Časopis pro pěstování matematiky

Ladislav Mišík

Über die Ableitung der additiven Intervallfunktion

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 91 (1966), No. 4, 394--411

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117581

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

ÜBER DIE ABLEITUNG DER ADDITIVEN INTERVALLFUNKTION

LADISLAV MIŠÍK, Bratislava

(Eingelangt am 8. September 1965)

1

Die Funktion f ist eine Intervallfunktion, wenn sie auf der Menge aller abgeschlossenen Intervalle im n-dimensionalen euklidischen Raum E_n definiert ist (ihre Werte können nur reelle Zahlen sein). Die Intervallfunktion f ist additiv, wenn für jedes Paar solcher abgeschlosenen Intervalle I_1 und I_2, deren Vereinigung ein abgeschlossenes Intervall ist und die keine inneren Punkte gemeinsam haben, $f(I_1 \cup I_2) = f(I_1) + f(I_2)$ gilt. Es sei I ein abgeschlossenes Intervall im E_n und $l_1, l_2, \dots, l_n$ seien die Seiten des Intervalls I. l soll das Maximum von $l_1, l_2, \dots, l_n$ bedeuten. Dann wird die Zahl $l_1 l_2 \dots l_n / l^n$ der Parameter der Regularität genannt. Die Menge aller abgeschlossenen Intervalle, deren Parameter der Regularität größer oder gleich α ist, bezeichnen wir mit $\mathcal{S}_\alpha$. $\mathcal{S}$ bedeute die Menge aller abgeschlossenen Intervalle. Es seien $I_1, I_2, \dots, I_k$ abgeschlossene Intervalle, dann nennen wir ihre Vereinigung $\cup\{I_i : i = 1, 2, \dots, k\}$ eine Figur. Jede Figur kann man als eine Vereinigung von endlich vielen sich nicht überdeckenden abgeschlossenen Intervalle, d. h. abgeschlossenen Intervalle unter denen je zwei keine inneren Punkte gemeinsam haben, ausdrükken. Die Bezeichnung $d(I)$ soll der Durchmesser des Intervalls I sein.

Die Intervallfunktion f nennt man stetig, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine solche positive Zahl δ existiert, für die jede zwei abgeschlossenen Intervalle, welche die Ungleichung $m(I_1 \triangle I_2) < \delta$ erfüllen, die Ungleichung $|f(I_1) - f(I_2)| < \varepsilon$ erfüllen [12]. Dabei bedeutet $I_1 \triangle I_2$ die symmetrische Differenz der Intervalle I_1 und I_2, und $m(A)$ bedeutet das lebesguesche Maß der Menge A. Wenn die Intervallfunktion in diesem Sinne stetig ist, sagt man, daß sie metrisch stetig ist. Die Stetigkeit der Intervallfunktion kann auch folgendermaßen definiert werden: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, daß für jedes abgeschlossenes Intervall I, welches die Ungleichung $m(I) < \delta$ erfüllt, $|f(I)| < \varepsilon$ gilt ([15], S. 59). Jede additive Intervallfunktion, die im Sinne der zweiten Definition stetig ist, ist auch metrisch stetig [6]. Die additive Intervallfunktion f ist absolut stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta > 0$ existiert, daß für jede Figur R, deren Maß kleiner als α ist, die Ungleichung $|\sum\{f(I_i) : i = 1, 2, \dots, k\}| < \varepsilon$

gilt. Dabei soll die Figur R die Vereinigung von Intervallen $I_1, I_2, \ldots, I_k$ sein und die Intervalle $I_1, I_2, \ldots, I_k$ sollen sich nicht je zwei überdecken. Jede absolut stetige Funktion ist im Sinne der zweiten Definition stetig.

Für die Intervallfunktion f führen wir die untere und obere Ableitung im Punkte $x \in E_n$ des Typus α folgendermaßen ein: $\underline{\mathrm{D}}_\alpha f(x) = \sup\{\inf\{f(I)/m(I) : x \in I \in \mathscr{S}_\alpha, d(I) < \varepsilon\} : \varepsilon > 0\}$ und $\overline{\mathrm{D}}_\alpha f(x) = \inf\{\sup\{f(I)/m(I) : x \in I \in \mathscr{S}_\alpha, d(I) < \varepsilon\} : \varepsilon > 0\}$. Dabei bedeutet $\underline{\mathrm{D}}_\alpha f(x)$, bzw. $\overline{\mathrm{D}}_\alpha f(x)$ die untere, bzw. obere Ableitung von f im Punkte x. Wenn $\underline{\mathrm{D}}_\alpha f(x) = \overline{\mathrm{D}}_\alpha f(x)$ ist, dann sagen wir, daß die Intervallfunktion f die Ableitung $\mathrm{D}_\alpha f(x)$ des Typus α im x hat und es gilt für sie $\mathrm{D}_\alpha f(x) = \underline{\mathrm{D}}_\alpha f(x)$. Wenn $0 < \alpha' < \alpha \leqq 1$ ist, dann gilt

$$\underline{\mathrm{D}}_{\alpha'} f(x) \leqq \underline{\mathrm{D}}_\alpha f(x) \leqq \overline{\mathrm{D}}_\alpha f(x) \leqq \overline{\mathrm{D}}_{\alpha'} f(x) .$$

Weiter setzen wir

$$\underline{\mathrm{D}}_0 f(x) = \inf\{\underline{\mathrm{D}}_\alpha f(x) : 0 < \alpha \leqq 1\}$$

und

$$\overline{\mathrm{D}}_0 f(x) = \sup\{\overline{\mathrm{D}}_\alpha f(x) : 0 < \alpha \leqq 1\} .$$

Wenn man in der Definition von $\underline{\mathrm{D}}_\alpha f(x)$ und $\overline{\mathrm{D}}_\alpha f(x)$ das System $\mathscr{S}_\alpha$ durch das System $\mathscr{S}$ ersetzt, dann werden die dazu gehörigen Zahlen durch $\underline{\mathrm{D}} f(x)$ und $\overline{\mathrm{D}} f(x)$ bezeichnet, d. h.

$$\underline{\mathrm{D}} f(x) = \sup\left\{\inf\left\{\frac{f(I)}{m(I)} : x \in I \in \mathscr{S},\ d(I) < \varepsilon\right\} : \varepsilon > 0\right\}$$

und

$$\overline{\mathrm{D}} f(x) = \inf\left\{\sup\left\{\frac{f(I)}{m(I)} : x \in I \in \mathscr{S},\ d(I) < \varepsilon\right\} : \varepsilon > 0\right\} .$$

Wenn $\underline{\mathrm{D}}_0 f(x) = \overline{\mathrm{D}}_0 f(x)$ gilt, dann existiert die Ableitung $\mathrm{D}_0 f(x) = \underline{\mathrm{D}}_0 f(x)$ und wenn $\underline{\mathrm{D}} f(x) = \overline{\mathrm{D}} f(x)$ gilt, dann existiert die Ableitung $\mathrm{D} f(x) = \underline{\mathrm{D}} f(x)$. Immer gilt

$$\underline{\mathrm{D}} f(x) \leqq \underline{\mathrm{D}}_0 f(x) \leqq \underline{\mathrm{D}}_\alpha f(x) \leqq \underline{\mathrm{D}}_1 f(x) \leqq \overline{\mathrm{D}}_1 f(x) \leqq$$
$$\leqq \overline{\mathrm{D}}_\alpha f(x) \leqq \overline{\mathrm{D}}_0 f(x) \leqq \overline{\mathrm{D}} f(x) ,$$

wo $0 < \alpha < 1$ ist.

Es sei g eine Funktion, die auf E_n definiert ist. Es sei $\mathscr{B}$ die Basis aller offenen Intervalle in E_n. Die Funktion g gehört zu der Klasse $\mathscr{M}'_*(\mathscr{B})$, wenn für jede Zahl a die Mengen $\{x : g(x) \geqq a\}$ und $\{x : g(x) \leqq a\}$ folgende Eigenschaft haben: Wenn $B \in \mathscr{B}, B \subset \{x : g(x) \geqq a\}$, bzw. $B \subset \{x : g(x) \leqq a\}$ ist, dann ist $\bar{B} \subset \{x : g(x) \geqq a\}$, bzw. $\bar{B} \subset \{x : g(x) \leqq a\}$ [1]). Die Funktion g gehört zu der Klasse $\mathscr{M}'_0(\mathscr{B})$, bzw.

[1]) $\bar{B}$ bedeutet die abgeschlossene Hülle von B.

$\mathcal{M}'_1(\mathcal{B})$, wenn für jede Zahl a die Mengen $\{x : g(x) > a\}$ und $\{x : g(x) < a\}$ folgende Eigenschaft haben: Wenn $B \in \mathcal{B}$ und $\bar{B} \cap \{x : g(x) > a\}$ $(\bar{B} \cap \{x : g(x) < a\})$ nicht leer ist, dann existiert eine mindestens abzählbare, bzw. unabzählbare Menge A, welche im Durchschnitt $B \cap \{x : g(x) > a\}$ $(B \cap \{x : g(x) < a\})$ enthalten ist. Die Funktion g ist aus der Klasse $\mathcal{M}_*(\mathcal{B})$, bzw. $\mathcal{M}_0(\mathcal{B})$, bzw. $\mathcal{M}_1(\mathcal{B})$ dann und nur dann, wenn sie aus der ersten Baireschen Klasse und aus der Klasse $\mathcal{M}'_*(\mathcal{B})$, bzw. $\mathcal{M}'_0(\mathcal{B})$, bzw. $\mathcal{M}'_1(\mathcal{B})$ ist.

