Vladimír Doležal; Jaromír Hroník

O zobecněné Clairautově diferenciální rovnici

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 91 (1966), No. 3, 254--260

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117566`

O ZOBECNĚNÉ CLAIRAUTOVĚ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICI

VLADIMÍR DOLEŽAL, Praha a JAROMÍR HRONÍK, Brno

(Došlo dne 20. března 1965)

I

Vyšetřujme vlastnosti diferenciální rovnice n-tého řádu

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k y^{(k)} = f(y^{(n)}) . \tag{1}$$

Uvedenou rovnici můžeme nazvat zobecněnou Clairautovou diferenciální rovnicí, neboť zřejmě pro $n = 1$ obdržíme Clairautovu rovnici. Ukážeme dále, že vlastnosti rovnice (1) jsou velmi obdobné vlastnostem rovnice Clairautovy.

Věta 1. *Nechť funkce f je definována na nějakém intervalu I. Potom má rovnice* (1) *řešení vyjádřené vztahem*

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k x^k + \frac{(-1)^n}{n!} f(n!\, C_n) , \tag{2}$$

kde C_k $(k = 1, 2, \ldots, n - 1)$ jsou libovolné konstanty, kdežto $n!\, C_n \in I$.

Důkaz této věty je zřejmý.

Pro Clairautovu rovnici je to jednoparametrická soustava přímek, pro rovnici druhého řádu dvouparametrická soustava parabol, pro $n = 3$ je to tříparametrická soustava kubických parabol atd.

Splňuje-li funkce f v rovnici (1) některé další předpoklady jak dále uvedeme, má rovnice (1) ještě druhé tzv. singulární řešení.

Nechť funkce f má v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ spojitou derivaci. Buď Φ funkce definovaná v intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ taková, že $\Phi^{(n)}$ je funkce absolutně spojitá a $t_1 \leqq \Phi^{(n)}(x) \leqq t_2$. Pak též funkce $L(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} (n!/k!)\, x^k\, \Phi^{(k)}(x)$ je absolutně spojitá a platí tudíž v intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ skoro všude $L'(x) = x^n \Phi^{(n+1)}(x)$. Také funkce $P(x) = f(\Phi^{(n)}(x))$ je absolutně spojitá a platí $P'(x) = f'(\Phi^{(n)}(x))\, \Phi^{(n+1)}(x)$ pro skoro všechna $x \in \in \langle x_1, x_2 \rangle$.

Je zřejmé, že jestliže $\Phi^{(n+1)}(x) = 0$ pro skoro všechna $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$, pak $L'(x) = P'(x)$ skoro všude v $\langle x_1, x_2 \rangle$. Odtud vyplývá, že $\Phi(x) + D$, kde D je nějaká určitá konstanta je řešením rovnice (1). To však již víme z věty 1, dokonce za obecnějších předpokladů o funkci f a můžeme v dalším předpokládat, že $\Phi^{(n+1)}(x)$ není pro skoro všechna $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$ rovna 0.

Podobně, jestliže pro skoro všechna $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$ je

$$x^n = f'(\Phi^{(n)}(x)) \tag{3}$$

pak $L'(x) = P'(x)$ skoro všude v $\langle x_1, x_2 \rangle$ a opět dojdeme k tomu, že funkce $\Phi(x) + D$, kde

$$(-1)^n\, n!\, D = f(\Phi^{(n)}(x_0)) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x_0^k\, \Phi^{(k)}(x_0)\,, \quad x_0 \in \langle x_1, x_2 \rangle \tag{4}$$

je řešením rovnice (1).

Hledejme tedy takovou funkci Φ a takový interval $\langle x_1, x_2 \rangle$, aby platil vztah (3).

Nechť je nejprve n liché číslo. Jestliže je f' rostoucí [klesající] funkce v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$, pak existuje funkce φ definovaná v intervalu $\langle f'(t_1), f'(t_2) \rangle$ [$\langle f'(t_2), f'(t_1) \rangle$], která je inversní funkcí k funkci f'. Definujeme-li nyní funkci $\Phi^{(n)}$ předpisem

(5)

$$\Phi^{(n)}(x) = \varphi(x^n) \quad \text{pro} \quad x \in \langle \sqrt[n]{[f'(t_1)]}, \sqrt[n]{[f'(t_2)]} \rangle \; [x \in \langle \sqrt[n]{[f'(t_2)]}, \sqrt[n]{[f'(t_1)]} \rangle]\,,$$

pak zřejmě platí vztah (3). Protože potřebujeme absolutní spojitost funkce $\Phi^{(n)}$ je nutno předpokládat, že též funkce φ je absolutně spojitá.

