}^{n} p_m^2)}/c_i\,, \quad i = 1, \dots, n\,. \tag{5}$$

Důkaz.

$$d_i = \lim_{h\to 0} |l_h/\varphi_{h,i}| = \lim_{h\to 0} \left|\frac{l_h}{h} \cdot \frac{h}{\sin \varphi_{h,i}} \cdot \frac{\sin \varphi_{h,i}}{\varphi_{h,i}}\right| = \sqrt{(1 - \sum_{m=1}^{n} p_m^2)}/c_i\,, \quad i = 1, \dots, n\,.$$

Poznámka. Za uvedených předpokladů je $d_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$.

Věta 4. *Distribuční parametr $d_i = |\sin \Theta|/c_i$ $(i = 1, \dots, n)$, kde Θ je úhel tečny strikční křivky v bodě $A(t)$ s prostorem $B_n(t)$.*

[3]) Srovnej [2], str. 355.

Důkaz plyne bezprostředně z věty 3 a definice úhlu přímky s lineárním prostorem (viz [6], vztah (1)).

Věta 5. *Pro úhel $\psi(t)$, který svírá tečný prostor monosystému V_{n+1} v bodě $X(t) = A(t) + u^i \boldsymbol{u}_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ prostoru $\boldsymbol{B}_n(t)$ s tečným prostorem monosystému V_{n+1} v bodě $A(t)$, platí*

$$\operatorname{tg}^2 \psi = \sum_{i=1}^{n} (u^i/d_i)^2 \,. \tag{6}$$

Důkaz. Tečný prostor $\tau(t)$ monosystému V_{n+1} v bodě $A(t)$ je $[A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_n(t), A'(t)]$, tečný prostor $\bar{\tau}(t)$ monosystému V_{n+1} v bodě $X(t)$ je $[A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_n(t), A'(t) + \sum_{i=1}^{n} u^i \boldsymbol{u}'_i(t)]$. V prostoru τ tvoří ortonormální basi vektory $\boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_n(t), \boldsymbol{u}_{2n+1}(t)$, v prostoru $\bar{\tau}$ vektory $\boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_n(t), \bar{\boldsymbol{u}}(t)$, kde

$$\bar{\boldsymbol{u}}(t) = \frac{\boldsymbol{u}_{2n+1} \sqrt{(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2)} + \sum_{i=1}^{n} u^i c_i \boldsymbol{u}_{n+i}}{\sqrt{(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n} (u^i c_i)^2)}} \,.$$

Tečné prostory τ a $\bar{\tau}$ mají společný prostor $\varrho(t) = [A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_n(t)]$. Označíme-li písmenem $\boldsymbol{N}$ matici

$$\left\| \begin{matrix} \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1, & \boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_1, & \ldots, & \boldsymbol{u}_n\boldsymbol{u}_1, & \boldsymbol{u}_{2n+1}\boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2, & \boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2, & \ldots, & \boldsymbol{u}_n\boldsymbol{u}_2, & \boldsymbol{u}_{2n+1}\boldsymbol{u}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_n, & \boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_n, & \ldots, & \boldsymbol{u}_n\boldsymbol{u}_n, & \boldsymbol{u}_{2n+1}\boldsymbol{u}_n \\ \boldsymbol{u}_1\bar{\boldsymbol{u}}, & \boldsymbol{u}_2\bar{\boldsymbol{u}}, & \ldots, & \boldsymbol{u}_n\bar{\boldsymbol{u}}, & \boldsymbol{u}_{2n+1}\bar{\boldsymbol{u}} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & \ldots, & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \ldots, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & \boldsymbol{u}_{2n+1}\bar{\boldsymbol{u}} \end{matrix} \right\| ,$$

pak pro polynom pro výpočet úhlů prostorů τ a $\bar{\tau}$ platí

$$|\boldsymbol{N}\boldsymbol{N}' - \lambda \boldsymbol{I}_{n+1}| = \left(\prod_{i=1}^{n} (1 - \lambda)\right) \left(\frac{1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2}{1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n} (u^i c_i)^2} - \lambda \right).$$