Die Funktion g hat die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathcal{B}$, wenn für sie folgendes gilt: Für jedes $B \in \mathcal{B}$, $x, y \in \bar{B}$ und die Zahl c mit der Eigenschaft $g(x) < c < g(y)$ existiert ein $\xi \in B$ so, daß $g(\xi) = c$ ist ([10] und [12]).

2

Es ist bekannt [8], daß die Ableitungen $\mathrm{D}_\alpha f$, wobei $0 \leqq \alpha \leqq 1$ ist, und $\mathrm{D}f$ die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ haben, wenn sie endlich sind. Wenn die Ableitungen $\mathrm{D}_\alpha f$, wobei $0 \leqq \alpha < 1$ ist, und $\mathrm{D}f$ endlich sind, gilt für sie der Mittelwertsatz [8]. Die Ableitungen $\mathrm{D}_\alpha f$, wobei $0 \leqq \alpha \leqq 1$ ist, und $\mathrm{D}f$ sind aus der ersten Baireschen Klasse ([5] und [9]). Aus dem Artikel [10] folgt jetzt, daß die Funktionen $\mathrm{D}_\alpha f$, $0 \leqq \alpha \leqq 1$, aus den Klassen $\mathcal{M}_*(\mathcal{B})$, $\mathcal{M}_0(\mathcal{B})$ und $\mathcal{M}_1(\mathcal{B})$ sind, wenn sie endlich sind.

J. Ridder hat in [14] gezeigt, daß $\mathrm{D}_1 f$ die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ hat, wenn f eine stetige additive Intervallfunktion ist. Daraus folgt nun, daß für jede stetige additive Intervallfunktion, die die Ableitung $\mathrm{D}_\alpha f$, $0 \leqq \alpha \leqq 1$, bzw. $\mathrm{D}f$ besitzt, die Ableitung $\mathrm{D}_\alpha f$, bzw. $\mathrm{D}f$ die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ hat. In diesem Fall gilt auch der Mittelwertsatz für $\mathrm{D}_\alpha f$, $0 \leqq \alpha \leqq 1$, bzw. $\mathrm{D}f$ (der Mittelwertsatz für $\mathrm{D}_1 f$ ist in [14] gegeben). Man kann den Mittelwertsatz für $\mathrm{D}_\alpha f$, bzw. $\mathrm{D}f$ und die Eigenschaft von Darboux für die Ableitung $\mathrm{D}_\alpha f$, bzw. $\mathrm{D}f$ unter Voraussetzungen, die schwächer als die Stetigkeit sind, beweisen.

Das Symbol $\langle a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots; a_n, b_n\rangle$ wird ein abgeschlossenes Intervall, welches durch die Ungleichungen $a_i \leqq x_i \leqq b_i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ gegeben ist, bedeuten. Es seien $I' = \langle a_1, b_1; \ldots; a_{i-1}; b_{i-1}; a_i, b_i; a_{i+1}; b_{i+1}; \ldots; a_n, b_n\rangle$ und $I'' = \langle a_1; b_1, \ldots; a_{i-1}, b_{i-1}; c_i, d_i; a_{i+1}, b_{i+1}; \ldots; a_n, b_n\rangle$ zwei Intervalle, wobei entweder $a_i > c_i$ und $b_i = d_i$ oder $a_i = c_i$ und $b_i < d_i$ ist. Das System aller Intervalle $I_t = \langle a_1; b_1, \ldots; a_{i-1}, b_{i-1}; (1-t)\, a_i + tc_i, b_i; a_{i+1}, b_{i+1}; \ldots; a_n, b_n\rangle$ für $t \in \langle 0, 1\rangle$ im Falle $a_i > c_i$ und das System $J_t = \langle a_1, b_1; \ldots; a_{i-1}, b_{i-1}; a_i, (1-t)\, b_i + td_i; a_{i+1}, b_{i+1}; \ldots; a_n, b_n\rangle$ für $t \in \langle 0, 1\rangle$ im Falle $b_i < d_i$ ist eine zusammenhängende Menge im metrischen Raum $(X(E_n), \varrho_0)$, wobei $X(E_n)$ das System aller abgeschlossenen Intervalle im E_n und $\varrho_0(I_1, I_2) = m(I_1 \triangle I_2)$ für jede $I_1, I_2 \in X(E_n)$ ist. Wir werden das System $\{I_t\}_{t\in\langle 0,1\rangle}$, bzw. $\{J_t\}_{t\in\langle 0,1\rangle}$ eine volle Kette von Intervallen von I' bis zum I'' nennen. Die Intervallfunktion f wird eine D_1^*-Intervallfunktion genannt, wenn die abgeschlossene Hülle des Bildes bei f von jeder vollen Kette eine zusammenhängende Menge ist.

T. Radaković hat in [13] eine D*-Funktion folgendermaßen definiert: Die Funktion g heißt auf einem abgeschlossenen Intervall J eine D*-Funktion, wenn für jedes $a, b \in J$, $a < b$, die abgeschlossene Hülle $\overline{g(\langle a, b\rangle)}$ des Bildes $g(\langle a, b\rangle)$ von $\langle a, b\rangle$ eine zusammenhängende Menge ist.

Es sei f eine Intervallfunktion und K eine volle Kette $\{I_t\}_{t\in\langle 0,1\rangle}$. Dann bezeichnen wir die Funktion $f(I_t)$, welche auf dem Intervall $\langle 0, 1\rangle$ definiert ist, durch f_K. Man beweist leicht, daß eine Intervallfunktion f dann und nur dann D_1^*-Intervallfunktion ist, wenn für jede volle Kette K die Funktion f_K eine D*-Funktion ist. Daraus und aus der Folgerung 6 von [11] geht folgende Behauptung hervor:

Lemma 1. *Es sei f eine D_1^*-Intervallfunktion und g eine metrisch stetige Intervallfunktion. Dann ist die Intervallfunktion fg eine D_1^*-Intervallfunktion.*

Lemma 2. *Es sei f eine additive D_1^*-Intervallfunktion, für welche $\mathrm{D}_\alpha f$, $0 \leqq \alpha < 1$, bzw. $\mathrm{D}f$ existiert. Dann ist die Ableitung $\mathrm{D}_\alpha f$, $0 \leqq \alpha < 1$, bzw. $\mathrm{D}f$ aus der Klasse $\mathscr{M}'_*(\mathscr{B})$.*

Beweis. Es genügt den Satz nur für den Fall der Ableitung $\mathrm{D}_\alpha f$, $0 < \alpha < 1$, zu beweisen. Es sei $B \in \mathscr{B}$, $\bar{B} = \langle a_1, b_1; \ldots; a_n, b_n\rangle$, $B \subset \{x : \mathrm{D}_\alpha f(x) \geqq a\}$ und $u \in \bar{B} - B$. Wir zeigen, daß $\mathrm{D}_\alpha f(u) < a$ unmöglich ist.

Es sei $\mathrm{D}_\alpha f(u) < a' < a$ und $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$. Dann existiert ein Intervall $I \in \mathscr{S}_\alpha$, dessen Parameter der Regularität größer als α ist und für das $u \in I \subset \bar{B}$ und $f(I)/m(I) < a'$ ist. Sei $I = \langle c_1, d_1; \ldots; c_n, d_n\rangle$. Wir zeigen nun, daß ein abgeschlossenes Intervall $I' = \langle e_1, f_1; \ldots; e_n, f_n\rangle$, dessen Parameter der Regularität größer als α ist, existiert so, daß $e_1 > a_1$ und $f(I')/m(I') < a'$ ist.

Wenn $c_1 > a_1$ ist, dann wird I als I' genommen. Es sei also $c_1 = a_1$. Es sei $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß $c_1 + \varepsilon < d_1$ und der Parameter der Regularität des Intervalls $I_\eta = \langle c_1 + \eta\varepsilon, d_1; c_2, d_2; \ldots; c_n, d_n\rangle$ für jedes $0 \leqq \eta \leqq 1$ größer als α ist. Das System $\{I_t\}_{t\langle\in 0,1\rangle}$ ist eine volle Kette von Intervallen. Da die Intervallfunktion $f(J)/m(J)$ nach dem Lemma 1 eine D_1^*-Intervallfunktion ist und nachdem $f(I_0)/m(I_0) < a'$ ist, gibt es ein abgeschlossenes Intervall I_η so, daß $f(I_\eta)/m(I_\eta) < a'$ und $0 < \eta < 1$ ist. Man sieht unmittelbar, daß man I_η für I' nehmen kann.