Podobně nechť n je sudé a nechť f' je rostoucí [klesající] nezáporná funkce v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$. Potom obdobně jako v předcházejícím případě nalezneme funkci φ a definujeme funkci $\Phi^{(n)}$. Tentokráte můžeme definovat tuto funkci $\Phi^{(n)}$ jednak v intervalu $\langle \sqrt[n]{[f'(t_1)]}, \sqrt[n]{[f'(t_2)]} \rangle$ [$\langle \sqrt[n]{[f'(t_2)}, \sqrt[n]{[f'(t_1)]} \rangle$], jednak v intervalu $\langle -\sqrt[n]{[f'(t_2)]}, -\sqrt[n]{[f'(t_1)]} \rangle$ [$\langle -\sqrt[n]{[f'(t_1)]}, -\sqrt[n]{[f'(t_2)]} \rangle$].

Je vidět, že když n je sudé a platí $f'(t) < 0$, pak nelze nalézt x a Φ tak, aby platil vztah (3), neboť vždy bude $x^n - f'[\Phi^{(n)}(x)] > 0$. Můžeme tedy vyslovit tuto větu:

Věta 2. *Nechť funkce f má v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ spojitou a rostoucí [klesající] derivaci f'. Nechť inversní funkce k funkci f' je absolutně spojitá.*

Je-li n liché přirozené číslo, pak pro $x \in \langle \sqrt[n]{[f'(t_1)]}, \sqrt[n]{[f'(t_2)]} \rangle$ [$\langle \sqrt[n]{[f'(t_2)]}, \sqrt[n]{[f'(t_1)]} \rangle$] existuje singulární řešení rovnice (1) dané vztahem

$$\bar{y}(x) = \Phi(x) + D\,, \tag{6}$$

kde $\Phi^{(n)}(x) = \varphi(x^n)$ a φ je inversní funkce k funkci f'. Konstanta D je daná vztahem

$$(-1)^n\, n!\, D = f(\Phi^{(n)}(x_0)) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x_0^k\, \Phi^{(k)}(x_0)\,, \tag{4}$$

kde x_0 je bod definičního oboru funkce Φ.

Je-li n sudé přirozené číslo a je-li $f'(t) \geqq 0$ pro $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$, pak existuje řešení rovnice (1) *vyjádřené vztahem* (6) *jednak v intervalu* $\langle \sqrt[n]{[f'(t_1)]}, \sqrt[n]{[f'(t_2)]} \rangle$ $[\langle \sqrt[n]{[f'(t_2)]}, \sqrt[n]{[f'(t_1)]} \rangle]$, *jednak v intervalu* $\langle -\sqrt[n]{[f'(t_2)]}, -\sqrt[n]{[f'(t_1)]} \rangle$ $[\langle -\sqrt[n]{[f'(t_1)]}, -\sqrt[n]{[f'(t_2)]} \rangle]$.

Je-li n sudé přirozené číslo, avšak $f'(t) < 0$ v celém definičním oboru, pak uvažovaná rovnice (1) *nemá řešení typu* (6).

II

Je dobře známo, že v případě $n = 1$ obdržíme singulární řešení (6) jako obálku jednoparametrické soustavy řešení tvaru (2). Obdobný výsledek platí i pro zobecněnou rovnici.

Věta 3. *Nechť funkce f má v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$ spojitou a ryze monotonní derivaci a nechť inversní funkce k funkci f' je absolutně spojitá. Nechť existuje řešení uvažované rovnice* (1) *tvaru* (6). *Nechť dále c je bod definičního oboru funkce $\Phi(x)$.*

Utvořme funkci

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \Phi^{(i)}(c) (x - c)^i + D . \tag{7}$$

Potom $y(x)$ je řešení rovnice (1) *tvaru* (2) *a platí $y(c) = \Phi(c) + D$ a rovněž $y^{(k)}(c) = \Phi^{(k)}(c)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Žádný další společný bod integrální křivky $y(x)$ a $\Phi(x) + D$ nemají.*

Je-li n liché přirozené číslo a funkce $\Phi^{(n)}$ je rostoucí, pak platí pro všechna $x \neq c$ vztah $y(x) < \Phi(x) + D$; je-li $\Phi^{(n)}$ klesající, pak je $y(x) > \Phi(x) + D$ pro všechna $x \neq c$.

Je-li n sudé přirozené číslo a $\Phi^{(n)}$ rostoucí, pak je $y(x) < \Phi(x) + D$ pro $x > c$ a $y(x) > \Phi(x) + D$ pro $x < c$. Je-li funkce $\Phi^{(n)}$ klesající, pak je $y(x) > \Phi(x) + D$ pro $x > c$ a $y(x) < \Phi(x) + D$ pro $x < c$.

