Štefan Schwabik

Extremale Regelungen für die lineare zeitoptimale Regelungsaufgabe mit einem konvexen Regelungsbereich

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 91 (1966), No. 1, 80--88

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117544

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 91 (1966), Praha

EXTREMALE REGELUNGEN FÜR DIE LINEARE ZEITOPTIMALE REGELUNGSAUFGABE MIT EINEM KONVEXEN REGELUNGSBEREICH

ŠTEFAN SCHWABIK, Praha

(Eingelangt am 9. März 1965)

I. Es sei E_k der k-dimensionale Euklidische Raum. Wir untersuchen das System

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{1}$$

wo $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in E_n$, $\dot{\boldsymbol{x}} = (dx_1/dt, \ldots, dx_n/dt)$, $\boldsymbol{u} = u_1, \ldots, u_r) \in E_r$ ist, $\boldsymbol{A}$ ist eine konstante $n \times n$ Matrix, $\boldsymbol{B}$ ist eine konstante $n \times r$ Matrix und es ist $\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ genau dann wenn $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ ist; weiter sei $\boldsymbol{u} \in U \subset E_r$ wobei U eine konvexe kompakte Menge ist, die $\boldsymbol{0} = (0, \ldots, 0) \in E_r$ als ihren inneren Punkt enthält (U ist ein konvexer Körper).

Für $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E_n$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ bezeichnen wir $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ (das Skalarprodukt) und $|\boldsymbol{x}| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ (die Norm). Für ein reelles k und $\boldsymbol{x} \in E_n$ sei $k\boldsymbol{x} = (kx_1, \ldots, kx_n)$.

Die Aufgabe eine zeitoptimale Regelung zu finden beruht in diesem: Es seien zwei Punkte $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in E_n$ gegeben. Wir suchen eine Funktion $\boldsymbol{u}(t) : 0 \leqq t \leqq T$ so, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) $\boldsymbol{u}(t)$ ist messbar (im Lebesgueschem Sinne),

b) $\boldsymbol{u}(t) \in U$ für fast alle $t \in \langle 0, T \rangle$,

c) ist $\boldsymbol{x}(t)$ die Lösung des Systems $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$ so, dass $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}^1$ ist dann ist auch $\boldsymbol{x}(T) = \boldsymbol{x}^2$,

d) sei $\boldsymbol{u}^1(t) : 0 \leqq t \leqq T_1$ eine Funktion, die a), b) und c) erfüllt, dann ist $T \leqq T_1$.

Eine Funktion, die a), b), c) erfüllt, nennen wir eine Regelung des Systems (1), die den Punkt $\boldsymbol{x}^1$ in den Punkt $\boldsymbol{x}^2$ führt. Die Regelung, die den Punkt $\boldsymbol{x}^1$ in den Punkt $\boldsymbol{x}^2$ führt und für die d) erfüllt ist, nennen wir eine zeitoptimale Regelung des Systems (1), die den Punkt $\boldsymbol{x}^1$ in den Punkt $\boldsymbol{x}^2$ führt.

Laut dem Maximumprinzip von Pontrjagin ([1]) gibt es für eine so definierte zeitoptimale Regelung einen Punkt $\boldsymbol{\psi} \in E_n$, $\boldsymbol{\psi} \neq \boldsymbol{0}$ so, dass

$$(e^{-\boldsymbol{A}'t}\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)) = \max_{\boldsymbol{u} \in U} (e^{-\boldsymbol{A}'t}\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}) \tag{2}$$

für fast alle $t \in \langle 0, T \rangle$ gilt, wobei $\boldsymbol{A}'$ die zu $\boldsymbol{A}$ transponierte Matrix ist.

Bemerkung. Nach (2) kann man die optimale Regelung berechnen, sobald $\boldsymbol{u}(t)$ für alle $\boldsymbol{\psi} \in E_n$, $\boldsymbol{\psi} \neq \boldsymbol{0}$ durch (2) fast überall eindeutig bestimmt ist und falls es bekannt ist welcher Punkt $\boldsymbol{\psi}$ zur gesuchten Regelung gehört.

Definition 1. Die Funktion $\boldsymbol{u}(t) : 0 \leqq t \leqq T$ nennen wir eine extremale Regelung, die zu $\boldsymbol{\psi} \in E_n$ gehört, sobald diese für fast alle $t \in \langle 0, T \rangle$ (2) erfüllt.

