Časopis pro pěstování matematiky

Ján Jakubík; Miroslav Novotný; Josef Novák; Milan Sekanina; Anna Sekaninová; Tibor Katriňák; František Fiala; Petr Kratochvíl; Vítězslav Novák; Ivan Korec; Ladislav Skula; Bohumil Šmarda

Summer session on ordered sets at Cikháj

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 91 (1966), No. 1, 92--103

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117546`

REFERÁTY

SUMMER SESSION ON ORDERED SETS AT CIKHÁJ

From August 23 to 31, 1965, the mathematical departments of Brno and Bratislava universities in cooperation with the Czechoslovak Academy of Sciences, organized at Cikháj a summer session on ordered sets and abstract algebra. 26 mathematicians took part in this summer session, and 11 lectures were given. The contents of all these lectures are presented here; on behalf of J. Jakubík, who was absent the lecture was read by K. Molnárová.

DIE DEDEKINDSCHEN SCHNITTE IM DIREKTEN PRODUKT VON HALBGEORDNETEN MENGEN

J. Jakubík, Košice

Es sei $G \neq \emptyset$ eine halbgeordnete Menge. Für $A \subset G$ bezeichnen wir mit $L(A)$ bzw. $U(A)$ die Menge aller unteren Schranken bzw. aller oberen Schranken von A. Ferner sei $D(G)$ bzw. $E(G)$ das System aller Mengen $L(U(A))$, wobei A eine beliebige Teilmenge von G bzw. eine beliebige nichtleere nach oben begrenzte Teilmenge von G ist. Jedes der Systeme $D(G)$, $E(G)$ ist durch die mengentheoretische Inklusion teilweise geordnet. Es ist bekannt, dass $D(G)$ ein vollständiger Verband ist; $E(G)$ ist im allgemeinen kein Verband. Wir bezeichnen mit ΠG_α das direkte Produkt der halbgeordneten Mengen G_α. Es gilt der Satz: (1) *Aus dem Isomorphismus $G \sim \Pi G_\alpha$ folgt die Existenz eines Isomorphismus $E(G) \sim \Pi\, E(G_\alpha)$.* Eine analoge Behauptung für D anstatt E gilt nicht.

Ferner sei G eine gerichtete vollständig abgeschlossene Gruppe. Es ist bekannt, dass $E(G)$ im solchen Fall eine vollständige verbandsgeordnete Gruppe ist. Es gilt ein analoger Satz zu (1): *Es sei G eine gerichtete vollständig abgeschlossene Gruppe, die mit dem direkten Produkt der halbgeordneten Gruppen G_α isomorph ist. Dann ist $E(G)$ mit dem direkten Produkt der verbandsgeordneten Gruppen $E(G_\alpha)$ isomorph.*

ÜBER ENDLICH CHARAKTERISIERBARE SPRACHEN

M. Novotný, Brno

Unter einer Sprache wird das geordnete Paar (A^∞, L) verstanden, wo A^∞ das freie Monoid über A und L eine Teilmenge von A^∞ ist. Für $x = x_1 x_2 \ldots x_n \in A^\infty$, wo $x_i \in A$ gilt, setzen wir $l(x) = n$. Ist V^∞ das freie Monoid über V, Σ eine einstellige und R eine zweistellige Relation in V^∞, so heisst das geordnete Tripel $\mathfrak{G} = (V^\infty, \Sigma, R)$ allgemeine Grammatik. Sei $\overset{*}{R}$ die kleinste reflexive, transitive und multiplikationstreue binäre Relation in V^∞, welche R enthält. Wir setzen $L^a(\mathfrak{G}) = \{x \mid x \in V^\infty$, es gibt ein $s \in \Sigma$ mit $(s, x) \in \overset{*}{R}\}$; $(V^\infty, L^a(\mathfrak{G}))$ heisst ableitbare Sprache der allgemeinen Grammatik $\mathfrak{G}$.

Sei (A^∞, L) eine Sprache. Das Element $x \in A^\infty$ heisst brauchbar in (A^∞, L), wenn es solche Elemente $a, b \in A^\infty$ gibt, dass $axb \in L$ gilt. Für die Elemente $x, y \in A^\infty$ setzen wir $x > y\,(L)$, wenn aus $a, b \in A^\infty$, $axb \in L$ stets $ayb \in L$ folgt. Für $x, y \in A^\infty$ setzen wir $x \equiv y\,(L)$, wenn $x > y\,(L)$, $y > x\,(L)$ gilt.

Sei $x, y \in A^\infty$, $l(x) > l(y)$, $y > x\,(L)$, $x > y\,(L)$, x brauchbar in (A^∞, L). Dann heisst x Konfiguration vom Rang 1 der Sprache (A^∞, L), y Resultat dieser Konfiguration. Wir bezeichnen mit $C_1(A^\infty, L)$ die Menge aller Konfigurationen vom Rang 1 der Sprache (A^∞, L).