Důkaz. Nejdříve ukážeme, že funkce $y(x)$ definovaná vztahem (7) je skutečně řešení rovnice (1) tvaru (2). Následujícím výpočtem obdržíme

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} \Phi^{(i)}(c) \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i}{j} x^j c^{i-j} + D = \\ &= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} \frac{(-1)^{i-j}}{i!} \binom{i}{j} \Phi^{(i)}(c)\, x^j c^{i-j} + D = \\ &= \sum_{j=1}^{n} x^j \left[\sum_{i=j}^{n} \frac{(-1)^{i-j}}{j!\,(i-j)!} c^{i-j} \Phi^{(i)}(c) \right] + \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} c^i \Phi^{(i)}(c) + D . \end{aligned}$$

Protože $\Phi(x) + D$ je řešením rovnice (1), můžeme psát

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} c^i \Phi^{(i)}(c) + D = \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{n!}{i!} c^i \Phi^{(i)}(c) + D = \frac{(-1)^n}{n!} f(\Phi^{(n)}(c)) .$$

Položíme-li

$$C_j = \sum_{i=j}^{n} \frac{(-1)^{i-j}}{j!\,(i-j)!} c^{i-j} \Phi^{(i)}(c) \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

pak

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j x^j + \frac{(-1)^n}{n!} f(n!\, C_n) .$$

Zřejmě $C_n = \Phi^{(n)}(c)/n!$ a tedy $y(x)$ je řešením rovnice (1) tvaru (2).

Dále z definice (7) plyne ihned, že $y(c) = \Phi(c) + D$. Poněvadž

$$y^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{(i-k)!} \Phi^{(i)}(c)\,(x - c)^{i-k} \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots, n ,$$

platí tudíž $y^{(k)}(c) = \Phi^{(k)}(c)$; $y^{(n+1)}(x)$ je identicky rovno nule.

Rozviňme konečně podle Taylorova vzorce funkci Φ. Obdržíme

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!} \Phi^{(i)}(c)\,(x - c)^i + \frac{1}{n!} \Phi^{(n)}(\xi)\,(x - c)^n ,$$

kde bod ξ leží mezi body x a c. Z monotonnosti funkce $\Phi^{(n)}$ vyplývá ihned tvrzení věty.

Důsledkem věty 3 je pak následující věta:

Věta 4. *Nechť funkce f má ryze monotonní spojitou derivaci v intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$. Nechť inversní funkce k funkci f' je absolutně spojitá. Buď $\tilde{y}$ singulární řešení rovnice* (1) *tvaru* (6). *Nechť c probíhá definiční interval funkce Φ. Potom funkce $\tilde{y}$ je obálkou jednoparametrické soustavy křivek y definovaných vztahem* (7).

Vyšetřujme opět nejprve případ lichého n. Mějme dány koeficienty C_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), součin $n!\, C_n$ je z definičního oboru funkce f. Ze vztahu $C_n = \Phi^{(n)}(c)/n!$ nalezneme hodnotu $c = \sqrt[n]{[f'(n!\, C_n)]}$; c je zřejmě z definičního oboru funkce $\tilde{y}$ a je právě jedno. Ze soustavy (8) určíme jednoznačně hodnoty $\Phi^{(i)}(c)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, neboť determinant soustavy je různý od nuly, a tyto hodnoty spolu s podmínkou $y(c) = \tilde{y}(c)$ nám určí jednoznačně funkci $\tilde{y}$.

V případě sudého n obdržíme ze vztahu $C_n = \Phi^{(n)}(c)/n!$ pro c dvě hodnoty $c = \pm \sqrt[n]{[f'(n!\, C_n)]}$. Ke každé z nich můžeme vypočíst hodnoty $\Phi^{(i)}(c)$, případně $\Phi^{(i)}(-c)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a spolu s podmínkou $y(c) = \tilde{y}(c)$ [případně $y(-c) = \tilde{y}(-c)$] obdržíme při f rostoucím [klesajícím] jak v intervalu $\langle \sqrt[n]{[f'(t_1)]}, \sqrt[n]{[f'(t_2)]} \rangle$

$[\langle \sqrt[n]{[f'(t_2)]}, \sqrt[n]{[f'(t_1)]}]$ tak v intervalu $\langle -\sqrt[n]{[f'(t_2)]}, -\sqrt[n]{[f'(t_1)]}\rangle$ $[\langle -\sqrt[n]{[f'(t_1)]}, -\sqrt[n]{[f'(t_2)]}\rangle]$ právě jedno řešení požadované vlastnosti. Přitom nebude obecně platit $\tilde{y}(x) = \tilde{y}(-x)$ a také dvě řešení y_1, y_2 tvaru (2) „příslušející" v jednom intervalu témuž řešení $\tilde{y}$ tvaru (6), nebudou obecně „příslušet" v druhém intervalu jednomu řešení tvaru (6).