In der Monografie [1] und der Arbeit [2] wird für spezielle Mengen U (U ist ein konvexer Polyeder in einer besonderen Lage, resp. U ist der Durchschnitt einer gleichmässig konvexen Menge mit einem konvexen Polyeder in besonderer Lage) gezeigt, dass zu jedem $\boldsymbol{\psi}$ genau eine extremale Regelung gehört. Von dem folgt dann auch die Eindeutigkeit der optimalen Regelung. Hier wird gezeigt, dass wenn U ein konvexer Körper ohne weitere Beschränkungen ist, dann ist die Situation komplizierter und es wird die obige Frage in diesem Fall vollständig gelöst.

II. In diesem Absatz untersuchen wir einige Eigenschaften konvexer Mengen. Sei $U \subset E_n$ ein konvexer Körper.

Definition 2. Sei $\boldsymbol{\psi} \in E_n$, $\boldsymbol{\psi} \neq \boldsymbol{0}$ und $\gamma > 0$. Die Menge der Punkte $\boldsymbol{x} \in E_n$, für die $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{x}) = \gamma$ nennen wir eine Stützebene des konvexen Körpers U mit der Normale $\boldsymbol{\psi}$, wenn für alle $\boldsymbol{u} \in U$ die Ungleichung $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{u}) \leqq \gamma$ gilt und sobald es einen Punkt $\boldsymbol{u}^1 \in U$ gibt, so, dass $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{u}^1) = \gamma$ ist.

Die Theorie der konvexen Körper sichert, dass für jeden Punkt $\boldsymbol{\psi} \in E_n$, $\boldsymbol{\psi} \neq \boldsymbol{0}$ genau eine Stützebene des Körpers U existiert und dass durch jeden Randpunkt des konvexen Körpers U mindestens eine Stützebene geht (Vgl. [4]).

Bemerkung. Die Zahl γ von der Definition 2. ist für ein gegebenes $\boldsymbol{\psi} \in E_n$, $\boldsymbol{\psi} \neq \boldsymbol{0}$ eindeutig bestimmt. Wir bezechnen diese $\gamma_U(\boldsymbol{\psi})$; offenbar ist $\gamma_U(\boldsymbol{\psi}) = \sup_{\boldsymbol{u} \in U} (\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{u})$. Es ist $\gamma_U(\boldsymbol{\psi}) > 0$ für einen beliebigen Punkt $\boldsymbol{\psi} \in E_n$, $\boldsymbol{\psi} \neq \boldsymbol{0}$ nachdem $\boldsymbol{0} \in E_n$ ein innerer Punkt von U ist. Weiter ist $\gamma_U(k\psi) = k\gamma_U(\psi)$ für eine reelle Zahl $k > 0$. Deswegen sind die Stützebenen $(\psi, \boldsymbol{x}) = \gamma_U(\psi)$ und $(k\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{x}) = \gamma_U(k\boldsymbol{\psi})$ für $k > 0$ gleich und man muss diese nicht unterscheiden. Eine Stützebene wird durch eine Klasse der Punkte $\boldsymbol{\psi} \in E_n$ bestimmt, die sich nur durch einen positiven Faktor unterscheiden. Aus dieser Klasse kann man einen Punkt $\boldsymbol{\psi}$ so wählen, dass $\gamma_U(\boldsymbol{\psi}) = 1$ ist (d.h. ist $\boldsymbol{\psi}^1 \in E_n$ ein Punkt der gegebenen Klasse, dann genügt es $k = 1/[\gamma_U(\boldsymbol{\psi}^1)]$ zu legen und es ist $\boldsymbol{\psi} = k\boldsymbol{\psi}^1$).

Definition 3. Den Punkt $\boldsymbol{u}^R \in U$ nennen wir einen regulären Randpunkt des konvexen Körpers U, wenn genau eine Klasse der Punkte $\boldsymbol{\psi} \in E_n$, $\boldsymbol{\psi} \neq \boldsymbol{0}$, die bis auf einen positiven Faktor $k > 0$ bestimmt sind, existiert so, dass $(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{u}^R) = \gamma_U(\boldsymbol{\psi})$ ist.