Die Konfigurationen höherer Ränge werden durch Induktion definiert: Sei $n \geqq 1$ eine natürliche Zahl. Wir nehmen an, dass wir die Konfigurationen vom Rang $1, 2, \ldots, n$ bereits definiert haben. Sei C_i die Menge aller Konfigurationen vom Rang i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $S_n = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n$. Sei $x, y \in A^\infty$, $l(x) > l(y)$, $x > y\,(L - A^\infty S_n A^\infty)$, $y > x\,(L)$, x ein in $(A^\infty, L - A^\infty S_n A^\infty)$ brauchbares Element. Dann heisst x Konfiguration vom Rang $n + 1$, y Resultat dieser Konfiguration. Wir bezeichnen mit $C_{n+1}(A^\infty, L)$ die Menge aller Konfigurationen vom Rang $n + 1$ der Sprache (A^∞, L). Wir setzen noch $C(A^\infty, L) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n(A^\infty, L)$, $B(A^\infty, L) = L - A^\infty C(A^\infty, L)\, A^\infty$. Eine Konfiguration x vom Rang n heisst einfach, wenn aus $a, b \in A^\infty$, $x' \in C_n(A^\infty, L)$, $x = ax'b$ stets $x = x'$ folgt. Sei $P_n(A^\infty, L)$ die Menge aller einfachen Konfigurationen vom Rang n. Wir setzen $P(A^\infty, L) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n(A^\infty, L)$; es sei $D(A^\infty, L)$ die Menge aller geordneten Paare (y, x), wo $x \in P(A^\infty, L)$ und y ein Resultat dieser Konfiguration ist.

Sei (A^∞, L) eine Sprache. Dann heisst das geordnete Tripel $\mathfrak{G}(A^\infty, L) = (A^\infty, B(A^\infty, L), D(A^\infty, L))$ eine Konfigurationsgrammatik (K-Grammatik) von (A^∞, L), das geordnete Paar $(B(A^\infty, L), D(A^\infty, L))$ die Konfigurationscharakteristik der Sprache (A^∞, L).

Satz 1. *Sei (A^∞, L) eine beliebige Sprache, $\mathfrak{G}(A^\infty, L)$ ihre K-Grammatik. Dann ist $L^a(\mathfrak{G}(A^\infty, L)) = L$.*

Satz 2. *Seien (A^∞, L), (A^∞, M) Sprachen. Ist $(B(A^\infty, L), D(A^\infty, L)) = (B(A^\infty, M), D(A^\infty, M))$, so ist $L = M$.*

Eine Sprache (A^∞, L) heisst endlich charakterisierbar, wenn die Mengen A, $B(A^\infty, L)$, $P(A^\infty, L)$ endlich sind. Eine allgemeine Grammatik (V^∞, Σ, R) heisst Grammatik, wenn die Mengen V, Σ, R endlich sind. Man sieht leicht ein, dass die K-Grammatik einer endlich charakterisierbaren Sprache eine Grammatik ist.

Sei $\mathfrak{G} = (V^\infty, \Sigma, R)$ eine Grammatik, sei ferner $V = V_N \cup V_T$, $V_N \cap V_T = \emptyset$. Wir setzen $\mathfrak{H} = (V^\infty, \Sigma, R, V_T^\infty)$, $L^t(\mathfrak{H}) \subseteqq V_T^\infty$ wird analog zu $L^a(\mathfrak{G})$ erklärt; $\mathfrak{H}$ heisst Grammatik von Chomsky, $(V_T^\infty, L^t(\mathfrak{H}))$ heisst terminale Sprache der Grammatik $\mathfrak{H}$.

Chomsky hat gewisse Axiome für die Grammatiken eingeführt; es lässt sich zeigen, dass diese Axiome nicht notwendig sind. Ferner hat Chomsky gewisse Grammatiken studiert, deren Regeln (= Elemente von R) eine spezielle Form haben; diese heissen Grammatiken vom Typ 1, 2, 3. Eine terminale Sprache einer Grammatik vom Typ i ($i = 1, 2, 3$) heisst Sprache vom Typ i. Es sind gewisse Kriterien bekannt, nach welchen sich erkennen lässt, ob die gegebene Grammatik zu diesen speziellen Typen gehört. Insbesondere ist die Sprache (A^∞, L) genau dann eine Sprache vom Typ 3, wenn die Äquivalenz $\equiv (L)$ auf A^∞ eine endliche Anzahl von Klassen hat.

Satz 3. *Jede endlich charakterisierbare Sprache ist eine terminale Sprache vom Typ* 1.

Satz 4. *Jede terminale Sprache vom Typ* 3 *ist endlich charakterisierbar.*

Sei (A^∞, L) eine Sprache. Wir sagen, dass diese Sprache die Bedingung (A) erfüllt, wenn es eine solche natürliche Zahl n gibt, dass für jedes in (A^∞, L) brauchbare $x \in A^\infty - A^\infty C_1(A^\infty, L) A^\infty$ stets $l(x) \leqq n$ gilt.