Tyto výsledky můžeme shrnout do následující věty:

Věta 5. *Nechť funkce f má ryze monotonní spojitou derivaci v intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$ a nechť inversní funkce k funkci f' je absolutně spojitá. Nechť existuje singulární řešení rovnice* (1) *tvaru* (6).

Potom pro n liché lze ke každému řešení y rovnice (1) *tvaru* (2) *nalézti právě jedno $c = \sqrt[n]{[f'(n!\, C_n)]}$ a právě jedno řešení $\tilde{y}$ tvaru* (6) *takové, že $y^{(i)}(c) = \tilde{y}^{(i)}(c)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $y(x) \not\equiv \tilde{y}(x)$.*

Pro n sudé lze ke každému řešení y rovnice (1) *tvaru* (2) *nalézt v intervalu $\langle \sqrt[n]{[f'(t_1)]}, \sqrt[n]{[f'(t_2)]}\rangle$ $[\langle \sqrt[n]{[f'(t_2)]}, \sqrt[n]{[f'(t_1)]}\rangle]$ právě jedno c a právě jedno řešení $\tilde{y}$ tvaru* (6) *takové, že $y^{(i)}(c) = \tilde{y}^{(i)}(c)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $y(x) \not\equiv \tilde{y}(x)$. Podobně v intervalu $\langle -\sqrt[n]{[f'(t_2)]}, -\sqrt[n]{[f'(t_1)]}\rangle$ $[\langle -\sqrt[n]{[f'(t_1)]}, -\sqrt[n]{[f'(t_2)]}\rangle]$.*

Můžeme tedy podle vět 4 a 5 rozdělit množinu všech řešení rovnice (1) tvaru (2) na disjunktní třídy podle „příslušnosti" k řešení tvaru (6). Zřejmě v případě sudého n to lze provést dvěma obecně různými způsoby.

III

Na závěr ještě poznamenejme, že dovedeme nalézt i řešení lineární rovnice

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k y^{(k)} = f_1(x)\, y^{(n)} + f_2(x)\,. \tag{9}$$

Přitom musíme vyloučit případ $f_1(x) \equiv x^n$, kdy rovnice (9) přejde v rovnici Eulerovu

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k y^{(k)} = f_2(x)\,.$$

Za předpokladu, že funkce f_1 a f_2 mají všude spojitou derivaci a $f_1(x) \not\equiv x^n$, obdržíme $y^{(n)}$ jako řešení lineární rovnice

$$z' = \frac{f_1'(x)}{x^n - f_1(x)} \cdot z + \frac{f_2'(x)}{x^n - f_1(x)}\,. \tag{10}$$

Adresa autorů: Vladimír Doležal, Žitná 25, Praha 1 (Matematický ústav ČSAV), Jaromír Hroník, Barvičova 85, Brno (Vysoké učení technické).

Резюме

ОБ ОБОБЩЕННОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ КЛЕРО

ВЛАДИМИР ДОЛЕЖАЛ (Vladimír Doležal), Прага
и ЯРОМИР ГРОНИК (Jaromír Hroník), Брно

В работе изучаются свойства дифференциального уравнения n-го порядка

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}x^k y^{(k)} = f(y^{(n)}) \tag{1}$$

общее решение которого можно представить в виде

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k x^k + \frac{(-1)^n}{n!} f(n!\, C_n)\,. \tag{2}$$

Если функция f не является линейной и если выполнены еще некоторые условия, то уравнение (1) имеет еще одно (особое) решение $\tilde{y}(x) = \Phi(x) + D$ которое можно вывести из соотношения (3).

Во главе II. доказывается, что особое решение $\tilde{y}(x)$ является оболочкой одно-параметрической системы кривых y, определенных соотношением (7).

Во главе III. сказано, что решение уравнения (9) можно получить как решение линейного уравнения (10), где $y^{(n)} = z$.

Résumé

SUR LA GÉNÉRALISATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE CLAIRAUT

VLADIMÍR DOLEŽAL, Praha, JAROMÍR HRONÍK, Brno

Le travail présent étudie les propriétés de l'équation différentielle d'ordre n

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}x^k y^{(k)} = f(y^{(n)})\,, \tag{1}$$

dont la solution générale peut être exprimée par la relation

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k x^k + \frac{(-1)^n}{n!} f(n!\, C_n)\,. \tag{2}$$

Si la fonction f n'est pas linéaire et qu'elle remplisse certaines suppositions, l'équation (1) peut avoir encore une seconde solution (singulière) $\tilde{y}(x) = \Phi(x) + D$, que l'on peut déduire de la relation (3).

Le chapitre II démontre que la solution singulière $\tilde{y}(x)$ est l'enveloppe du système uniparamétrique de courbes y définies par la relation (7).

Le chapitre III renseigne que la solution de l'équation (9) peut être trouvée comme solution de l'équation linéaire (10), où $y^{(n)} = z$.