Den Punkt $\boldsymbol{u}^S \in U$ nennen wir einen singulären Randpunkt des konvexen Körpers U, wenn zwei linear unabhängige Punkte $\boldsymbol{\psi}^1, \boldsymbol{\psi}^2 \in E_n$ existieren, so, dass $(\boldsymbol{\psi}^i, \boldsymbol{u}^S) = \gamma_U(\boldsymbol{\psi})$ für $i = 1, 2$ ist.

Es ist klar, dass jeder regulärer bzw. singulärer Randpunkt zum Rande des konvexen Körpers U gehört und dass jeder Randpunkt des Körpers U ein regulärer bzw. singulärer Randpunkt sein muss.

Definition 4. Die Stützebene $(\psi^R, \boldsymbol{x}) = \gamma_U(\psi^R)$ des konvexen Körpers U heisst regulär, wenn genau ein Punkt $\boldsymbol{u} \in U$ existiert so, dass $(\psi^R, \boldsymbol{u}) = \gamma_U(\psi^R)$ ist.

Die Stützebene $(\psi^S, \boldsymbol{x}) = \gamma_U(\psi^S)$ des konvexen Körpers U heisst singulär wenn zwei Punkte $\boldsymbol{u}^1, \boldsymbol{u}^2 \in U, \boldsymbol{u}^1 \neq \boldsymbol{u}^2$ existieren so, dass $(\psi^S, \boldsymbol{u}^1) = (\psi^S, \boldsymbol{u}^2) = \gamma_U(\psi^S)$ ist.

Wir definieren nun zur konvexen Menge U eine duale Menge $\tilde{U}$:

$$\tilde{U} = \{\psi \in E_n ; (\psi, \boldsymbol{u}) \leqq 1 \text{ für alle } \boldsymbol{u} \in U\} .$$

Es gilt dieses

Lemma 1. *$\tilde{U}$ ist eine konvexe kompakte Menge, die den Punkte $\boldsymbol{0} \in E_n$ als ihren inneren Punkt enthält ($\tilde{U}$ ist ein konvexer Körper).*

Der Beweis ist eine leichte Folgerung der Definition von $\tilde{U}$ und der Eigenschaften von U.

Weiter gilt das

Lemma 2. *Es ist $\tilde{\tilde{U}} = U$.*

Beweis. Es sei $\boldsymbol{u} \in U$ und $\psi \in U$ beliebig. Dann ist $(\psi, \boldsymbol{u}) \leqq 1$ und ist $\boldsymbol{u} \in \tilde{\tilde{U}}$. Umgekehrt sei $\tilde{\boldsymbol{u}} \in \tilde{\tilde{U}}$; dann ist $(\tilde{\boldsymbol{u}}, \psi) \leqq 1$ für alle $\psi \in \tilde{U}$. Sollte $\tilde{\boldsymbol{u}} \notin U$ sein, dann existiert laut dem Satz von der Abteilbarkeit des Punktes und einer konvexen Menge durch ein lineares Funktional (Vgl. [4]) ein $\tilde{\psi} \in \tilde{U}$ so, dass $(\tilde{\psi}, \tilde{\boldsymbol{u}}) > 1$ ist und es ist also $\tilde{\boldsymbol{u}} \in U$.

Wir bezeichnen $S(\tilde{U})$ die Menge aller singulären Randpunkte des Körpers $\tilde{U}$. Laut der Definition 3. ist $\psi^S \in S(\tilde{U})$ genau dann, wenn zwei $\bar{\boldsymbol{u}}^1, \bar{\boldsymbol{u}}^2 \in E_n$, die linear unabhängig sind, existieren so, dass $(\psi^S, \bar{\boldsymbol{u}}^i) = \gamma_{\tilde{U}}(\psi^S)$ für $i = 1, 2$ ist. Wir legen $\boldsymbol{u}^i = \bar{\boldsymbol{u}}^i/[\gamma_{\tilde{U}}(\psi^S)]$; offenbar ist $(\psi^S, \boldsymbol{u}^i) = 1$ und $(\psi, \boldsymbol{u}^i) \leqq 1$ für alle $\psi \in \tilde{U}$. Laut der Definition ist $\boldsymbol{u}^i \in \tilde{\tilde{U}}$ und aus dem Lemma 2. folgt, dass auch $\boldsymbol{u}^i \in U$ für $i = 1, 2$ ist. $\boldsymbol{u}^1$ und $\boldsymbol{u}^2$ sind linear unabhängig und der Punkt $\psi^S \in S(\tilde{U})$ representiert also eine singuläre Stützebene des konvexen Körpers U. Umgekehrt ist klar, dass wenn $\psi^S \in E_n$ zu einer singulären Stützebene des konvexen Körpers U gehört, dann ist $\psi^S/[\gamma_U(\psi^S)] \in S(\tilde{U})$. So bekamen wir eine eindeutige Korrespondenz zwischen den Punkten von $S(\tilde{U})$ und den singulären Stützebenen des konvexen Körpers U.