Satz 5. *Sei (A^∞, L) eine endlich charakterisierbare Sprache. (A^∞, L) ist eine terminale Sprache vom Typ* 3 *genau dann, wenn die Bedingung* (A) *erfüllt ist.*

Literatur

[1] *Y. Bar-Hillel, M. Perles* and *E. Shamir:* On formal properties of simple phrase structure grammars. Technical Report No. 4, U.S. Office of Naval Research, Information System Branch.

[2] *N. Chomsky:* On certain formal properties of grammars. Information and Control *2* (1959), 137—167.

[3] *N. Chomsky:* Three Models for the Description of Language. IRE Transaction on Information Theory V. IT — 2 No. *3* (1956), 113—124.

[4] *А. Н. Гладкий:* Конфигурационные характеристики языков. Проблемы кибернетики *10* (1963), 251—260.

[5] *О. С. Кулагина:* Об одном способе определения грамматических понятий на базе теории множеств. Проблемы кибернетики *1* (1958), 203—214.

[6] *M. O. Rabin* and *D. Scott:* Finite automata and their decision problems. IBM Journal *3* (1959), 115—125.

ON CONTINUOUS EXTENSIONS OF CONTINUOUS SET FUNCTIONS

J. Novák, Praha

Let (L, λ) be a convergence space in which the closure λA of $A \subset L$ is defined as the set of all points $\lim x_n$ such that $x_n \in A$. One may form successive closures $A \subset \subset \lambda A \subset \lambda^2 A \subset \ldots \subset \lambda^{\omega_1} A$, ω_1 being the least uncountable ordinal. Examples:

The convergence Euclidean space (E, ε) (of finite or infinite dimension) with convergence coordinatewise. The system of sets with the convergence $\lim A_n = A$ if $\limsup A_n = \liminf A_n = A$.

Definition 1. Let F be the class of all continuous functions on L Let $F_0 \subset F$. We say that L is F_0 sequentially regular if (α) holds:

(α) If $x_0 \in L$ and $x_n \in L$ are points such that no subsequence of $\{x_n\}$ converges to x_0, then there is an $f \in F_0$ such that $\{f(x_n)\}$ does not converge to $f(x_0)$.

Theorem 1. *Each F_0 sequentially regular space is homeomorphic to a subspace of the convergence Euclidean space (E, ε) of dimension $\bar{\bar{F}}_0$.*

The homeomorphism in question is given by $\boldsymbol{\varphi}_0(x) = (f_\alpha(x))$, $x \in L$, $f_\alpha \in F_0$, $(f_\alpha(x)) \in E$ and $\alpha \in I$, where $\bar{\bar{I}} = \bar{\bar{F}}_0$. We call $\boldsymbol{\varphi}_0$ the F_0 homeomorphism.

Definition 2. Let (L, λ) be an F_0 sequentially regular space and (S, σ) a convergence overspace of L. We say that S is an F_0 sequential envelope of L if 1) $\sigma^{\omega_1}L = S$, 2) each $f \in F_0$ can be continuously extended to a function $\bar{f}$ on S; the space S is $\bar{F}_0$ sequentially regular, $\bar{F}_0$ being the class of all continuously extended functions like these. 3) There is no convergence space (T, τ) containing S as a proper subspace having properties 1) and 2) with regard to L and T.

Theorem 2. *Let (L, λ) be an F_0 sequentially regular space. Let $\boldsymbol{\varphi}_0$ be an F_0 homeomorphism on L into the convergence Euclidean space (E, ε) of dimension $\bar{\bar{F}}_0$. Let (S, σ) be a convergence overspace of L such that $\sigma^{\omega_1}L = S$. Then S is an F_0 sequential envelope of L if and only if there is a homeomorphism h from S onto $\varepsilon^{\omega_1} \boldsymbol{\varphi}_0(L)$ such that $h(x) = \boldsymbol{\varphi}_0(x)$, $x \in L$.*

From Theorem 2 it follows that each F_0 sequentially regular space L has an F_0 sequential envelope; if S_1 and S_2 are two such envelopes of L, then there is a homeomorphism h on S_1 onto S_2 such that $h(x) = x$, $x \in L$.

Theorem 3. *Let A be an algebra of sets and P the class of all probability measures on A. Then the sigma-algebra $\sigma(\mathsf{A})$ over A is a P sequential envelope of A.*

Theorem 3 fails to hold if P is replaced by the class of all continuous functions on A or by the class of all measures on A.

TOPOLOGY COMPATIBLE WITH THE ORDER

M. and A. Sekanina, Brno

This paper is concerned with a connection of the concepts of ordering and topology. By the topological space we understand a topological space in the sense of Bourbaki; for the basic notions of ordering see [6].

Definition 1. A topology u on a partially ordered set A is called compatible with the order (strongly compatible with the order) if u is a T_1-topology and if for any pair $a, b \in A$, $a < b$ there exist neighbourhoods O_1 and O_2 of the points a and b respectively, such that for all $x \in O_1$, $y \in O_2$ there holds $x < b$ or $x \parallel b$, and also $y > a$ or $y \parallel a$ (there is $x < y$ or $x \parallel y$).