Dostáváme n nulových úhlů a úhel ψ, pro nějž

$$\cos^2 \psi = \frac{1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2}{1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n} (u^i c_i)^2}\,, \quad \sin^2 \psi = 1 - \cos^2 \psi = \frac{\sum_{i=1}^{n} (u^i c_i)^2}{1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n} (u^i c_i)^2}\,,$$

$$\operatorname{tg}^2 \psi = \frac{\sum_{i=1}^{n} (u^i c_i)^2}{1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{u_i}{d_i}\right)^2 .$$

2. PŘÍMKOVÁ PLOCHA V_2

Uvažujme nyní přímkovou plochu — označme ji V_2 — tvořenou přímkami

$$P_1(t) = [A(t), u_{2n+1}(t)] . \tag{7}$$

Omezme se nyní na $\Omega^* \subset \overline{\Omega}$, kde pro všechna $t \in \Omega^*$ platí ještě $\sum_{i=1}^{n} s_i^2 \neq 0$. Pak det $[A'(t), u_{2n+1}(t), u'_{2n+1}(t)] \neq 0$ a přímková plocha V_2 je nerozvinutelná. Hledejme její strikční křivku, tj. množinu bodů $C(t)$, pro něž je $C'(t)\, u'_{2n+1}(t) = 0$.

Věta 6. *Strikční křivka monosystému V_{n+1} je zároveň strikční křivkou přímkové plochy V_2.*

Důkaz. $C = A + \lambda u_{2n+1}$, $C' = A' + \lambda' u_{2n+1} + \lambda u'_{2n+1}$. Protože

$$A' = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i + u_{2n+1} \sqrt{(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2)} ,$$

$$u'_{2n+1} = - \sum_{i=1}^{n} s_i u_{n+i} ,$$

$$C' = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} s_i u_{n+i} + (\lambda' + u_{2n+1} \sqrt{(1 - \sum_{i=1}^{n} p_i^2)}$$

je $C' u'_{2n+1} = \lambda \sum_{i=1}^{n} s_i^2$. Body strikční křivky $C(t)$ dostáváme pro $\lambda = 0$.

Dále vypočteme distribuční parametr $\hat{p}$ plochy V_2.

Věta 7. *Pro distribuční parametr $\hat{p}$ plochy V_2 platí*

$$\hat{p} = \lim_{h \to 0} |l_h / \varphi_h| = \sqrt{(\sum_{i=1}^{n} p_i^2)} / \sum_{i=1}^{n} s_i^2 . \tag{8}$$

Důkaz. Průsečíky přímek $u_{2n+1}(t_0)$ a $u_{2n+1}(t_0 + h)$ s jejich osou budou body

$$P(h) = A(t_0) + \alpha(h)\, u_{2n+1}(t_0) , \quad Q(h) = A(t_0 + h) + \beta(h)\, u_{2n+1}(t_0 + h) .$$

Protože přímková plocha V_2 je nerozvinutelný monosystém tvořený prostory $[A(t), u_{2n+1}(t)]$, můžeme užít opět práce [3], kde M. Jůza dokázal, že $\lim_{h \to 0} \beta(h) = 0$. Ze vztahu (8) v této práci plyne $\lim_{h \to 0} (\beta(h) - \alpha(h))/h = -A'(t_0)\, u_{2n+1}(t_0)$, a dále pro $k_h = Q(h) - P(h) = h\, A'(t_0) - h(A'(t_0)\, u_{2n+1}(t_0))\, u_{2n+1}(t_0) + o(h)$.

$$\lim_{h \to 0} k_h / h = A'(t_0) - (A'(t_0)\, u_{2n+1}(t_0))\, u_{2n+1}(t_0) ,$$

a odtud

$$\lim_{h \to 0} \frac{l_h}{h} = \lim_{h \to 0} \sqrt{\left(\frac{k_h}{h} . \frac{k_h}{h}\right)} = (1 - (A'(t_0)\, u_{2n+1}(t_0))^2) = \sqrt{(\sum_{i=1}^{n} p_i^2)} . \tag{9}$$

