Iva Rohlíčková

Poznámka o počtu koster grafu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 91 (1966), No. 1, 89--91

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117545

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

POZNÁMKA O POČTU KOSTER GRAFU

IVA ROHLÍČKOVÁ, Praha

(Došlo dne 27. května 1965)

V teorii grafů se řada autorů zabývala tímto problémem: Určit počet koster v konečném neorientovaném souvislém grafu. Počet koster úplného grafu stanovil CAYLEY [1]. Metodu pro určení počtu koster grafu, založenou na výpočtu jistého determinantu, udal TRENT, který také stanovil vzorce pro počet koster dvou zvláštních případů grafů [2]. Týmiž dvěma typy grafu se zabýval roku 1958 WEINBERG v práci, v níž uvedl jednoduchou metodu pro výpočet determinantu, který udává počet koster [3]. Počet koster pro úplné sudé grafy uvedli téhož roku FIEDLER a SEDLÁČEK [4]. Ještě obecnějším případem[1]) se zabýval AUSTIN [5]. V roce 1961 jsem uveřejnila vzorec pro počet koster jiného typu grafů [6].[2]) V témže roce uvedl BEDROSIAN vzorce pro počty koster grafů, které vznikly z úplného grafu vynecháním jistých skupin hran [7]. Udal celkem čtyři typy grafů, mezi nimi oba případy Weinbergovy. Zobecnění obou Weinbergových typů grafů podal O'NEIL [8] v roce 1963. Bedrosian v roce 1964 navázal na svou dřívější práci a stanovil způsob výpočtu počtu koster grafu, který z daného grafu vznikne přidáním nebo ubráním jisté skupiny hran [9].

V tomto článku uvádím vzorec pro počet koster dalšího typu grafu.

Věta. *Budiž $G = [U, H]$ souvislý neorientovaný graf s množinou uzlů $U = \bigcup_{i=1}^{r} U_i$ a množinou hran $H = \bigcup_{i=1}^{r} H_i$, kde $r \geqq 3$ (přičemž pro $i \neq j$ je $U_i \cap U_j = H_i \cap H_j = \emptyset$) a $U_i = \{u_{i,1}, u_{i,2}, \ldots, u_{i,n_i}\}$, $H_i = \{u_{i,k}u_{i+1,l} \mid 1 \leqq k \leqq n_i,\ 1 \leqq l \leqq n_{i+1}\}$, přičemž $n_i \geqq 1$, $n_0 = n_r$, $n_{r+1} = n_1$. Pak počet koster grafu G je dán vzorcem*

$$\prod_{i=1}^{r} n_i (n_{i-1} + n_{i+1})^{n_i - 1} \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i \cdot n_{i+1}}.$$

[1]) Množinu uzlů každého sudého grafu obsahujícího alespoň dva uzly, lze rozložit do dvou disjunktních tříd tak, že žádné dva různé uzly z téže třídy nejsou spojeny hranou. Austinova práce se týká grafu, jehož uzly jsou rozloženy do r disjunktních tříd ($r \geqq 2$) obdobné vlastnosti. Jde vlastně o případ jednoho z typů grafů zkoumaných též Weinbergem.

[2]) Viz též zprávu o prvním celostátním semináři z teorie grafů a jejich aplikací, pořádaném r. 1961 v Liblicích — Časopis pro pěstování matematiky, *86* (1961), 501—502.

Důkaz se provede známým způsobem – výpočtem jistého determinantu $(n - 1)$-ho stupně, kde $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$. Sestavíme determinant n-tého stupně, pro jehož prvky a_{ij} platí

1. $a_{ij} = a_{ji} = 0$, jestliže v grafu G neexistuje hrana $u_i u_j$ $(i \neq j)$,
2. $a_{ij} = a_{ji} = -1$, jestliže v grafu G existuje hrana $u_i u_j$ $(i \neq j)$,
3. $a_{ii} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} \; (= \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} a_{ki})$.