Theorem 1. *The interval-* (see [4]), *order-* (see [3]) *and ideal-* (see [5]) *topologies on a partially ordered set are compatible with the order.*

Theorem 2. *If the interval topology on the partially ordered set is a T_2-topology, then it is strongly compatible with the order.*

There exists an ordered set on which the order-topology is a T_2-topology and is not compatible with the order.

Theorem 3. *A B-interval topology* (see [1]) *on a dually directed set A is compatible with the order if and only if A contains the smallest and greatest elements.*

Let $C(u)$ denote the system of all closed sets in a topology u. Let u, v be two topologies with the same carrier. Write $u \leqq v$ whenever $C(u) \supset C(v)$. This relation is an order on the set $\mathscr{B}(A)$ of all topologies on A. In what follows, there are investigated extremal properties of the interval topology in the set $\mathscr{S}(A)$ of all compatible topologies on the partially ordered set A. Then there holds, e.g., the following

Theorem 4. *Let A be a partially ordered set. Then an interval topology is the greatest element in $\mathscr{S}(A)$ if and only if for every two points a, b with $a \parallel b$ there exist systems of elements $a_1, a_2, \ldots, a_n > a$ and $a'_1, a'_2, \ldots, a'_m < a$ such that $[b) - \bigcup_{i=1}^{n} [a_i)$ and $(b] - \bigcup_{i=1}^{m} (a'_i]$ are finite sets.*

Problem. A being a partially ordered set, under what conditions does the greatest element in $\mathscr{S}(A)$ exist?

References

[1] *G. Birkhoff:* A new interval topology for dually directed sets. Univ. nac. Tucuman. Rev. Ser. A *14* (1962).
[2] *N. Bourbaki:* Topologie générale, Paris, 2 ed.
[3] *J. Flachsmayer:* Einige topologische Fragen in der Theorie der Booleschen Algebren, Archiv der Math., *XVI* (1965), 25—33.
[4] *O. Frink:* Topology in Lattices, Trans. A.M.S. *51* (1942), 569—582.
[5] *O. Frink:* Ideals in partially ordered sets. Am. Math. Monthly *61* (1954), 223—234.
[6] *G. Szász:* Einführung in die Verbandstheorie, Leipzig 1962.

DER STONESCHE KONGRUENZVERBAND DES VERBANDES

T. Katriňák, Bratislava

In dieser Note charakterisiert man die Klasse aller Verbände L, für die der Kongruenzverband $\Theta(L)$ einen Stoneschen Verband bildet.

Definition 1. Der distributive pseudokomplementäre Verband L heisst ein Stonescher Verband, wenn für alle $a \in L$ $a^* \cup a^{**} = I$ gilt (a^* bezeichnet das Pseudokomplement und I ist das grösste Element aus L).

Definition 2. Es sei L ein Verband, $a, b, c, d \in L$. Wir werden sagen, dass das Elementenpaar $\{a, b\}$ schwach projektiv mit einem Elementenpaar $\{c, d\}$ ist, wenn Elemente $x_1, \ldots, x_n \in L$ existieren und

$$[\ldots \{[(a \cup b) \cup x_1] \cap x_2\} \ldots] \cup x_n = c \cup d\,,$$
$$[\ldots \{[(a \cap b) \cup x_1] \cap x_2\} \ldots] \cup x_n = c \cap d$$

gilt. Wenn $\{a, b\}$ schwach projektiv mit $\{c, d\}$ ist, dann schreiben wir $\overline{a, b} \to \overline{c, d}$.

Definition 3. Die Kongruenzrelation Θ des Verbandes L heisst schwach separabel, wenn für jedes Elementenpaar $a, b \in L$ $(a \leqq b)$ eine endliche Kette $a = t_0 \leqq t_1 \leqq \ldots \leqq t_n = b$ so existiert, dass folgendes gilt: Entweder folgt für jedes $i = 1, 2, \ldots, n$ und für alle $z, t \in L$, aus $\overline{t_{i-1}, t_i} \to \overline{z, t}$ und $z \equiv t(\Theta)$ die Beziehung $z = t$, oder existieren für alle $r, s \in [t_{i-1}, t_i]$ $(r < s)$ Elemente $u, v \in L$, $u \neq v$ so, dass $\overline{r, s} \to \overline{u, v}$ und $u \equiv v(\Theta)$ ist.

Definition 4. Den Verband L nennen wir fast schwach modular, wenn für alle $a, b, c, d, u, v \in L$ $(a < b,\ u \neq v,\ c < d)$ $c_1, d_1 \in [c, d]$ $(c_1 < d_1)$ existieren und wenn für alle $r \neq s$, für welche $\overline{c_1, d_1} \to \overline{r, s}$ gilt, z und t, $z \neq t$ existieren mit der Eigenschaft: $\overline{a, b} \to \overline{z, t}$ und $\overline{r, s} \to \overline{z, t}$.