Wir führen nun diesen Satz (Vgl. [3]) an:

Es sei $U \subset E_n$ ein konvexer Körper. Beschreibt man um einen inneren Punkt von U eine Kugel und projiziert von ihrem Mittelpunkt aus die singulären Randpunkte des Körpers U auf die Kugeloberfläche, so ensteht eine Menge, deren bezüglich der Kugeloberfläche genommenes Lebesguesches Mass Null ist.

Benützen wir diesen Satz für den Körper $\tilde{U}$, die Menge $S(\tilde{U})$ und eine Kugel vom Mittelpunkt $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in E_n$ so bekommen wir laut dem Fubinisatz für das Lebesguesche Integral das

Lemma 3. *Es sei $U \subset E_n$ ein konvexer Körper. Sei S die Menge aller $\psi \in E_n$, für welche $(\psi, \mathbf{x}) = \gamma_U(\psi)$ ein singuläre Stützebene des Körpers U ist. Dann ist $\mu_n(S) = 0$ wo μ_n das n-dimensionale Lebesguesche Mass der Menge S ist.*

Bemerkung. Den Fall, dass die Dimension von U gleich k ist, wo $k < n$, $k \neq 0$ kann man so wie den Fall $k = n$ untersuchen wobei man U im E_k untersucht und E_k als einen linearen Unterraum vom E_n auffasst. In diesem Fall ist dann $S = S_k \times E_{n-k}$ wobei S_k die Rolle von S vom Lemma 3. bezüglich auf den Raum E_k hat. Nachdem $\mu_k(S_k) = 0$ ist, ist klar auch $\mu_n(S) = 0$ (siehe [5]) und die Behauptung vom Lemma 3 bleibt gültig. Für $k = 0$ gilt das Lemma 3 nicht, dieses ist aber für den untersuchten Fall der optimalen Regelung unwesentlich.

Bemerkung. Im Falle $n = 2$ kann man die Behauptung vom Lemma 3. verstärken. In diesem Fall sind die singulären Randpunkte des konvexen Körpers gleichzeitig auch seine Eckpunkte (ein Eckpunkt des konvexen Körpers U ist ein Punkt, der eine Stützebene des Körpers $\tilde{U}$ bestimmt, deren Durchschnitt mit $\tilde{U}$ die Dimension $n - 1$ hat) und man kann diese Behauptung anwenden: Ein konvexer Körper besitzt höchstens abzählbar unendlich viele Eckpunkte (siehe [4], Seite 15). Es gilt also, das

Lemma 4. *Sei $U \subset E_2$ ein konvexer Körper. Sei S' die Menge von $\psi' \in E_2$ für die $(\psi', x) = \gamma_U(\psi')$ eine singuläre Stützebene des Körpers U ist. Wir bilden die Menge*

$$S = \left\{ \psi \in E_2 \, ; \; \psi = \frac{\psi'}{|\psi'|} \quad \text{wobei} \quad \psi' \in S' \text{ ist} \right\}.$$

Die Menge hat höchstens abzählbar viele, von sich verschiedene Punkte.

Im Falle $n = 1$ ist U eine gerade Strecke, die im E_1 keinen singulären Punkt besitzt.