Jetzt können wir ähnlich beweisen, daß es ein abgeschlossenes Intervall $I'' = \langle e'_1, f'_1; \ldots; e'_n, f'_n\rangle$, dessen Parameter der Regularität größer als α ist, so gibt, daß $a_1 < e'_1 < f'_1 < d_1$ und $f(I'')/m(I'') < a'$ ist. Wenn man diese Betrachtung fortsetzt, so kommt man zu einem abgeschlossenen Intervall Y, dessen Parameter der Regularität größer als α ist und für das $Y \subset B$ und $f(Y)/m(Y) < a'$ ist. Daraus kann man durch Teilung die Existenz von mindestens einem solchen Punkt $v \in Y$ beweisen, daß $\mathrm{D}_\alpha f(v) \leqq a' < a$ ist. Das ist aber mit der Relation $B \subset \{x : \mathrm{D}_\alpha f(x) \geqq a\}$ in Wiederspruch.

Damit wurde bewiesen, daß für die Menge $\{x : \mathrm{D}_\alpha f(x) \geqq a\}$ folgendes gilt: Wenn $B \subset \{x : \mathrm{D}_\alpha f(x) \geqq a\}$ ist, dann ist auch $\bar{B} \subset \{x : \mathrm{D}_\alpha f(x) \geqq a\}$. Ähnlich beweist man, daß diese Eigenschaft auch die Menge $\{x : \mathrm{D}_\alpha f(x) \leqq a\}$ für jedes a hat. Es gehört also für $0 < \alpha < 1$ die Ableitung $\mathrm{D}_\alpha f$ zu der Klasse $\mathcal{M}'_*(\mathcal{B})$.

Satz 1. *Sei f eine additive D_1^*-Intervallfunktion, für die die Ableitung $\mathrm{D}_\alpha f$ $(0 \leqq \alpha < 1)$, bzw. $\mathrm{D}f$ existiert. Dann hat $\mathrm{D}_\alpha f$, bzw. $\mathrm{D}f$ die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.*

Beweis. Es genügt den Satz nur für den Fall der Ableitung $\mathrm{D}_\alpha f$, $0 < \alpha < 1$, zu beweisen.

Es sei $B \in \mathcal{B}$, $x, y \in \bar{B}$, $\mathrm{D}_\alpha f(x) < c < \mathrm{D}_\alpha f(y)$ und $\mathrm{D}_\alpha f(u) \neq c$ für jedes $u \in B$. Wir setzen $A_1 = \{u : u \in B, \mathrm{D}_\alpha f(u) \leqq c\}$ und $A_2 = \{u : u \in B, \mathrm{D}_\alpha f(u) \geqq c\}$. Dann ist $B = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Dabei bedeutet $\emptyset$ die leere Menge. Auf Grund des Lemma 2 und der Eigenschaft von B sind die Mengen $A_1' \cap A_2$ und $A_1 \cap A_2'$ nicht leer ([10], S. 48). Dabei bedeutet A_1' die Ableitung der Menge A_1. Es sei $x_1 \in A_1' \cap A_2$. Dann existiert ein $B_1 \in \mathcal{B}$, für das folgendes gilt: $\bar{B}_1 \subset B$, $\bar{B}_1 \in \mathcal{S}_\alpha$, $f(\bar{B}_1) > c\, m(B_1)$, $x_1 \in B_1$ und $d(B_1) < 1$. Die Gleichung $B_1 = (B_1 \cap A_1) \cup (B_1 \cap A_2)$ bedeutet eine Zerlegung der Menge B_1 in zwei nicht leere disjunkte Mengen. Die Mengen $(B_1 \cap A_1)' \cap (B_1 \cap A_2)$ und $(B_1 \cap A_1) \cap (B_1 \cap A_2)'$ sind nicht leer. Es sei $x_2 \in$ $\in (B_1 \cap A_1) \cap (B_1 \cap A_2)'$. Dann existiert ein $B_2 \in \mathcal{B}$, für das folgendes gilt: $\bar{B}_2 \in \mathcal{S}_\alpha$, $f(\bar{B}_2) < c\, m(B_2)$, $x_2 \in B_2$, $\bar{B}_2 \subset B_1$ und $d(B_2) < \frac{1}{2}$.

Wir können also zwei Folgen $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ und $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ so konstruieren, daß für $n =$ $= 1, 2, 3, \ldots$ folgendes gilt: $B_n \in \mathcal{B}$, $\bar{B}_n \in \mathcal{S}_\alpha$, $x_n \in B_n$, $\bar{B}_{n+1} \subset B_n$, $\bar{B}_1 \subset B$, $d(B_n) < 1/n$, $f(\bar{B}_{2n+1}) > c\, m(B_{2n+1})$ und $f(\bar{B}_{2n}) < c\, m(B_{2n})$. Es sei $\bar{x} \in \cap\{\bar{B}_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$. Dann ist $\bar{x} \in B$ und $\mathrm{D}_\alpha f(\bar{x}) = c$. Dieses ist aber nicht möglich. Also muß $\mathrm{D}_\alpha f$ die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ haben.

Wir bemerken, daß der Satz 1 eine unmittelbare Folgerung des Lemma 2 und des Satzes 1 aus [10] ist. Der Satz 1 aus [10] gilt auch für die Funktionen, welche $\pm\infty$ als Werte annehmen können.

Satz 2. *Es sei f eine additive D_1^*-Intervallfunktion, für die die Ableitung $\mathrm{D}_\alpha f$ $(0 \leqq \alpha < 1)$, bzw. $\mathrm{D}f$ existiert. Dann existiert für jedes abgeschlossene Intervall I ein Punkt P_I so, daß $f(I) = \mathrm{D}_\alpha f(P_I)\, m(I)$, bzw. $f(I) = \mathrm{D}f(P_I)\, m(I)$ gilt und daß P_I dem Inneren von I zugehört.*

Beweis. Der Satz wird nur für den Fall $\mathrm{D}_\alpha f$, $0 < \alpha < 1$, bewiesen. Es ist leicht zu beweisen, daß für jedes P aus dem Inneren von I die Ungleichung $\mathrm{D}_\alpha f(P) < f(I)/m(I)$ nicht gelten kann. Daraus folgt nämlich, daß $\mathrm{D}_\alpha f(P) \leqq f(I)/m(I)$ für jeden Punkt aus I gilt. Das hat zur Folge, daß $f(J)/m(J) \leqq f(I)/m(I)$ für jedes abgeschlossene Intervall $J \subset I$ gilt. Es existiert also eine Teilung $\{J_1, J_2, \ldots, J_k\}$ des Intervalls I so, daß $f(J_i)/m(J_i) \leqq f(I)m(I)$ für $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ gilt und daß in der vorigen Ungleichung die Gleichung mindenstens für eine Zahl i nicht gilt.

Aus denselben Gründen kann die Ungleichung $\mathrm{D}_\alpha f(P) > f(I)/m(I)$ für jedes P aus dem Inneren von I nicht gelten. Also müßen zwei Punkte P_1 und P_2 aus dem

Inneren von I so existieren, daß $D_\alpha f(P_1) \leqq f(I)/m(I) \leqq D_\alpha f(P_2)$ gilt. Aus dem Satz 1 geht hervor, daß solcher Punkt P_I aus dem Inneren von I existiert, für den $f(I) = D_\alpha f(P_I)\, m(I)$ gilt.

In ähnlicher Weise kann man folgende Sätze beweisen:

Satz 3. *Sei f eine Funktion einer reellen Variablen die eine* D*-*Funktion ist. Existiert die Ableitung f', dann hat sie die Eigenschaft von Darboux.*

Satz 4. *Es sei f eine Funktion einer reellen Variablen, die eine* D*-*Funktion ist. Existiert die Ableitung f', dann gilt der Mittelwertsatz für f', d. h. für jede zwei Zahlen a und b, $a < b$, existiert eine Zahl ξ, für die $a < \xi < b$ und $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ gilt.*

Zu den Sätzen 3 und 4 fügen wir zu, daß jede Funktion einer reellen Variablen, welche die Ableitung besitzt, nur höchstens abzählbar viele Unstetigkeitspunkte hat (nach einem Satz von A. Brudno [1]), also ist sie aus der ersten Baireschen Klasse. Wenn sie dazu noch eine D*-Funktion ist, dann hat sie nach dem Satz 8 aus [11] die Eigenschaft von Darboux. Es ist also in den Sätzen 3 und 4 die Bedingung der D*-Funktion gegenüber der Eigenschaft von Darboux nur scheinbar schwächer.

Die Behauptung, daß die Ableitung einer Funktion mit der Eigenschaft von Darboux diese Eigenschaft besitzt, ist bekannt [2], S. 96. J. Mařík hat mir in einem Brief mitgeteilt, daß man in ähnlicher Weise, wie den Satz 1, folgenden allgemeineren Satz beweisen kann:

Es sei f eine endliche reelle Funktion einer reellen Veränderlichen, die im Intervall I definiert ist und für welche folgendes gilt:

1° *Für jedes $x \in I$, für welches $f(x^+) = \lim_{u \to x^+} f(u)$ existiert, gilt $f(x^+) = f(x)$;*

2° *für jedes $x \in I$, für welches $f(x^-) = \lim_{u \to x^-} f(u)$ existiert, gilt $f(x^-) = f(x)$;*

3° *für jedes $x \in I$ existiert eine endliche oder unendliche Ableitung $f'(x)$.*

Dann hat f' die Eigenschaft von Darboux.

Daraus folgt jetzt, daß man im Satze 4 über die Funktion f 1° und 2° voraussetzen kann anstatt, daß sie eine D^*-Funktion ist.