Dann gilt

Satz 1. *Es sei L ein Verband und $\Theta(L)$ der Kongruenzverband des Verbandes L. $\Theta(L)$ ist ein Stonescher Verband dann und nur dann, wenn alle Kongruenzrelationen in L schwach separabel sind und wenn L ein fast schwach modularer Verband ist.*

Wenn $x \prec y$ ist (y ist ein oberer Nachbar von x), dann nennen wir das Intervall $p = [x, y]$ minimal. Den Verband L nennen wir halbdiskret, wenn alle Elemente $a, b \in L$, $a \leqq b$, eine endliche maximale Kette verbindet.

Folgerung. Es sei L ein halbdiskreter Verband. $\Theta(L)$ ist ein Stonescher Verband dann und nur dann, wenn für alle minimalen Intervalle p, q, r, welche die Bedingung $p \to r$, $q \to r$ erfüllen, und für jedes minimale Intervall s mit der Eigenschaft $r \to s$ ein minimales Intervall t so existiert, dass $p \to t$, $s \to t$ gilt.

Satz 2. *Es sei L eine Kette. $\Theta(L)$ ist ein Stonescher Verband dann und nur dann, wenn L ein halbdiskreter Verband ist. Es sei L ein distributiver relativ komplementärer Verband. $\Theta(L)$ ist ein Stonescher Verband dann und nur dann, wenn L ein bedingt vollständiger Verband ist.*

ÜBER EINEN GEWISSEN ULTRAANTIFILTERRAUM

F. Fiala, Brno

G sei eine l-Gruppe, Γ die Menge aller Komponenten und Π' die Menge aller dualen Hauptkomponenten in G. Γ und Π' sind Verbände. Ist x ein Ultraantifilter auf Γ, dann bezeichnet man die (mengentheoretische) Vereinigung aller Komponenten aus x mit Ux. Ux ist eine einfache l-Untergruppe in G (d.h. von je zwei komplementären Komponenten ist mindestens eine in Ux enthalten). Einen Ultraantifilter x auf Γ nennt man standard, wenn $Ux \neq G$ gilt.

Die Menge aller standarden Ultraantifilter auf Γ bezeichnen wir $\mathcal{U}_s(\Gamma)$. Ein Ultraantifilter $x \in \mathcal{U}_s(\Gamma)$ ist dann und nur dann standard, wenn er mindestens eine duale Hauptkomponente umfasst.

Auf $\mathcal{U}_s(\Gamma)$ definieren wir für jedes $f' \in \Pi'$ $Vf' = \{x \mid x \in \mathcal{U}_s(\Gamma), f' \in x\}$ und bezeichnen $\Sigma' = \{Vf' \mid f' \in \Pi'\}$. Σ' bildet eine Basis für offene Mengen in $\mathcal{U}_s(\Gamma)$.

Satz 1. *Ist $\mathfrak{G}$ eine l-Gruppe, die eine Realisierung hat, und ist $G = (G_x \mid x \in M)$ ihre Γ-Realisierung, dann sind die topologischen Räume $\mathcal{U}_s(\Gamma)$ und (M, G) homeomorph. Hierbei ist (M, G) der topologische Raum, der durch die Γ-Realisierung G induziert wird.*

Satz 2. *Für eine l-Gruppe G sind folgende Bedingungen äquivalent:*

1. *$\mathcal{U}_s(\Gamma)$ ist ein B-Raum (i.e. $\bar{x} = x$ für jedes $x \in \mathcal{U}_s(\Gamma)$).*
2. *Für $x, y \in \mathcal{U}_s(\Gamma)$, $x \neq y$, sind die Mengen Ux, Uy unvergleichbar durch Inklusion.*

Wir stellen jetzt diese Bezeichnung auf:

Wir sagen, dass ein Ultraantifilter x auf Γ die Bedingung (α) erfüllt, wenn für jedes $K \in x$ ein $f' \in \Pi'$ mit den Eigenschaften $f' \in x$, $K \subseteq f'$, existiert.

Erfüllt ein Ultraantifilter x die Bedingung (α), dann ist x standard, d.h. $x \in \mathcal{U}_s(\Gamma)$.