Budiž φ_h úhel přímek $\boldsymbol{u}_{2n+1}(t_0)$ a $\boldsymbol{u}_{2n+1}(t_0 + h)$. Pak

$$\cos \varphi_h = \boldsymbol{u}_{2n+1}(t_0)\, \boldsymbol{u}_{2n+1}(t_0 + h) = 1 + \tfrac{1}{2}h^2 \boldsymbol{u}_{2n+1}(t_0)\, \boldsymbol{u}''_{2n+1}(t_0) + o(h^2) =$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}h^2 \boldsymbol{u}'_{2n+1}(t_0)\, \boldsymbol{u}'_{2n+1}(t_0) + o(h^2) = 1 - \tfrac{1}{2}h^2 \sum_{i=1}^{n} s_i^2 + o(h^2),$$

$$\sin \varphi_h = \sqrt{(1 - \cos^2 \varphi_h)} = |h| \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} s_i^2\right)},$$

(10) $$\lim_{h\to 0} |h|/\sin \varphi_h = 1/\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} s_i^2\right)}.$$

Ze vztahů (9) a (10) pak plyne

$$\hat{p} = \lim_{h\to 0} \left|\frac{l_h}{\varphi_h}\right| = \lim_{h\to 0} \left|\frac{l_h}{h} \cdot \frac{h}{\sin \varphi_h} \cdot \frac{\sin \varphi_h}{\varphi_h}\right| = \frac{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^2\right)}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} s_i^2\right)}}.$$

Poznámka. Zde si všimneme geometrické interpretace některých vyloučených případů.

a) Platí-li $\sum_{i=1}^{n} p_i^2(t) = 0$, pak $A'(t) = \varepsilon \boldsymbol{u}_{2n+1}(t)$, kde $\varepsilon = \pm 1$, pak $\boldsymbol{u}_{2n+1}(t)$ je tečnou křivky $A(t)$. Platí-li tento vztah pro $t \in \Omega' \subset \Omega$, pak $V_2(t)$ je plochou tečen křivky $A(t)$.

b) Platí-li $\sum_{i=1}^{n} s_i^2(t) = 0$ pro $t \in \Omega'' \subseteq \bar{\Omega}$, pak $\boldsymbol{u}'_{2n+1}(t) = 0$, vektor $\boldsymbol{u}_{2n+1}$ je konstatní a přímková plocha V_2 je plochou válcovou. Protože $\boldsymbol{u}_{2n+1}$ je kolmý k vektorům $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$, jsou všechny prostory $\boldsymbol{B}_n(t)$ kolmé k pevnému směru a tím rovnoběžné s určitou pevnou nadrovinou.

c) Platí-li pro $t \in \Omega''' \subset \Omega$ současně $\sum_{i=1}^{n} p_i^2(t) = 0$, $\sum_{i=1}^{n} s_i^2(t) = 0$, pak $\boldsymbol{u}_{2n+1}$ i A' jsou konstantní a strikční křivka A monosystému V_{n+1} je přímkou, která protíná všechny $\boldsymbol{B}_n(t)$ kolmo.

3. MONOSYSTÉM TVOŘENÝ PROSTORY $C_n(t)$

Uvažujme dále monosystém tvořený prostory

$$\boldsymbol{C}_n(t) = [A(t), \boldsymbol{u}_{n+1}(t), \boldsymbol{u}_{n+2}(t), \ldots, \boldsymbol{u}_{2n}(t)].$$

Označme prostor $\boldsymbol{C}_n(t)$ nyní $\hat{\boldsymbol{B}}_n(t)$ a příslušné vektory stříškou. Pak platí pro derivace vektorů prostoru $\hat{\boldsymbol{B}}_n(t)$:

$$\hat{\boldsymbol{u}}'_m = -c_m \boldsymbol{u}_m + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq m}}^{n} {}^m r_i \boldsymbol{u}_{n+i} + s_m \boldsymbol{u}_{2n+1}, \quad {}^m r_i + {}^i r_m = 0, \quad m = 1, \ldots, n.$$