Bemerken wir, daß man die Existenz von $\lim_{u \to x^+} f(u)$ im 1°. und von $\lim_{u \to x^-} f(u)$ im 2°. im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne nehmen muß. Wenn man $\lim_{u \to x^+} f(u)$ im 1°. und $\lim_{u \to x^-} f(u)$ im 2° nur im eigentlichen Sinne versteht, dann ist die Behauptung von J. Mařík nicht richtig. Das sieht man leicht aus dem Beispiel folgender Funktion $f : f(x) = 1/x$ für $x < 0$ und $f(x) = \sqrt{x}$ für $x \geqq 0$.

Wir bemerken noch zu den Sätzen 1 und 2, daß jede additive Intervallfunktion f, die eine endliche Ableitung besitzt, eine D_1^*-Intervallfunktion ist. Die Intervallfunktion f ist nämlich metrisch stetig und darum auch eine D_1^*-Intervallfunktion [7].

Wir zeigen jetzt auf einem Beispiel, daß man im Lemma 1 und in dem Satz 1 die Voraussetzung, daß die Intervallfunktion f eine D_1^*-Intervallfunktion ist, nicht auslassen kann.

Wir nehmen den Raum E_1 und definieren die Intervallfunktion f folgendermaßen: $f(I) = m(I)$, wenn $0 \notin I$ ist, $f(\langle -1, 0\rangle) = f(\langle 0, 1\rangle) = 0$ und f ist additiv. Aus der Additivität der Funktion f geht hervor, daß für den Fall $0 \in I$ folgendes gilt: $f(I) = m(I') - 1 + \overline{f(I - I')}$, wenn $I \subset \langle 0, \infty)$ und $I' = I \cap \langle 0, 1\rangle$, $f(I) = m(I'') - 1 + \overline{f(I - I'')}$, wenn $I \subset (-\infty, 0\rangle$ und $I'' = I \cap \langle -1, 0\rangle$ und $f(I) = m(I' \cup I'') - 2 + \overline{f(I - (I' \cup I''))}$, wenn $I \cap (0, \infty)$ und $I \cap (-\infty, 0)$ nicht leer sind und wenn $I' = I \cap \langle 0, 1\rangle$ und $I'' = I \cap \langle -1, 0\rangle$ ist. Es ist leicht zu sehen, daß $D_\alpha f(x) = 1$ für $0 \leqq \alpha \leqq 1$ und $Df(x) = 1$ für $x \neq 0$ and $D_\alpha f(0) = Df(0) = -\infty$ ist.

3

In diesem Teil der Arbeit wird gezeigt, daß die Ableitung $D_\alpha f$, $0 \leqq \alpha \leqq 1$, bzw. Df aus einer Klasse von Funktionen ist, die ähnlich wie die Klasse $\mathscr{M}_2$ aus [16] definiert werden kann. Es gilt auch für $D_\alpha f$, $0 \leqq \alpha \leqq 1$, bzw. Df ein Satz, der dem Satz von Denjoy für die Ableitungen der Funktionen einer reellen Veränderlichen ähnlich ist.

Es sei $x \in E_n$ und $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Es sei i eine natürliche Zahl, für die $1 \leqq i \leqq n$ gilt. Dann nennt man die Mengen $\{y : y = (y_1, y_2, \dots, y_n),\ y_i \leqq x_i\}$ und $\{y : y = (y_1, y_2, \dots, y_n),\ y_i \geqq x_i\}$ zueinander gegenliegende Halbräume, welche zu dem Punkt x und zu der Koordinate i gehören. Diese Halbräume sind durch die Hyperebene $\{y : y = (y_1, y_2, \dots, y_n),\ y_i = x_i\}$ definiert. $\mathscr{P}(x)$ soll das System aller solchen Durchschnitte von n abgeschlossenen Halbräumen sein, aus denen jedes zum Punkt x gehört und je zwei verschiedene von ihnen zu verschiedenen Koordinaten gehören.

Wenn x ein Punkt aus E_n ist, und wenn $P \in \mathscr{P}(x)$ ist, dann nennen wir das Intervall J, welches in P liegt und x enthält, als zu P und zu dem Punkt x anliegend. Die Menge A hat die Eigenschaft M_2 dann und nur dann, wenn A eine F_σ-Menge ist und wenn entweder $A = \emptyset$ oder für jedes $x \in A$, für jedes $P \in \mathscr{P}(x)$ und jedes zum P und zu dem Punkt x anliegendes Intervall J $m(A \cap J) > 0$ gilt. Die Funktion g gehört zu der Klasse $\mathscr{M}_2$ dann und nur dann, wenn jede Menge $\{x : g(x) > a\}$ und $\{x : g(x) < a\}$ für jede Zahl a die Eigenschaft M_2 hat.

Satz 5. *Sei f eine stetige additive Intervallfunktion, für welche $D_1 f$ existiert. Dann gehört $D_1 f$ zu der Klasse $\mathscr{M}_2$.*

Beweis. Sei $D_1 f(x_0) > a$, $P \in \mathscr{P}(x_0)$ und J ein zu P und zu dem Punkt x_0 anliegendes Intervall. Jetzt zeigen wir, daß $m(\{x : D_1 f(x) > a\} \cap J) = 0$ nicht möglich ist.

Es sei $m(\{x : \mathrm{D}_1 f(x) > a\} \cap J) = 0$. Dann existiert zu der Zahl $b > a$ ein Punkt $x_1 \in \operatorname{int} J$ so[2]), daß $a < \mathrm{D}_1 f(x_1) < b$ ist. Es sei $P_1 \in \mathscr{P}(x_1)$, $P_1 \subset P$ und J_1 ein Intervall, daß in J enthalten und zu P_1 und zu dem Punkt x_1 anliegend ist. Wir definieren: $E_a = \{u : u \in J_1,\ \mathrm{D}_1 f(u) \leqq a\}$, $A = \{u : u \in J_1,\ \mathrm{D}_1 f(u) \in (a, b)\}$ und $E_b = \{u : u \in J_1,\ \mathrm{D}_1 f(u) \geqq b\}$. Es gilt $J_1 = E_a \cup A \cup E_b$ und die Mengen E_a, A und E_b sind paarweise fremd. Es ist weiter $m(A) = 0$, nachdem $m(\{x : \mathrm{D}_1 f(x) > a\} \cap J) = 0$ ist.

Weiter wird gezeigt, daß $A \subset E'_a \cap E'_b$ ist. Sei $x \in A$ und $x \notin E'_a$. Dann existiert ein Intervall $J_2 \subset J_1$, $J_2 \in \mathscr{S}_1$ so, daß $x \in J_2$ und $J_2 \cap E_a = \emptyset$ ist. Dann gilt auch $\mathrm{D}_1 f(u) > a$ für jedes $u \in J_2$ und $\mathrm{D}_1 f(u) \geqq b$ für fast alle $u \in J_2$. Nach einem Satz von [14], § 5 ist $f(I) \geqq b\, m(I)$ für jedes Intervall I, welches in J_2 enthalten ist. Daraus folgt jetzt, daß $\mathrm{D}_1 f(x) \geqq b$ ist. Das ist aber wegen der Relation $x \in A$ unmöglich. Ähnlich beweist man, daß $A \subset E'_b$ ist.

Es sei $A_0 = A \cap \operatorname{int} J_1$. Die Menge A_0 ist nicht leer, da $a < \mathrm{D}_1 f(x_1) < b$ ist und weil die Ableitung $\mathrm{D}_1 f$ die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}$ hat. Es sei $y \in A_0$ und I ein beliebiges Intervall, welches y im Inneren enthält und im int J_1 enthalten ist. Dann existieren im I Punkte aus E_a und E_b. Es muß also $\inf \{\mathrm{D}_1 f(u) : u \in I \cap A_0\} = a$ und $\sup \{\mathrm{D}_1 f(u) : u \in I \cap A_0\} = b$ sein, nachdem $\mathrm{D}_1 f$ die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}$ hat. Daraus folgt jetzt, daß die Ableitung $\mathrm{D}_1 f$, wenn sie nur auf $\bar{A}_0$ betrachtet wird, keinen Stetigkeitspunkt hat. Das widerspricht aber der Tatsache, daß $\mathrm{D}_1 f$ der ersten Baireschen Klasse zugehört.

Wir bekamen also einen Wiederspruch und es muß also $m(\{x : \mathrm{D}_1 f(x) > a\} \cap J) > 0$ sein. Damit wurde bewiesen, daß die Menge $\{x : \mathrm{D}_1 f(x) > a\}$ die Eigenschaft M_2 hat. Ähnlich beweist man, daß auch die Menge $\{x : \mathrm{D}_1 f(x) < a\}$ für jede Zahl a die Eigenschaft M_2 hat. Also gehört die Ableitung $\mathrm{D}_1 f$ der Klasse $\mathscr{M}_2$ zu.

Der Beweis des Satzes 5 zeigt daß folgender Satz richtig ist:

Satz 6. *Es sei f eine stetige additive Intervallfunktion, die die Ableitung $\mathrm{D}_1 f$ hat. Dann ist für jedes Intervall I die Menge $\{x : x \in I,\ a < \mathrm{D}_1 f(x) < b\}$ entweder leer oder von positivem Maß.*

Ähnliche Behauptungen gelten auch für die Ableitung $\mathrm{D}_\alpha f$, wobei $0 \leqq \alpha < 1$ ist und auch für die Ableitung $\mathrm{D}f$, wenn f eine additive D_1^*-Intervallfunktion ist. Dazu brauchen wir zuerst eine Behauptung zu beweisen.