Satz 3. *Es sei G eine l-Gruppe. Wenn ein $x \in \mathcal{U}_s(\Gamma)$ die Bedingung (α) erfüllt, dann gilt für beliebige $y \in \mathcal{U}_s(\Gamma)$, $y \neq x$*

1. *$x \bar{\in} \bar{y}$ im Raum $\mathscr{U}_s(\Gamma)$.*
2. *$Uy \nsubseteq Ux$, d.h. Ux ist eine minimale einfache Untergruppe in G (= ein minimales Element der Menge aller einfachen Untergruppen in G).*

Satz 4. *G sei eine l-Gruppe. Wenn jedes $x \in \mathscr{U}_s(\Gamma)$ die Bedingung (α) erfüllt, dann gilt:*

1. *$\mathscr{U}_s(\Gamma)$ ist ein B-Raum.*
2. *Für beliebige $x, y \in \mathscr{U}_s(\Gamma)$, $x \neq y$ sind die Mengen Ux, Uy unvergleichbar durch Inklusion.*
3. *Jede Menge $Vf' \in \Sigma'$ ist offen und gleichzeitig abgeschlossen.*
4. *$\mathscr{U}_s(\Gamma)$ ist vollständig regulär.*

ON SOLUTIONS OF EQUATIONS IN GENERALIZED RINGS OF SETS

P. KRATOCHVÍL, Praha

Let X be a nonvoid set, k a positive integer. Let P_k be the set of all sequences $[A_1, A_2, \ldots, A_k]$ consisting of k disjoint subsets $A_i \subset X$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Denote such sequences by $[A_i]$ or by Greek letters.

Let $E_i = (A_i - B) \cup (B_i - A) \cup [\bigcup_{r+s \equiv i} (A_r \cap B_s)]$, $F_i = \bigcup_{rs \equiv i} (A_r \cap B_s)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, where $\equiv$ means congruence modulo $(k+1)$ and $A = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$, $B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$. Define addition and multiplication in P_k as follows: $[E_i] = [A_i] + [B_i]$, $[F_i] = [A_i] \cdot [B_i]$. Then P_1 is the well-known ring of all subsets of X with the ring operations $\div$ and $\cap$.

This lecture deals with the solutions of equations in P_3. Let P' be the subset of P_3 consisting of all elements $[X_i] \in P_3$ such that $X_1 \cup X_3 = \emptyset$. Then P' is an ideal in P_3, and the quotient ring P_3/P' is isomorphic to P_1. The equation is then easily solved in P_3/P'. Using suitable methods it is possible to give necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of the equation in P_3, and to solve it.

Let

$$\alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma = 0 \tag{1}$$

be an equation in P_3, where α, β, γ are given elements and ξ is an unknown element of P_3. Let $\alpha = [A_1, A_2, A_3]$, $A = A_1 \cup A_3$, $A_0 = X - (A \cup A_2)$, and analogously for β, γ, ξ. There exists a solution of (1) if and only if the following three conditions are satisfied: $C \subset A + B$, $C_2[A_0B_0 + A_2B_2 + (A \dot{-} B)] = \emptyset$, $AC(A_1 + C_1 + B_0) \subset B$.

The set of all solutions of (1) consists of all $\xi \in P_3$ such that

$$\xi = [\bar{X}_1, \emptyset, \emptyset] + [\emptyset, X_2', \emptyset],$$

where

$$\bar{X}_1 = C + C_2(A_0B_2 + A_2B_0) + \bar{X}_v$$

and $\bar{X}_v$, X'_2 are sets such that

$$\bar{X}_v \subset AB + A_0B_0 + A_2B_2\,, \quad BX'_2 = \bar{X}_1(AB + A_2 + A_3 + B_2 + B_3) + C_1 + C_2\,.$$

The rings P_k were defined by Professor J. NOVÁK, who gave the solutions of (1) in P_2 and formulated analogous problems in P_3.

UNIVERSAL QUASI-ORDERED SETS

V. NOVÁK, Brno

A quasi-ordered set is a non-empty set G together with a reflexive and transitive relation $\leqq$. Quasi-ordered sets G, H are isomorphic if there exists a one-to-one mapping φ of G onto H such that $x, y \in G$, $x \leqq y \Leftrightarrow \varphi(x) \leqq \varphi(y)$. A quasi-ordered set G is called an m-universal quasi-ordered set ($m > 0$ a cardinal) if, for any quasi-ordered set H such that card $H \leqq m$, there exists a subset $H' \subseteq G$ isomorphic with H.

If $\alpha > 0$ is an ordinal and $\{a_\lambda \mid \lambda < \alpha\}$, $\{b_\lambda \mid \lambda < \alpha\}$ are sequences of type α, then the sequence $\{a_\lambda \mid \lambda < \alpha\}$ is called a subsequence of the sequence $\{b_\lambda \mid \lambda < \alpha\}$ if there exists a strictly increasing sequence $\{\beta_\lambda \mid \lambda < \alpha\}$ of type α of ordinals less than α, such that $a_\lambda = b_{\beta_\lambda}$ for every $\lambda < \alpha$. If $\alpha > 0$ is an ordinal, M a non-empty set, then we denote by $F(\alpha, M)$ the set of all sequences of type α formed of elements of M, together with the relation $\leqq$ defined as follows: $\{a_\lambda \mid \lambda < \alpha\} \leqq \{b_\lambda \mid \lambda < \alpha\}$ if and only if the sequence $\{a_\lambda \mid \lambda < \alpha\}$ is a subsequence of the sequence $\{b_\lambda \mid \lambda < \alpha\}$. Clearly, this relation is reflexive and transitive, so that $F(\alpha, M)$ is a quasi-ordered set. The type of this set depends only on the cardinality m of M; we denote this type by $F(\alpha, m)$. Then there holds the following theorem:

Theorem 1. *Each quasi-ordered set of type $F(\omega_\alpha\,.\,2, \aleph_\alpha)$ is an $\aleph_\alpha$-universal quasi-ordered set.*

For regular cardinal numbers a stronger result can be proved:

Theorem 2. *If $\aleph_\alpha$ is a regular cardinal number, then each quasi-ordered set of type $F(\omega_\alpha, \aleph_\alpha)$ is an $\aleph_\alpha$-universal quasi-ordered set.*

FUNCTIONS OF A BOUNDED VARIATION ON PARTIALLY ORDERED SETS

I. KOREC, Bratislava

Let M be a non-empty partially ordered set. We shall denote by $[a, b]$ the interval in M with the end-points a, b ($a \leqq b$). A partition of a segment $[a, b]$ is a finite sequence $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ of points of M such that $a = x_0 \leqq x_1 \leqq \ldots \leqq x_n = b$.

A real function f defined on M will be called reducible if there exist real non-decreasing functions p, q defined on M such that $f = p - q$. The total variation of the function f on the interval $[a, b]$ is defined as $V_a^b(f) = \sup\limits_{(x_0, x_1, \ldots, x_n)} \sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ where $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ varies over all partitions of the interval $[a, b]$. A function f will be called function of bounded variation if $V_a^b(f) < \infty$ for any $a, b \in M$, $a \leqq b$. Any reducible function is a function of bounded variation. The converse assertion is in general not true. Sufficient conditions for the reducibility of a function f are, e.g., as follows:

1. $\sup \{V_x^y(f) : x \in M, x \leqq y\} < \infty$ *for any* $y \in M$,
2. $\sup \{V_y^x(f) : x \in M, y \leqq x\} < \infty$ *for any* $y \in M$.

Necessary and sufficient conditions are as follows:

3. *There exists a non-decreasing function* p *such that* $V_a^b(f) \leqq p(b) - p(a)$ *for any* $a, b \in M$, $a \leqq b$.

4. *There exist subsets* $M_1 \subset M$, $M_2 \subset M$ *such that* $M_1 \cup M_2 = M$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, *that* $x \in M_1$, $y \leqq x$ *imply* $y \in M_1$, *and that condition* 1) *is satisfied on* M_2 *and condition* 2) *on* M_1.

Sufficient conditions for the reducibility of any function with bounded variation defined on M, are e.g. as follows:

1) *There exist* $x_1, \ldots, x_n \in M$ *such that* $M = (x_1] \cup \ldots \cup (x_n] \cup [x_1) \cup \ldots \cup [x_n)$.

2) *There exists a countable system of subchains of* M *such that its set-theoretic sum* R *has the property that for any* $x \in M$ *there exist* $y, z \in R$ *with* $y \leqq x \leqq z$.

An example is given showing that there exist functions of bounded variation which are not reducible. Finally, some properties of the set of all reducible functions and all functions of bounded variation defined on M are studied.

GEORDNETE KOMPAKTIFIKATIONEN

L. Skula, Brno

Unter topologischen Räumen versteht man in diesem Vortrag Räume, die folgende Axiomen erfüllen: 1) $\bar{X} = X$ für jede endliche Menge X, 2) $\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cup \bar{Y}$, 3) für die Punkte $x \neq y$ gibt es eine Umgebung U_x des Punktes x und eine Umgebung U_y des Punktes y, so dass $U_x \cap U_y = \emptyset$.

S sei ein System der Untermengen des topologischen Raumes P und es sei für jeden Punkt $x \in P$ eine solche Umgebung U dieses Punktes gegeben, dass $U \in S$ ist. Wenn es für jedes solches System S ein endliches Untersystem S' gibt, so dass $\bigcup S' = P$ ist, dann heisst der Raum P kompakt.

Die Kompaktifikation des topologischen Raumes P ist ein topologischer Raum R mit folgenden Eigenschaften: 1) $\bar{P} = R$, 2) R ist kompakt.

Für die Kompaktifikationen P_1, P_2 des topologischen Raumes Q setzen wir $P_1 \varrho P_2$, wenn es eine solche Abbildung P_1 in P_2 gibt, dass $f(x) = x$ für $x \in Q$ ist und dass für $z \in P_1$ und für jede Umgebung V des Punktes $f(z)$ eine solche Umgebung U des Punktes z existiert, dass $U \cap Q = V$ ist. Wenn wir die Räume P_1, P_2 identifizieren, für welche $P_1 \varrho P_2$, $P_2 \varrho P_1$ gilt, so ist die Relation ϱ die Ordnungsrelation und die Menge K dieser Kompaktifikationen bildet einen vollständigen Vereinigungshalbverband mit dem grössten Element. In diesem Vortrag werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen gegeben, unter denen K ein distributiver oder modularer Verband ist.

