Časopis pro pěstování matematiky

Pavel Todorov
O jisté třídě prostých meromorfních funkcí

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 91 (1966), No. 1, 77--79

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117558

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1966

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

О РАДИУСЕ ОДНОЛИСТНОСТИ ОДНОГО КЛАССА МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

ПАВЕЛ ТОДОРОВ, Пловдив

(Поступило в редакцию 4/II 1965 г.)

Рассмотрим клас мероморфных функций

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{m_k} \frac{A_{ks}}{(z - a_k)^s}, \tag{1}$$

где $a_k \neq 0$ обозначают полюсы (1) с соответствующими кратностями $m_k \geqq 1$, и A_{ks} являются характеристическими коэффициентами, некоторые из которых могут быть нулями (конечно, $A_{km_k} \neq 0$). Если для отличных от нуля коэффициентов A_{ks} аргумент отношения $A_{ks}/(-a_k)^{s+1}$, $s = 1, 2, \ldots, m_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ постоянен и m обозначает самое большое из чисел m_k, то справедлива следующая

Теорема. *Каждая функция класса* (1) *является однолистной в замкнутом круге*

$$|z| \leqq \delta \sin \frac{\pi}{2(m+1)}, \tag{2}$$

где δ означает наименьший из модулей $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|$.

Число $\delta \sin [\pi/2(m + 1)]$ есть точный радиус однолистности класса (1).

Для доказательства теоремы используем следующую

Лемму. *Если $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — действительные числа и $|p_k| \geqq 1/n$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то действительная часть произведения*

$$P(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (1 - z_1)^{p_1} (1 - z_2)^{p_2} \ldots (1 - z_n)^{p_n}, \quad n \geqq 1, \tag{3}$$

где всюду взяты главные значения степенных функций, положительна, т.е., $\operatorname{Re} P(z_1, z_2, \ldots, z_n) > 0$ при условии, что комплексные числа $z_1, z_2, \ldots, z_n$ принадлежат кругу

$$|z| < \sin \frac{\pi}{2np}, \quad p = \max |p_k|. \tag{4}$$

Число $\sin (\pi/2np)$ не может быть заменено другим большим числом.

Доказательство. Отметим, что абсолютная величина $|\arg(1 - z_k)|$ не превышает величины острого угла $\pi/(2n|p_k|)$ между касательной из точки $z = 1$ к окружности $|z| = \sin(\pi/2n|p_k|)$ и действительной оси, когда z_k пробегает внутри и по этой окружности, т.е., $|\arg(1 - z_k)| \leqq \pi(2n|p_k|)$, причем равенство достигается только тогда, когда z_k лежит в точке касания. Из равенства $\arg P(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{k=1}^{n} p_k \arg(1 - z_k)$ следует, что $|\arg P| \leqq \pi/2$, причем равенство получаем только при $z_k = e^{i\alpha_k} \sin(\pi/2n|p_k|)$, $\pm\alpha_k = \frac{1}{2}\pi - (\pi/2n|p_k|)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Знак минуса соответствует второй точке касания. Только в этом исключительном случае произведение $P(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ является чисто мнимым числом. Если заменить круги $|z| < \sin(\pi/2n|p_k|)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ кругом $|z| < \sin(\pi/2np)$, $p = \max|p_k|$, то при произвольном расположении точек $z_1, z_2; \ldots, z_n$ в нем всегда $\operatorname{Re} P \geqq 0$. Ясно, что этот круг является самым большим с таким свойством.

Чтобы доказать теорему, нужно проверить, что если точки $z_1 \neq z_2$ принадлежат замкнутому кругу $|z| \leqq \delta \sin(\pi/2(m + 1))$, то разность

$$f(z_2) - f(z_1) = -\sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{m_k} s \cdot A_{ks} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(z - a_k)^{s+1}} \tag{5}$$

отлична от нуля.

Интегрирования в прямой части (5) можно производить по прямолинейному отрезку $z_1 z_2$. Если действительное переменное t возрастает от 0 до 1, то $z = (1 - t) z_1 + t z_2$ описывает этот отрезок и, следовательно,

$$-\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{m_k} s \cdot \frac{A_{ks}}{(-a_k)^{s+1}} \int_0^1 \frac{dt}{(1 - z/a_k)^{s+1}}, \tag{6}$$
$$z = (1 - t) z_1 + t z_2 .$$

По лемме при $n = 1$, $p_1 = s + 1$ действительная часть подинтегральной функции положительна в интервале $0 < t < 1$, так как

$$\left|\frac{z}{a_k}\right| \leqq \frac{|z|}{\delta} < \sin\frac{\pi}{2(m + 1)} \leqq \sin\frac{\pi}{2(s + 1)} .$$

Следовательно, действительные части интегралов в (6) положительны. Из условия $\arg(A_{ks}/(-a_k)^{s+1}) = c = \text{const}$ следует, что все слагаемые в правой части (6) лежат по одну сторону от прямой, которая получается при повороте мнимой оси около начала на угол c. Следовательно, правая часть (6) не равна нулю.

Чтобы доказать вторую часть теоремы, достаточно найти хотя бы одну функцию $f(z)$ из класса (1), первая производная которой анулируется в контурной точке области (2). Действительно, в некоторой окрестности такой точки $f(z)$ будет многолистной, но в связи с установленным — однолистной в лунке, образованной общей частью окрестности и (2).

Например, функция

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-i}$$

принадлежит к (1), и следовательно, однолистна в замкнутом круге $|z| \leqq \sqrt{2}/2$. В известной окрестности $|z - \zeta| < \varrho$ точки $\zeta = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\, e^{i\pi/4})$ его границы эта функция двулистна, потому что $f'(\zeta) = 0$, $f''(\zeta) \neq 0$, но однолистна в лунке $|z - \zeta| < \varrho$, $|z| \leqq \sqrt{2}/2$.

Этим теорема доказана.

Адреса автора: Пловдив, ул. Яким Груев 39[a], Болгария.

Výtah

O JISTÉ TŘÍDĚ PROSTÝCH MEROMORFNÍCH FUNKCÍ

PAVEL TODOROV (Павел Тодоров), Plovdiv

V článku je nalezen poloměr největšího kruhu, v němž jsou prosté všechny racionální funkce tvaru

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{m_k} \frac{A_{ks}}{(z - a_k)^s}.$$

Zde n, m_k jsou daná přirozená čísla, $a_k \neq 0$ daná komplexní čísla a koeficienty A_{ks} se mění tak, že argument podílu $A_{ks}/(-a_k)^{s+1}$ je daná konstanta pro všechny uvažované hodnoty indexů k a s.

Summary

ON A CLASS OF SCHLICHT MEROMORPHIC FUNCTIONS

PAVEL TODOROV (Павел Тодоров), Plovdiv

In the article there is given the radius of the maximal disc, in which all rational functions of the form

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{m_k} \frac{A_{ks}}{(z - a_k)^s}$$

give a schlicht mapping. Here, n, m_k are given positive integers, $a_k \neq 0$ given complex numbers. The coefficients A_{ks} vary in such a manner that the argument of the quotient $A_{ks}/(-a_k)^{s+1}$ equals a given constant for all values of indices k, s considered.