Vektory $\hat{u}'_m(t)$ určují spolu s $\hat{B}_n(t)$ prostor $\hat{A}_{2n}(t)$ dimense $2n$. Tento prostor je určen vektory $u_{n+1}, \ldots, u_{2n}, -c_1 u_1 + \sum_{i=2}^{n} {}^1r_i u_{n+i} + s_1 u_{2n+1}, \ldots, -c_n u_n - \sum_{i=1}^{n} {}^i r_n u_{n+i} + s_n u_{2n+1}$. Tyto vektory jsou lineárně nezávislé. V opačném případě by totiž existovala čísla $\mu_1, \ldots, \mu_{2n}$, z nichž aspoň jedno by bylo různé od nuly takové, že

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \left(-c_i u_i + \sum_{j=1}^{n} {}^i r_j u_{n+j} + s_i u_{2n+1}\right) + \sum_{i=n+1}^{2n} \mu_i u_i = 0 ,$$

${}^i r_j + {}^j r_i = 0$. Násobíme-li postupně tento výraz vektory $u_1, \ldots, u_{2n}$ dostaneme $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{2n} = 0$.

Vektor kolmý k prostoru $\hat{A}_{2n}$ v E_{2n+1} označme $\hat{u}_{2n+1}$.

Věta 8. *Pro úhel γ přímky $\hat{u}_{2n+1}$ a prostoru $B_n(t)$ platí*

$$\operatorname{cotg} \gamma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{s_i}{c_i}\right)^2} . \tag{11}$$

Důkaz. K prostoru $\hat{A}_{2n}(t)$ existuje v E_{2n+1} právě jeden vektor kolmý. Označme písmenem v^* vektor

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} c_j\right) s_i u_i + \left(\prod_{j=1}^{n} c_j\right) u_{2n+1}\right)\Big/ g , \quad \text{kde} \quad g = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} c_i^2\right) s_j^2 + \prod_{j=1}^{n} c_j^2\right)} .$$

Tento vektor je zřejmě kolmý ke všem vektorům $u_{n+1}, \ldots, u_{2n}$. Spočtěme nyní skalární součin

$$\hat{u}'_m v^* = \frac{1}{g} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n} c_j\right) s_i u_i\right) (-c_m u_m) + \left(\prod_{j=1}^{n} c_j\right) u_{2n+1}\, s_m u_{2n+1} \right\} =$$

$$= \frac{1}{g} \left\{ - \left(\prod_{j=1}^{n} c_j\right) s_m + \left(\prod_{j=1}^{n} c_j\right) s_m \right\} = 0 , \quad m = 1, \ldots, n .$$

Odtud je zřejmé, že v^* je kolmý k prostoru $\hat{A}_{2n}$ a platí $v^* = \hat{u}_{2n+1}$.

Podle [6] platí pro úhel γ po úpravě

$$\cos^2 \gamma = \sum_{i=1}^{n} (\hat{u}_{2n+1} u_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{s_i}{c_i}\right)^2 \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{s_i}{c_i}\right)^2 + 1 \right)$$

a odtud plyne vztah (11).

Literatura

[1] *W. Haack:* Differential-Geometrie, Teil II., Wolfenbüttel und Hannover 1948.

[2] *V. Hlavatý:* Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet. Praha 1937.

[3] *M. Jůza:* Ligne de striction sur une généralisation à plusieurs dimensions d'une surface réglée. Чех. мат. журнал, *12* (*87*), 1962, 243–250.

[4] *M. Jůza:* Le système complet d'invariants d'un monosystème à trois dimensions dans l'espace euklidien à cinq dimensions. Чех. мат. журнал, *12* (*87*), 1962, 401–403.

[5] *A. Jůzová:* Eukleidovské invarianty monosystémů. Časopis pro pěstování matematiky *88* (1963), 1–13.