III. In diesem Absatz wenden wir die Resultate von **II.** für die zeitoptimale Regelungsaufgabe von **I.** an.

Wir bezeichnen

$$\mathbf{B}U = \{\mathbf{v} \in E_n ; \mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{u} \in U\},$$

wobei $\mathbf{B}$ und U die Symbole von **I.** sind. Es ist klar, dass $\mathbf{B}U \subset E_n$ eine konvexe kompakte Menge ist und dass $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbf{B}U$ ist. Mit Berücksichtigung der obigen Bezeichnungen kann man (2) in der Form

$$(e^{-\mathbf{A}'t}\psi, \mathbf{B}\mathbf{u}(t)) = \max_{\mathbf{u} \in U} (e^{-\mathbf{A}'t}\psi, \mathbf{B}\mathbf{u}) = \max_{\mathbf{w} \in \mathbf{B}U} (e^{-\mathbf{A}'t}\psi, \mathbf{w}) = \gamma_{\mathbf{B}U}(e^{-\mathbf{A}'t}\psi)$$

schreiben. Wir werden weiter die Menge der Punkte $\boldsymbol{w} \in E_n$ untersuchen, für welche

$$(e^{-\boldsymbol{A}'t}\psi, \boldsymbol{w}) = \gamma_{\boldsymbol{B}U}(e^{-\boldsymbol{A}'t}\psi) \tag{3}$$

ist. Durch (3) ist im E_n eine Stützebene zu BU gegeben. Ferner untersuchen wir, für welche ψ und t es Punkte $\boldsymbol{w}^1, \boldsymbol{w}^2 \in BU$, $\boldsymbol{w}^1 \neq \boldsymbol{w}^2$ gibt, so, dass $(e^{-\boldsymbol{A}'t}\psi, \boldsymbol{w}^i) = \gamma_{\boldsymbol{B}U}(e^{-\boldsymbol{A}'t}\psi)$ für $i = 1, 2$ ist, d.h. für welche ψ und t durch (3) eine singuläre Stützebene der Menge $\boldsymbol{B}U$ bestimmt ist. (Für solche ψ und t ist nämlich die extremale Regelung nicht eindeutig bestimmt.) Wir bezeichnen ferner

$$\boldsymbol{M} = \{(t, \psi) \in E_1 \times E_n, \text{ wobei } (e^{-\boldsymbol{A}'t}\psi, \boldsymbol{w}) = \gamma_{\boldsymbol{B}U}(e^{-\boldsymbol{A}'t}\psi) \text{ eine singuläre Stützebene zu } \boldsymbol{B}U \text{ ist}\}\,.$$

Sei $t \in E_1$ beliebig und es sei

$$\boldsymbol{M}_t = \{\psi \in E_n; (t, \psi) \in \boldsymbol{M}\}$$

Es ist

$$\boldsymbol{M}_t = e^{\boldsymbol{A}'t}S\,,$$

wo S die Menge aller Normalen, die zu einer singulären Stützebene von $\boldsymbol{B}U$ im Sinne der Definition 4. gehören und es ist

$$\mu_n(\boldsymbol{M}_t) = \det |e^{\boldsymbol{A}'t}|\, \mu_n(S)$$

Nach dem Lemma 3. ist $\mu_n(S) = 0$ also ist auch für ein beliebiges t die Gleichung $\mu_n(\boldsymbol{M}_t) = 0$ gültig. Laut dem Fubinisatz (siehe z.B.: P. R. Halmos, Measure theory, § 36) ist

$$\mu_{n+1}(\boldsymbol{M}) = 0\,.$$

Ferner sei

$$\boldsymbol{M}_\psi = \{t \in E_1; (t, \psi) \in \boldsymbol{M}\}\,.$$

Wieder laut dem Fubinisatz ist für alle $\psi \in E_n$ (im Sinne des Masses μ_n) die Gleichung

$$\mu_1(\boldsymbol{M}_\psi) = 0$$

gültig. Schliesslich ist durch (3) für fast alle Punkte $\psi \in E_n$ (mit Bezug auf μ_n) eine Funktion $\boldsymbol{w}(t) \in \boldsymbol{B}U$ für fast alle $t \in E_1$ (mit Bezug auf μ_1) eindeutig bestimmt. Mit Rücksicht auf die Eigenschaften der Matrix $\boldsymbol{B}$ entspricht jedem $\boldsymbol{w}(t) \in \boldsymbol{B}U$ gerade ein $\boldsymbol{u}(t) \in U$ so, dass $\boldsymbol{Bu}(t) = \boldsymbol{w}(t)$ ist und wir bekommen den