Subdeterminant tohoto determinantu příslušný k libovolnému prvku a_{ii} udává počet koster grafu G. Numerický výpočet zde neuvádím.

Literatura

[1] *A. Cayley:* Collected Mathematical Papers, (1889—1897), Cambridge University Press, Vol. *13*, pp. 26—28.

[2] *H. M. Trent:* A Note on the Enumeration and Listing of all possible Trees in a conected linear Graph, Proc. Natl. Acad. Sci., Vol. *40*, pp. 1004—1007, October 1954.

[3] *L. Weinberg:* Number of Trees in a Graph, Proc. IRE, Vol. *46* No. 12, pp. 1954—1955, Dec., 1958.

[4] *M. Fiedler, J. Sedláček:* O W-basích orientovaných grafů, Časopis pro pěstování matematiky, *83* (1958), 214—225.

[5] *T. Austin:* The Enumeration of Point labelled chromatic Graphs and Trees, Canadian Journal Math. XII — 1960, 535—545.

[6] *I. Rohlíčková:* Dva doplňky ke Cayleyho vzorci, Sborník Pedagogického institutu v Praze, Přírodní vědy, 1961, str. 21—34.

[7] *S. D. Bedrosian:* Formulas for the Number of Trees in a Network, IRE Trans. on Circuit Theory, Vol. CT-*8*, pp. 363—364, Sept. 1961.

[8] *P. V. O'Neil:* The Number of Trees in a Certain Network, presented at Meeting No. 604, Am. Math. Soc., Brooklyn, N.Y., Oct., 1963.

[9] *S. D. Bedrosian:* Generating Formulas for the Number of Trees in a Graph, Journal of The Franklin Institute, Vol. *277*, Nr. 4, pp. 313—326, April 1964.

Adresa autora: Praha 9-Libeň, Drahobejlova 49.

Резюме

ЗАМЕТКА О ЧИСЛЕ ОСНОВ ГРАФА

ИВА РОГЛИЧКОВА (Iva Rohlíčková), Прага

Пусть $G = [U, H]$ — связный неориентированный граф с множеством вершин $U = \bigcup_{i=1}^{r} U_i$ и множеством ребер $H = \bigcup_{i=1}^{r} H_i$, где $r \geqq 3$, причем $U_i \cap U_j = H_i \cap \cap H_j = \emptyset$ для $i \neq j$. Пусть $U_i = \{u_{i,1}, u_{i,2}, \ldots, u_{i,n_i}\}$, $H_i = \{u_{i,k}, u_{i+1,l} \mid 1 \leqq k \leqq \leqq n_i,\ 1 \leqq l \leqq n_{i+1}\}$, $n_i \geqq 1$, $n_0 = n_r$, $n_{r+1} = n_1$. Тогда число основ графа G равно

$$\prod_{i=1}^{r} n_i (n_{i-1} + n_{i+1})^{n_i - 1} \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i \,.\, n_{i+1}} \,.$$

Summary

A NOTE ON THE NUMBER OF SPANNING TREES OF A GRAPH

Iva Rohlíčková, Praha

Let $G = [U, H]$ be a connected undirected graph with a vertex set $U = \bigcup_{i=1}^{r} U_i$ and an edge set $H = \bigcup_{i=1}^{r} H_i$, where $r \geqq 3$ and $U_i \cap U_j = H_i \cap H_j = \emptyset$ for each $i \neq j$. Let $U_i = \{u_{i,1}, u_{i,2}, \ldots, u_{i,n_i}\}$, $H_i = \{u_{i,k} u_{i+1,l} \mid 1 \leqq k \leqq n_i, 1 \leqq l \leqq n_{i+1}\}$, $n_i \geqq 1$, $n_0 = n_r$, $n_{r+1} = n_1$. Then the number of spanning trees of the graph G is

$$\prod_{i=1}^{r} n_i (n_{i-1} + n_{i+1})^{n_i - 1} \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i \,.\, n_{i+1}} \,.$$