Lemma 3. *Es sei $0 \leqq \alpha < 1$. Sei weiter $\overline{\mathrm{D}}_\alpha f(x) \geqq 0$, bzw. $\underline{\mathrm{D}}_\alpha f(x) \leqq 0$ fast überall auf dem Intervall J und es sei noch $\underline{\mathrm{D}}_\alpha f$, bzw. $\overline{\mathrm{D}}_\alpha f$ auf J nach unten, bzw. nach oben beschränkt. Dann ist $f(I) \geqq 0$, bzw. $f(I) \leqq 0$ für jedes Intervall I, das in J enthalten ist.*

Beweis. Wir beweisen nur den auf $f(I) \geqq 0$ sich beziehenden Teil des Lemma.

---

[2]) int J bedeutet das Innere von J.

Es sei

$$(1) \qquad \underline{\mathrm{D}}_\alpha f(x) \geqq K$$

für jedes $x \in J$. Wir können annehmen, daß $K < 0$ ist. Es sei $I \subset J$ ein Intervall und $\varepsilon > 0$. Bezeichnen wir $A = \{x : \overline{\mathrm{D}}_\alpha f(x) \geqq 0\} \cap \operatorname{int} I$. Aus der Definition der Menge A geht folgendes hervor: es existiert zu jedem Punkt $x \in A$ eine solche Folge $\{J_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ der Intervallen aus $\mathscr{S}_\alpha$, welche in I enthalten sind, daß $x \in J_i(x)$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$ $\lim_i d(J_i(x)) = 0$ und $f(J_i(x)) > -\varepsilon m(J_i(x))$ ist. Nach dem Satz (3.1) aus [15], S. 109 existiert ein endliches System der Intervalle $J_1, J_2, \ldots, J_k$, welche zueinander punkt-fremd sind und die folgende Eigenschaften haben:

$$(2) \qquad m(A - \cup\{J_i : i = 1, 2, \ldots, k\}) < \varepsilon,\ f(J_i) > -\varepsilon m(J_i) \quad \text{und}$$
$$J_i \in \mathscr{S}_\alpha \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

ist.

Aus der Arbeit [8], S. 271 geht hervor, daß eine Teilung $J_1, J_2, \ldots, J_k, J_{k+1}, \ldots, J_s$ des Intervalls I existiert, für die alle Intervalle dem System $\mathscr{S}_\alpha$ zugehören. In der Folge von (1), (2), von Lemma 2 aus [8] und von der Gleichung $m(A) = m(I)$ folgt, daß

$$\begin{aligned}(3) \quad f(I) &= \sum\{f(J_i) : i = 1, 2, \ldots, s\} = \sum\{f(J_i) : i = 1, 2, \ldots, k\} + \\ &+ \sum\{f(J_i) : i = k+1, k+2, \ldots, s\} > -\varepsilon \sum\{m(J_i) : i = 1, 2, \ldots, k\} + \\ &+ K \sum\{m(J_i) : i = k+1, k+2, \ldots, s\} \geqq -\varepsilon m(I) + \\ &+ K m(A - \cup\{J_i : i = 1, 2, \ldots, k\}) > -\varepsilon m(I) + K\varepsilon = (K - m(I))\,\varepsilon\end{aligned}$$

ist.

Aus (3) folgt jetzt, daß $f(I) \geqq 0$ ist.

Mit Hilfe von Lemma 3 beweist man den Satz 7 ähnlich, wie man den Satz 5 bewiesen hat.

Satz 7. *Es sei $0 \leqq \alpha < 1$. Es sei f eine additive D_1^*-Intervallfunktion, die die Ableitung $\mathrm{D}_\alpha f$, bzw. $\mathrm{D}f$ besitzt. Dann ist $\mathrm{D}_\alpha f$, bzw. $\mathrm{D}f$ aus der Klasse $\mathscr{M}_2$.*

Es gilt auch dieser Satz:

Satz 8. *Es sei f eine additive D_1^*-Intervallfunktion, die die Ableitung $\mathrm{D}_\alpha f$, $0 \leqq \alpha < 1$, bzw. $\mathrm{D}f$ besitzt. Dann ist die Menge $\{x : x \in I,\ a < \mathrm{D}_\alpha f(x) < b\}$, bzw. $\{x : \mathrm{D}f(x) \in (a, b)\}$ für jedes abgeschlossene Intervall I und jede zwei Zahlen a und b entweder leer oder von positivem Maß.*

Für die Funktion g einer reellen Veränderlichen, welche im Intervall $\langle a, b\rangle$ eine endliche Ableitung g' besitzt, wurde von A. Denjoy [4] gezeigt, daß die Menge $\{x : x \in \langle a, b\rangle,\ \alpha < g'(x) < \beta\}$ leer oder von positivem Maß ist. Den Satz hat J. A. Clarkson [3] auch für stetige Funktionen, die eine endliche oder unendliche Ableitung besitzen, verallgemeinert. S. MARCUS hat in [6] gezeigt, daß diese Eigenschaft auch die approximative Ableitung von einer approximativ stetigen Funktion hat. Aus dem Beweise des Satzes 5 sieht man, daß auch folgende Behauptung gilt: *Wenn g eine D*-Funktion einer reellen Veränderlichen ist, die die Ableitung g' hat, dann ist die Menge $\{x : x \in \langle a, b \rangle, \alpha < g'(x) < \beta\}$ für jedes abgeschlossene Intervall $\langle a, b \rangle$ und jede zwei Zahlen α und β entweder leer oder von positivem Maß*[3]. Es ist bekannt, daß jede approximativ stetige Funktion die Eigenschaft von Darboux hat und aus der ersten Baireschen Klasse ist. Es ist eine offene Frage, ob man in dem Satz von S. MARCUS die approximative Stetigkeit durch eine schwächere Bedingung, zum Beispiel durch die Annahme, daß die betrachtete Funktion eine D*-Funktion ist, ersetzen kann.

Jetzt geben wir noch eine Verallgemeinerung des Lemma 3.

Satz 9. *Es sei $0 \leqq \alpha < 1$. Es sei J ein abgeschlossenes Intervall. Es sei weiter $\underline{\mathrm{D}}_\alpha f(x) > -\infty$, bzw. $\overline{\mathrm{D}}_\alpha f(x) < \infty$ für jedes $x \in J$ und es soll $\underline{\mathrm{D}}_\alpha f$, bzw. $\overline{\mathrm{D}}_\alpha f$ wesentlich nach unten, bzw. nach oben beschränkt sein*[4]. *Wenn $\overline{\mathrm{D}}_\alpha f(x) \geqq 0$, bzw. $\underline{\mathrm{D}}_\alpha f(x) \leqq$ $\leqq 0$ fast überall in J ist, dann ist $f(I) \geqq 0$, bzw. $f(I) \leqq 0$ für jedes Intervall I, welches in J enthalten ist.*

Beweis. Die Behauptung beweisen wir für den Fall $f(I) \geqq 0$. Es sei $\varepsilon > 0$ und I sei ein abgeschlossenes Intervall, welches in J enthalten ist. Es sei K eine solche Zahl, für die das Maß der Menge $M = \{x : \underline{\mathrm{D}}_\alpha f(x) \leqq K\}$ gleich 0 ist. Dann existiert nach [14], § 4 eine solche stetige additive Intervallfunktion g, für die

(4) $\quad \mathrm{D}_\alpha g(x) = \infty$ für $x \in M$ und $0 \leqq g(I') < \varepsilon$ für jedes abgeschlossene Intervall $I' \subset J$

ist. Dann ist $f + g$ eine additive Intervallfunktion, für die $\underline{\mathrm{D}}_\alpha(f + g)(x) \geqq K$ für jedes $x \in J$ und $\overline{\mathrm{D}}_\alpha(f + g)(x) \geqq 0$ fast überall ist. Aus dem Lemma 3 folgt jetzt, daß $(f + g)(I) \geqq 0$ ist. Daraus und aus (4) folgt, daß $f(I) \geqq -g(I) > -\varepsilon$ ist. Also ist $f(I) \geqq 0$.

Lemma 4. *Es sei f eine wesentlich beschränkte Funktion, die zugleich zu der Klasse $\mathscr{M}_2$ gehört. Dann ist f beschränkt.*

Beweis. Es sei $m(\{x : |f(x)| > K\}) = 0$. Wir wollen zeigen, daß in diesem Fall $A = \{x : |f(x)| > K\} = \emptyset$ ist. Wäre nämlich $x_0 \in A$, dann ist entweder $f(x_0) > K$ oder $f(x_0) < -K$. In dem ersten Fall gilt für jedes $P \in \mathscr{P}(x_0)$ und für jedes zu P und zu dem Punkt x_0 anliegendes Intervall J $m(\{x : f(x) > K\} \cap J) > 0$. Das ist

[3]) Die Voraussetzung, daß die Funktion g eine D^*-Funktion ist, kann man auch hier, wie in Sätzen 3 und 4, durch 1.° und 2.° ersetzen.