[6] *Č. Vitner:* O úhlech lineárních podprostorů v E_n. Časopis pro pěstování matematiky, *87* (1962), 415–422.

Adresa autora: Praha 1, Loretánské nám. 3 (Výzkumný ústav matematických strojů).

Резюме

МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НЕРАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ МОНОСИСТЕМ РАЗМЕРНОСТИ $n + 1$ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E_{2n+1}

ЛУДЕК ГРАНАТ (Luděk Granát), Прага

Пусть в евклидовом пространстве E_{2n+1} дано многообразие, образованное однопараметрической системой пространств (1); эту систему мы назовем моносистемой V_{n+1}. Пусть имеет место соотношение (2). Тогда в силу [5], если $\sum_{i=1}^{n} p_i^2 > 0$, можно выбрать в пространстве E_{2n+1} подвижной репер $\{A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \ldots, \boldsymbol{u}_{2n+1}(t)\}$ так, чтобы имели место соотношения (3).

Если мы определим параметр распределения моносистемы аналогичным образом, как параметр распределения линейчатой поверхности, т.е. $\lim_{h\to 0} |l_h/\varphi_h|$, где l_h является расстоянием точек пересечения общего перпендикуляра пространств $\boldsymbol{B}_n(t_0)$ и $\boldsymbol{B}_n(t_0 + h)$ с этими пространствами и φ_h является углом этих пространств, то можно к моносистеме V_{n+1} присоединить n параметров распределения (5). Для угла ψ, который образует касательное пространство моносистемы V_{n+1} в точке $X = A + u^i\boldsymbol{u}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ с пространством этой моносистемы в точке A, выполнено соотношение (6).

Далее рассматривается линейчатая поверхность V_2, образованная прямыми (7). Её стрикционная линия, при условии $\sum_{i=1}^{n} s_i^2 \neq 0$, совпадает с стрикционной линией моносистемы V_{n+1}. Для параметра распределения поверхности V_2 имеет место соотношение (8).

Zusammenfassung

METRISCHE EIGENSCHAFTEN DER NICHT ABWICKELBAREN MONOSYSTEME DER DIMENSION $n + 1$ IM EUKLIDISCHEN RAUME E_{2n+1}

LUDĚK GRANÁT, Praha

Es sei im Euklidischen Raume E_{2n+1} eine Mannigfaltigkeit, die durch ein Einparametersystem der Räume (1) gebildet ist, gegeben. Diese Mannigfaltigkeit wird das Monosystem genannt. Es gelte (2). Dann kann man nach [5], wenn $\sum_{i=1}^{n} p_i^2 > 0$ ist, im E_{2n+1} eine Basis $\{A(t), \boldsymbol{u}_1(t), \ldots, \boldsymbol{u}_{2n+1}(t)\}$ so bestimmen, daß die Relationen (3) gelten.

Wird der Drall des Monosystems in ähnlicher Weise wie der Drall der Regelfläche definiert, d.h. $\lim_{h\to 0} |l_h/\varphi_h|$, wo l_h der Abstand der Schnittpunkte des gemeinsammen Lotes auf die Räume $\boldsymbol{B}_n(t_0)$ und $\boldsymbol{B}_n(t_0 + h)$ mit diesen Räumen und φ_h der Winkel dieser Räume ist, dann kann man dem Monosystem V_{n+1} eine Anzahl von n Dralle (5) zuordnen. Für den Winkel ψ, den der Tangentialraum des Monosystems V_{n+1} im Punkt $X = A + u^i \boldsymbol{u}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ mit dem Tangentialraum desselben Monosystems im Punkt A bildet, gilt die Beziehung (6).

Weiter wird die Regelfläche V_2, die durch die Geraden (7) gebildet ist, untersucht. Ihre Kehlinie, unter der Voraussetzung $\sum_{i=1}^{n} s_i^2 \neq 0$, fällt mit der Kehllinie des Monosystems V_{n+1} zusammen. Für den Drall der Regelfläche V_2 gilt die Beziehung (8).