Es werden weiter einige Eigenschaften des grössten Elementes der Menge K beschrieben und die notwendigen und hinreichenden Bedingungen gegeben (falls Q ein vollständig regulärer Raum ist), unter welchen $\mathfrak{H}(Q) = \beta(Q)$ ist, wo $\mathfrak{H}(Q)$ das grösste Element der Menge K bezeichnet.

ADDITIVE UND ISOTONE FUNKTIONALE AUF TEILWEISE GEORDNETEN GRUPPEN

B, Šmarda, Brno

In der Arbeit werden zwei Probleme behandelt:

1. Man sucht (notwendige und hinreichende) Bedingungen für die Existenz der von Null verschiedenen additiven und isotonen Funktionale (kürzer ai-Funktionale) auf einer teilweise geordneten Gruppe (d.h. einer homomorphen und isotonen Abbildung einer teilweise geordneten Gruppe in die linear geordnete additive Gruppe von reellen Zahlen).

2. Es sei H eine Untergruppe der teilweise geordneten Gruppe G und f ein ai-Funktional auf $H, f \not\equiv 0$. Man untersucht solche Bedingungen, unter denen eine additive und isotone Fortsetzung F des ai-Funktionals f von H auf G existiert (d.h. F ist ein ai-Funktional auf G und $F(a) = f(a)$ für $a \in H$).

Beide Probleme hat F. Šik für kommutative Gruppe in der Arbeit „*Über additive und isotone Funktionale auf geordneten Gruppen*", Czechoslovak Math. J. *12* (87), 1962, 611–621 gelöst. Eine Veralgemeinerung der Resultate dieser Arbeit für nichtkommutative Gruppen wird im Satz 1 und Satz 2 formuliert.

Unter einer teilweise geordneten Gruppe (G, R) (kürzer po-Gruppe) versteht man eine additive (nicht notwendig kommutative) teilweise geordnete Gruppe. Die Relation $\geqq$ der teilweisen Ordnung ist mit Hilfe einer Menge $R = \{x \in G : x \geqq 0\}$ mit folgenden charakteristischen Eigenschaften gegeben:
$a \geqq b \Leftrightarrow a - b \in R$; $R + R \subset R$; $R \cap - R = \{0\}$; $c + R - c \subset R$, für $c \in G$. Die Menge R nennt man die Ordnung der Gruppe G. Die Ordnung T der Gruppe G ist eine Erweiterung der Ordnung R der Gruppe G, wenn $T \supset R$ gilt.

Definition: Es sei H eine Untergruppe der po-Gruppe (G, R), K der Kommutant der po-Gruppe (G, R) und $S_{G,R} = \{x \in G$: es existieren Elemente $u, v \in K$ so, dass $u \geqq x \geqq v\}$. Dann sagt man, dass G schwach $S_{G,R}$-konfinal, bzw. $S_{G,R}$-konfinal mit H in Bezug auf R ist, wenn folgendes gilt:

Zu jedem $x \in G_\infty$ existiert eine natürliche Zahl m und ein Element $a \in H$ so, dass $a - mx \in R + S_{G,R}$, bzw.: Zu jedem $x \in G$ existiert ein Element $a \in H$ so, dass $a - x \in R + S_{G,R}$, $a - x$ non $\in S_{G,R}$.

Satz 1. *Es sei H eine Untergruppe der po-Gruppe (G, R), g ein ai-Funktional auf $(H, H \cap R)$, $g \not\equiv 0$. Die Fortsetzung des ai-Funktionals g von H auf (G, R) existiert dann und nur dann, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

a) *Es existiert eine Erweiterung T der Ordnung R so, dass G schwach $S_{G,T}$-konfinal mit der Untergruppe $\bar{H} = H + S$ in Bezug auf T ist,*

b) $g(H \cap S_{G,T}) = 0$,

c) $h \in H,\ s \in S_{G,T},\ h + s \in T \Rightarrow g(h) \geqq 0$.

Anmerkung: Die Formulierung des Satzes 1 bleibt richtig, wenn wir die Worte „schwach $S_{G,T}$-konfinal" durch die Worte „$S_{G,T}$-konfinal" ersetzen.

Satz 2. *Es sei (G, R) eine po-Gruppe. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:*

1. *Es existiert ein auf (G, R) von Null verschiedenes ai-Funktional.*
2. *Es existiert eine Erweiterung $T \neq 0$ der Ordnung R und ein solches Element $a \in G$, dass für ein beliebiges Element $x \in G$ eine ganze Zahl m mit der Eigenschaft $ma - x \in T + S_{G,T}$, $ma - x \notin S_{G,T}$ existiert.*
3. *Es existiert eine Erweiterung T der Ordnung R, T non $\subset S_{G,T}$ und ein Element $a \in G$ so, dass für ein beliebiges Element $x \in G_\infty$ eine ganze Zahl m und eine natürliche Zahl p mit der Eigenschaft $ma - px \in T + S_{G,T}$ existiert.*