[4]) Die Funktion g ist nach oben, bzw. nach unten wesentlich beschränkt, wenn es ein C so gibt, daß $m(\{x : g(x) \geqq C\}) = 0$, bzw. $m(\{x : g(x) \leqq C\}) = 0$ ist. Die Funktion ist wesentlich beschränkt, wenn sie nach oben und nach unten wesentlich beschränkt ist.

aber unmöglich, weil $\{x : f(x) > K\} \cap J \subset \{x : |f(x)| > K\} = A$ und $m(A) = 0$ ist. Ähnlich beweist man, daß $f(x_0) < -K$ unmöglich ist. Daraus folgt jetzt, daß $A = \emptyset$ ist.

Folgerung 1. *Wenn die stetige additive Intervallfunktion f die Ableitung $\mathrm{D}_1 f$ hat, und wenn diese Ableitung wesentlich beschränkt ist, dann ist $\mathrm{D}_1 f$ schon beschränkt. Wenn eine additive D_1^*-Intervallfunktion die Ableitung $\mathrm{D}_\alpha f$, $0 \leqq \alpha < 1$, bzw. $\mathrm{D}f$ besitzt, und wenn diese Ableitung wesentlich beschränkt ist, dann ist sie schon beschränkt.*

4

Z. Żahorski hat in [16] folgendes bewiesen: *Es sei f eine Funktion einer reellen Veränderlichen, welche die Ableitung f' besitzt. Dann ist f' aus der Klasse $\mathcal{M}_3$, wenn f' endlich ist. Wenn f' beschränkt ist, dann ist f' aus der Klasse $\mathcal{M}_4$.* Ein ähnliches Resultat gilt auch für die Ableitung $\mathrm{D}f$, wobei f eine additive Intervallfunktion ist.

Es sei P ein abgeschlossener Halbraum, der durch die Hyperebene π bestimmt ist. Es sei weiter $J \subset P$ ein abgeschlossenes Intervall, dessen eine Seite in π liegt. Wenn $J_1 \neq J$ ein abgeschlossenes Intervall ist, welches in J enthalten ist un welches eine Seite mit J in π gemeinsam hat, dann sagen wir, daß das Intervall J_1 das Intervall J paralell zu π teilt. Dabei soll die Zahl $m(J_1)/m(J - J_1)$ der Parameter der Teilung heißen.

Die Menge A hat die Eigenschaft M_3, wenn sie entweder leer ist oder wenn eine solche Folge $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$ von abgeschlossenen Mengen und eine solche Zahlenfolge $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ existiert, daß folgendes gilt: es ist

$$A = \cup\{F_i : i = 1, 2, 3, \ldots\}\,, \quad 0 \leqq \eta_i < 1\,, \tag{5}$$

für jedes $x \in F_i$ und $c > 0$ existiert ein $\varepsilon(x, c) > 0$ so, daß für jeden abgeschlossenen Halbraum P, der durch π bestimmt ist und zu dem Punkt x und zu irgendeiner Koordinate gehört, und für jedes zu P und zu x anliegendes Intervall I mit $d(I) < \varepsilon(x, c)$ und für jedes Intervall I_1, welches das Intervall I paralell zu π teilt und deren Parameter der Teilung kleiner als c ist, die Ungleichung

$$\frac{m(A \cap (I - I_1))}{m(I - I_1)} > \eta_i \tag{6}$$

gilt. Die Menge A hat die Eigenschaft M_4, wenn sie die Eigenschaft M_3 hat und wenn man die Zahlen η_i in (5) positiv wählen kann.

Es soll $\mathcal{M}_3$, bzw. $\mathcal{M}_4$ die Menge aller Funktionen f bedeuten, für die die Mengen $\{x : f(x) > a\}$ und $\{x : f(x) < a\}$ für jede Zahl a die Eigenschaft M_3, bzw. M_4 haben.

Satz 10. *Es sei f eine additive Intervallfunktion, die eine endliche Ableitung* $\mathrm{D}f$ *besitzt. Dann hat die Menge* $\{x : a < \mathrm{D}f(x) < b\}$ *die Eigenschaft* M_3. *Dabei sind a und b beliebige Zahlen und* $a < b$.

Beweis. Es sei $A = \{x : a < \mathrm{D}f(x) < b\}$. Da die Funktion $\mathrm{D}f$ aus der ersten Baireschen Klasse ist, ist die Menge A eine F_σ-Menge. Also gilt $A = \cup\{F_i : i = 1, 2, 3, \ldots\}$, wobei F_i für $i = 1, 2, 3, \ldots$ eine abgeschlossene Menge ist. Jetzt wählen wir $\eta_i = 0$ für $i = 1, 2, 3, \ldots$

Es sei $x_0 \in F_i$. Es ist also $\mathrm{D}f(x_0) = \alpha \in (a, b)$. Es sei c eine beliebige positive Zahl und η eine solche positive Zahl, daß $\eta(2c + 1) \in (0, \mathrm{Min}\,((\alpha - a)/2), (b - \alpha)/2))$ ist.

Es sei P ein abgeschlossener Halbraum, der zu dem Punkt x_0 und zu einer Koordinate gehört und der durch die Hyperebene π bestimmt ist. Es sei weiter I ein abgeschlossenes Intervall, das zu P und x_0 anliegend ist. Dann gilt

$$f(I) = \alpha\, m(I) + \eta(x_0, I)\, m(I)\,. \tag{7}$$

Da $\mathrm{D}f(x_0) = \alpha$ ist, muß $\lim\limits_{d(I)\to 0} \eta(x_0, I) = 0$ sein. Es existiert also eine positive Zahl $\varepsilon(x_0, c)$ so, daß

$$|\eta(x_0, I)| < \eta \tag{8}$$

gilt, wenn $d(I) < \varepsilon(x_0, c)$ ist. Es soll jetzt $\mathrm{d}(I) < \varepsilon(x_0, c)$ und I_1 ein solches Intervall sein, das I mit dem Parameter, der kleiner als c ist, paralell zu π teilt. Wenn $I_2 = \overline{I - I_1}$ ist, dann muß

$$\frac{a + \alpha}{2} < \frac{f(I_2)}{m(I_2)} < \frac{b + \alpha}{2} \tag{9}$$

sein.

Wir zeigen, daß $m(A \cap I_2) > 0$ ist.

Es wird angenommen, daß $m(A \cap I_2) = 0$ ist und dieses zu einem Wiederspruch geführt. Es sei $B = \{x : x \in I_2, \mathrm{D}f(x) \leqq a\}$ und $C = \{x : x \in I_2, \mathrm{D}f(x) \geqq b\}$. Die Menge Q definieren wir durch die Gleichung $Q = I_2 \cap B' \cap C'$.

Es sei $x \in A \cap I_2$ und $I_3 \subset I_2$ ein beliebiges abgeschlossenes Intervall, das den Punkt x enthält. Mit Hilfe vom Lemma 3 zeigt man, daß $I_3 \cap B \neq \emptyset$ und $I_3 \cap C \neq \emptyset$ gelten muß. Daraus folgt, daß $x \in Q$ ist. Aus (9) bekommen wir, daß $A \cap I_2 \neq \emptyset$ und also auch $Q \neq \emptyset$ ist.

Jetzt zeigen, wir daß die Menge $\{x : x \in I_2, \mathrm{D}f(x) = \beta\}$ für jedes $\beta \in (a, b)$ eine dichte Teilmenge von Q ist. Es sei $z \in Q$ und J ein beliebiges Intervall, welches den Punkt z als inneren Punkt enthält. Dann sind die Mengen $J \cap B$ und $J \cap C$ nicht leer. Da die Ableitung $\mathrm{D}f$ die Eigenschaft von Darboux bezüglich der Basis $\mathscr{B}$ aller offenen Intervalle hat, folgt nun, daß der Durchschnitt $\{x : x \in I_2, \mathrm{D}f(x) = \beta\} \cap J$ für $\beta \in (a, b)$ nicht leer ist. Das bedeutet aber, daß die Menge $\{x : x \in I_2, \mathrm{D}f(x) = \beta\}$ eine dichte Teilmenge von Q ist.

Man sieht jetzt leicht, daß die partielle Funktion $\mathrm{D}f$ auf der Menge Q in keinem ihrer Punkte stetig ist. Das ist aber nicht möglich, nachdem die Ableitung $\mathrm{D}f$ zu der ersten Baireschen Klasse gehört und Q eine perfekte Menge ist.

Es muß also $m(A \cap I_2) > 0$ sein. Daraus folgt nun, daß die Menge $\{x : a < \mathrm{D}f(x) < b\}$ die Eigenschaft M_3 hat.

Satz 11. *Jede endliche Ableitung* $\mathrm{D}f$ *einer additiven Intervallfunktion* f *gehört zu der Klasse* $\mathcal{M}_3$.

Beweis. Der Satz ist eine unmittelbare Folge des Satzes 7 und der Gleichungen $\{x : a < \mathrm{D}f(x)\} = \cup\{\{x : a < \mathrm{D}f(x) < a + n\} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ und $\{x : \mathrm{D}f(x) < a\} = \cup\{\{x : a - n < \mathrm{D}f(x) < a\} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$.

Satz 12. *Es sei* $0 \leqq \alpha < 1$. *Sei* f *eine additive Intervallfunktion, deren Ableitung* $\mathrm{D}_\alpha f$, *bzw.* $\mathrm{D}f$ *auf der Figur* R *beschränkt ist. Dann ist die Funktion* f *auf der Figur* R *absolut stetig und*

$$f(I) = \int_I \mathrm{D}_\alpha f \, \mathrm{d}m\,, \quad bzw. \quad f(I) = \int_I \mathrm{D}f \, \mathrm{d}m \tag{10}$$

gilt für jedes abgeschlossene Intervall $I \subset R$.

Beweis. Es sei $0 \leqq \alpha < 1$ und $|\mathrm{D}_\alpha f(x)| \leqq K$ für jedes $x \in R$. Dann gilt

$$|f(I)| \leqq K\, m(I) \tag{11}$$

für jedes abgeschlossene Intervall $I \subset R$. Aus der Ungleichung (11) geht hervor, daß die Funktion f absolut stetig auf der Figur R ist. Sie ist also auch von beschränkter Variation ([15], S. 93). Aus der Ungleichung (11) bekommt man noch, daß $-K \leqq \underline{\mathrm{D}}f(x) \leqq \overline{\mathrm{D}}f(x) \leqq K$ für jedes $x \in R$ ist. Aus dem Satz (11.15) aus [15], S. 137 folgt, daß $\mathrm{D}f$ fast überall existiert und $\mathrm{D}f = \mathrm{D}_\alpha f$ fast überall auf R ist. Aus dem Satz (7.8) aus [15], S. 121 geht hervor, daß (10) gilt.

Satz 13. *Es sei* f *eine additive* D_1^* *– Intervallfunktion, deren Ableitung* $\mathrm{D}f$ *wesentlich beschränkt ist. Dann gehört* $\mathrm{D}f$ *zu der Klasse* $\mathcal{M}_4$.

Beweis. Es sei a eine Zahl und $A = \{x : \mathrm{D}f(x) > a\}$. Setzen wir $g(I) = f(I) - a\, m(I)$ für jedes Intervall I. Dann gilt $A = \{x : \mathrm{D}g(x) > 0\} = \cup\{\{x : \mathrm{D}g(x) > 1/k\} : k = 1, 2, 3, \ldots\} = \cup\{\cup\{F_{i,k} : i = 1, 2, 3, \ldots\} : k = 1, 2, 3, \ldots\}$, wobei $F_{i,k}$ für $i, k = 1, 2, 3, \ldots$ abgeschlossene Mengen sind, für die noch die Gleichung

$$\left\{x : \mathrm{D}g(x) > \frac{1}{k}\right\} = \cup\{F_{i,k} : i = 1, 2, 3, \ldots\}$$

gilt. Laut der Folgerung 1 ist zu sehen, daß $\mathrm{D}f$ beschränkt ist. Da $\mathrm{D}f$ beschränkt ist, existiert eine Zahl K so, daß

$$|\mathrm{D}g(x)| \leqq K \tag{12}$$

für jedes x ist. Jetzt wählen wir $\eta_{i,k} = 1/2kK$ für $i, k = 1, 2, 3, \ldots$

Es sei $x_0 \in F_{i,k}$ und $c > 0$. Es sei weiter η eine solche positive Zahl, daß

$$\eta(2c + 1) < \frac{1}{2k} \tag{13}$$

ist. Wir nehmen an daß P ein abgeschlosener Halbraum ist, der zu dem Punkt x_0 und zu einer Koordinate gehört. Er soll durch die Hyperebene π bestimmt sein. Es sei weiter I ein abgeschlossenes, zu P und x_0 anliegendes Intervall, und I_1 soll I paralell zu π teilen. Dann gilt

$$g(I) = \mathrm{D}g(x_0)\, m(I) + \eta(x_0, I)\, m(I) \tag{14}$$

und

$$g(I_1) = \mathrm{D}g(x_0)\, m(I_1) + \eta(x_0, I_1)\, m(I_1)\,. \tag{15}$$

Da $\mathrm{D}g(x_0)$ existiert, gilt $\lim\limits_{d(I)\to 0} \eta(x_0, I) = 0$. Darum muß auch eine Zahl $\varepsilon(x_0, c) > 0$ existieren, daß für jedes zu P und zu x_0 anliegendes Intervall I mit $d(I) < \varepsilon(x_0, c)$ die Ungleichung $|\eta(x_0, I)| < \eta$ gilt. Daraus folgt jetzt, daß für jedes Intervall I mit den gegebenen Eigenschaften und für jedes Intervall I_1, welches das Intervall I mit einem Parameter der Teilung, der kleiner als c ist, teilt, die Ungleichung

$$\left|(\eta(x_0, I) - \eta(x_0, I_1))\, \frac{m(I_1)}{m(I - I_1)} + \eta(x_0, I)\right| \leqq \eta(2c + 1) < \frac{1}{2k} \tag{16}$$

erfüllt ist.

Aus (14), (15) und (16) folgt jetzt folgendes: für jedes zu P und zu x_0 anliegendes Intervall I mit $d(I) < \varepsilon(x_0, c)$ und für jedes Intervall I_1, welches das Intervall I mit dem Parameter der Teilung, kleinerem als c, teilt, ist die Ungleichung

$$\frac{g(I_2)}{m(I_2)} = \mathrm{D}g(x_0) + (\eta(x_0, I) - \eta(x_0, I_1))\, \frac{m(I_1)}{m(I_2)} + \eta(x_0, I) > \frac{1}{k} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{2k} \tag{17}$$

erfüllt. Dabei bedeutet I_2 das Intervall $\overline{I - I_1}$.

Aus dem Satze 9 und aus (12) bekommt man, daß

$$g(I_2) = \int_{I_2} \mathrm{D}g \,\mathrm{d}m = \int_{I_2 \cap A} \mathrm{D}g \,\mathrm{d}m + \int_{I_2 - A} \mathrm{D}g \,\mathrm{d}m \leqq \tag{18}$$
$$\leqq \int_{I_2 \cap A} \mathrm{D}g \,\mathrm{d}m \leqq K\, m(I_2 \cap A)$$

ist.

Aus (17) und (18) folgt, daß

$$\frac{m(I_2 \cap A)}{m(I_2)} \geqq \frac{1}{K} \frac{g(I_1)}{m(I_2)} > \frac{1}{2kK}$$

ist.

Die Menge A hat also die Eigenschaft M_4. Ähnlich stellt man fest, daß auch die Menge $\{x : \mathrm{D}f(x) < a\}$ für jede Zahl a die Eigenschaft M_4 hat. Also ist die Ableitung $\mathrm{D}f$ aus der Klasse $\mathcal{M}_4$.

5

Eine Intervallfunktion f nennt man im Punkt x lokal stetig, wenn ein abgeschlossenes Intervall I existiert, für das $x \in \operatorname{int} I$ und f stetig auf dem metrischen Raum $X(I)$ aller abgeschlossenen Intervalle, die in I enthalten sind, ist. Dabei soll die Metrik ϱ_0 die Gleichung $\varrho_0(I_1, I_2) = m(I_1 \triangle I_2)$ bestimmen.

Satz 14. *Es sei f eine additive Intervallfunktion, die im Punkte x_0 lokal stetig ist, und im Punkte x_0 eine stetige Ableitung $\mathrm{D}_1 f$ hat. Dann existiert auch $\mathrm{D}f(x_0)$, und es gilt $\mathrm{D}f(x_0) = \mathrm{D}_1 f(x_0)$.*

Beweis. Es sei I ein Intervall, für das $x_0 \in \operatorname{int} I$ und f auf $X(I)$ stetig ist. Es sei $\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von abgeschlossenen Intervallen, die x_0 enthalten, so daß $\lim_k d(J_k) = 0$ ist. Da $\mathrm{D}_1 f$ in x_0 stetig ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ solche eine Zahl $\delta > 0$, daß

$$|\mathrm{D}_1 f(x) - \mathrm{D}_1 f(x_0)| < \varepsilon \tag{19}$$

für jedes x, das die Ungleichung $\varrho(x, x_0) < \delta$ erfüllt, gilt. Dabei ist ϱ die Metrik in E_n. Dann existiert eine natürliche Zahl N so, daß $J_k \subset I$ und $\sup\{\varrho(x, x_0) : x \in J_k\} < \delta$ für $k > N$ ist. Für $k > N$ existiert ein Punkt ξ_k, daß

$$f(J_k) = \mathrm{D}_1 f(\xi_k)\, m(J_k) \tag{20}$$

gilt.

Aus (19) und (20) bekommt man, daß

$$\left|\frac{f(J_k)}{m(J_k)} - \mathrm{D}_1 f(x_0)\right| = |\mathrm{D}_1 f(\xi_k) - \mathrm{D}_1 f(x_0)| < \varepsilon$$

für $k > N$ ist. Darum muß

$$\lim_k \frac{f(J_k)}{m(J_k)} = \mathrm{D}_1 f(x_0)$$

sein. Es existiert also $\mathrm{D}f(x_0)$ und es gilt $\mathrm{D}f(x_0) = \mathrm{D}_1 f(x_0)$.

Folgerung 2. *Wenn für eine stetige additive Intervallfunktion f die Ableitung $\mathrm{D}_1 f$ auf E_n existiert, und auf E_n stetig ist, dann existiert $\mathrm{D}f$ überall in E_n und es gilt $\mathrm{D}f = \mathrm{D}_1 f$.*

Es ist bekannt, daß das Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge von Ableitungen der Funktionen einer reellen Variablen auch eine Ableitung einer Funktion einer reellen Variablen ist. Ähnliches gilt auch für die Ableitungen von additiven Intervallfunktionen.

Satz 15. *Es sei $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von Funktionen, die auf einer Figur R gleichmäßig gegen f konvergiert. Es sei für $n = 1, 2, 3, \ldots$ $f_n(x) = \mathrm{D}_\alpha \Phi_n(x)$, bzw. $f_n(x) = \mathrm{D}\Phi_n(x)$ für $x \in R$, wobei $0 \leqq \alpha < 1$ und Φ_n für $n = 1, 2, 3, \ldots$ eine additive Intervallfunktion ist. Dann gibt es eine additive Intervallfunktion Φ, die das gleichmäßige Limes auf der Menge aller Intervalle, die in R enthalten sind, von der Folge $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ist und $f(x) = \mathrm{D}_\alpha \Phi(x)$, bzw. $f(x) = \mathrm{D}\Phi(x)$ für $x \in R$ ist.*

Beweis. Sei I ein abgeschlossenes Intervall, daß in R enthalten ist. Dann gilt $\Phi_{n+p}(I) - \Phi_n(I) = (\mathrm{D}_\alpha \Phi_{n+p}(\xi) - \mathrm{D}_\alpha \Phi_n(\xi))\, m(I) = (f_{n+p}(\xi) - f_n(\xi))\, m(I)$ für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$, $p = 1, 2, 3, \ldots$ und für ein geeignetes ξ aus dem Inneren von I. Da die Folge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ gleichmäßig auf R gegen f konvergiert, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ so, daß $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon/m(R)$ für jedes $x \in R$, $n > N(\varepsilon)$ und $p = 1, 2, 3, \ldots$ gilt. Es gilt also für jedes $n > N(\varepsilon)$ und $p = 1, 2, 3, \ldots$ und jedes, in R enthaltenes Intervall I, die Ungleichung $|\Phi_{n+p}(I) - \Phi_n(I)| < \varepsilon$. Die Folge $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert also gleichmäßig auf der Menge aller Intervalle, die in R enthalten sind, gegen eine Funktion Φ. Man sieht leicht, daß die Funktion Φ eine additive Intervallfunktion ist. Wir bemerken noch, daß die Funktion Φ stetig ist, falls die Funktionen Φ_n stetig sind.

Wir zeigen nun, daß auch die Folge $\{\Phi_n(I)/m(I)\}_{n=1}^{\infty}$ gleichmäßig auf der Menge aller Intervalle, die in R enthalten sind, gegen die Funktion $\Phi(I)/m(I)$ konvergiert. Es sei $\varepsilon > 0$ und $N_1(\varepsilon)$ eine natürliche Zahl so, daß $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ für $x \in R$, $n > N_1(\varepsilon)$ und $p = 1, 2, 3, \ldots$ ist. Dann gilt

$$\left|\frac{\Phi_{n+p}(I)}{m(I)} - \frac{\Phi_n(I)}{m(I)}\right| = |\mathrm{D}_\alpha \Phi_{n+p}(\xi) - \mathrm{D}_\alpha \Phi_n(\xi)| = |f_{n+p}(\xi) - f_n(\xi)| < \varepsilon$$

für $n > N_1(\varepsilon)$, $p = 1, 2, 3, \ldots$ und jedes Intervall $I \subset R$. Dabei ist ξ der gewiße Punkt aus dem Inneren von I, dessen Existenz der Mittelwertsatz sichert. Daraus folgt nun, daß die Folge $\{\Phi_n(I\}/m(I)\}_{n=1}^{\infty}$ gleichmäßig auf der Menge aller Intervalle, die in R enthalten sind, gegen die Funktion $\Phi(I)/m(I)$ strebt.

Es sei $x \in R$ und $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine beliebige Folge von Intervallen aus $\mathscr{S}_\alpha$, für welche $\lim_k d(I_k) = 0$ ist. Es sei $\varepsilon > 0$ und n eine natürliche Zahl so, daß $|f(u) - f_n(u)| < \varepsilon/3$ für jedes $u \in R$ und

$$\left|\frac{\Phi_n(I)}{m(I)} - \frac{\Phi(I)}{m(I)}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für jedes Intervall $I \subset R$ gilt. Nun wird eine natürliche Zahl K so gewählt, daß

$$\left| f_n(x) - \frac{\Phi_n(I_k)}{m(I_k)} \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für $k > K$ ist. Dann gilt

$$\left| f(x) - \frac{\Phi(I_k)}{m(I_k)} \right| \leqq |f(x) - f_n(x)| + \left| f_n(x) - \frac{\Phi_n(I_k)}{m(I_k)} \right| + \left| \frac{\Phi_n(I_k)}{m(I_k)} - \frac{\Phi(I_k)}{m(I_k)} \right| < \varepsilon$$

für $k > K$. Es existiert also $\mathrm{D}_\alpha \Phi(x)$ und es gilt $f(x) = \mathrm{D}_\alpha \Phi(x)$.

Der Beweis für die Ableitung $\mathrm{D}\Phi$ ist analog.

Für den Fall der Ableitung $\mathrm{D}_1 \Phi$ gilt ein ähnlicher Satz, wenn man noch die Stetigkeit der Funktionen Φ_n voraussetzt.

Betrachten wir jetzt eine Figur R und die Klasse aller auf der Figur R beschränkten Ableitungen $\mathrm{D}_\alpha \Phi$ der additiven Intervallfunktionen Φ. Dann bilden diese mit der gleichmäßigen Norm einen Banachschen Raum.

Literatur

[1] *Brudno A.:* Непрерывность и дифференцуемость, Мат. Сборник, *13* (*55*), (1943), 119–134,

[2] *Bruckner A. M.* and *Ceder J. G.*, Darboux Continuity, Jber. Deutsch. Math.-Verein. *67* (1965), *93*–117.

[3] *Clarkson J. A.:* A property of derivatives, Bull. Amer. Math. Soc., *53* (1947), 124–125.

[4] *Denjoy A.:* Sur une propriété des fonctions dérivées, Enseignement Math., *18* (1916), 320–328.

[5] *Gleyzal A.:* Interval functions, Duke Math. J., *8* (1941), 223–230.

[6] *Marcus S.:* On a theorem of Denjoy and on Approximate Derivative, Monatshefte Math., *66* (1962), 435–440.

[7] *Mišík L.:* Über stetige Intervallfunktionen, im Druck.

[8] *Mišík L.:* Über den Mittelwertsatz für additive Zellenfunktionen, Mat. fyz. časopis SAV *13* (1963), 260–274.

[9] *Mišík L.:* Die Funktionen der ersten Baireschen Klasse, Mat. fyz. časopis SAV *15* (1965), 296–303.

[10] *Mišík L.:* Über die Funktionen der ersten Baireschen Klasse mit der Eigenschaft von Darboux, Mat. fyz. časopis SAV *14* (1964), 44–49.

[11] *Mišík L.:* Über die Eigenschaft von Darboux und einige Klassen von Funktionen, Revue roumaine de math. pures et appl. *11* (1966), 411–430.

[12] *Neugebauer C. J.:* Darboux property for functions of several variables, Trans. Amer. Math. Soc., *107* (1963), 30–37.

[13] *Radaković T.:* Über Darbouxsche und stetige Funktionen, Monatshefte Math. Phys. *38* (1931), 117–122.

[14] *Ridder J.:* Über stetige additive Intervallfunktionen in der Ebene und ihre Derivierten, Nieuw Arch. Wiskunde *16* (1929), 55–69.

[15] *Saks S.:* Theory of the Integral, New York, 1937.

[16] *Zahorski Z.:* Sur la première dérivée, Trans. Amer. Math. Soc. *69* (1950), 1–54.

Anschrift des Verfassers: Bratislava, Obrancov mieru 41 (Matematický ústav SAV).

Výťah

O DERIVÁCII ADITÍVNEJ FUNKCIE INTERVALU

LADISLAV MIŠÍK, Bratislava

V práci sa dokazuje — za podmienok slabších ako je spojitosť — veta o strednej hodnote a Denjoyova vlastnosť pre deriváciu aditívnej funkcie intervalu. Ďalej sa odvodzujú vlastnosti pre deriváciu aditívnej funkcie intervalu, ktoré sú podobné vlastnostiam, ktoré má derivácia funkcie jednej reálnej pramennej a ktoré sú odvodené v práci [16].

Резюме

О ПРОИЗВОДНОЙ АДДИТИВНОЙ ФУНКЦИИ ПРОМЕЖУТКА

ЛАДИСЛАВ МИШИК, (Ladislav Mišík), Братислава

В этой работе доказывается — при условии более слабом чем непрерывность — теорема о среднем значении и свойства Данжуа для производной аддитивной функции промежутка. Далее приводятся свойства для производной аддитивной функции промежутка, подобные свойствам, которые имеет производная функции одной действительной переменной и которые находятся в работе [16].