Satz 1. *Für fast alle $\psi \in E_n$ (mit Bezug auf das n-dimensionale Lebesguesche Mass) ist fast überall im E_1 eindeutig eine extremale Regelung $u(t)$ des Systems* (1) *bestimmt.*

IV. In der optimalen Regelungsaufgabe von **I.** sei $\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{0}$ und sei $T > 0$. Sei ferner Σ_T die Menge der Punkte $\boldsymbol{x}^1 \in E_n$, für die es eine Regelung $\boldsymbol{u}^1(t) : 0 \leqq t \leqq T_1$ gibt, die den Punkt $\boldsymbol{x}^1$ in den Punkt $\boldsymbol{0}$ führt und für die $T_1 \leqq T$ ist. Es ist bekannt

(Vgl. [2]), dass Σ_T eine konvexe kompakte Menge ist. In [2] ist dieser Satz bewiesen: $(\psi x) = \gamma_{\Sigma_T}(\psi)$, $\psi \neq \mathbf{0}$ ist eine Stützebene zu Σ_T und für ein $\mathbf{y} \in \Sigma_T$ gilt die Gleichung $(\psi, \mathbf{y}) = \gamma_{\Sigma_T}$ genau dann wenn man $\mathbf{y}$ in der Form

$$\mathbf{y} = -\int_0^T e^{-A\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{4}$$

schreiben kann, wobei $\mathbf{u}(\tau) : 0 \leqq \tau \leqq T$ die zu ψ gehörende extremale Regelung des Systems (1) ist.

Wir beschränken uns nun auf die extremale Regelungen, die für $\psi \in E_n$ durch die Formel (2) eindeutig bestimmt sind und stellen die Frage welche Punkte von Σ_T diese Regelungen in den Punkt $\mathbf{0}$ führen. Die Antwort auf diese Frage wird im Satz 2. gegeben.

Definition 5. Einen Punkt der konvexen kompakten Menge nennen wir stark extremal, wenn es eine, im Sinne der Definition 4. reguläre Stützebene gibt, die durch diesen Punkt geht.

Satz 2. *Ist die extremale Regelung $\mathbf{u}(\tau)$, die zu $\psi \in E_n$ gehört, fast überall im $\langle 0, T\rangle$ eindeutig bestimmt, dann ist der Punkt $\mathbf{y}$, den die Formel (4) angibt, ein stark extremaler Punkt der Menge Σ_T.*

Der Beweis ist eine leichte Folgerung der Definition 5. und des zitierten Satzes von [2]; die gesuchte reguläre Stützebene bestimmt der Punkt $\psi \in E_n$, zu dem die extremale Regelung $u(\tau)$ gehört.

Bemerkung. Der Satz 2. gilt auch in dem Fall, wenn wir die Voraussetzung von I.: $\mathbf{Bu} = \mathbf{0}$ genau dann, wenn $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ist, vermeiden.

Der Satz 2. gilt auch umgekehrt:

Satz 3. *Sei $\mathbf{y} \in \Sigma_T$ ein stark extremaler Punkt der Menge Σ_T. Dann kann man $\mathbf{y}$ in der Form (4) schreiben, wobei ein $\psi \in E_n$ existiert so, dass die in (4) auftretende extremale Regelung $\mathbf{u}(\tau) : 0 \leqq \tau \leqq T$ zu ψ gehört und fast überall im $\langle 0, T\rangle$ eindeutig bestimmt ist.*

Beweis. Nachdem $\mathbf{y}$ ein stark extremaler Punkt von Σ_T ist, gibt es ein $\psi \in E_n$ so, dass $(\psi, \mathbf{y}) = \gamma_{\Sigma_T}(\psi)$ und $(\psi, \mathbf{z}) < \gamma_{\Sigma_T}(\psi)$ für $\mathbf{z} \in \Sigma_T$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{y}$ ist. Laut dem zitierten Satz von [2] kann man also $\mathbf{y}$ in der Form (4) schreiben. Es sollen am Intervall $\langle 0, T\rangle$ zwei Funktionen $\mathbf{u}^1(\tau)$ und $\mathbf{u}^2(\tau)$ gegeben sein und sie sollen (2) fast überall erfüllen, d.h.

$$(e^{-A'\tau}\psi, \mathbf{B}\mathbf{u}^i(\tau)) = \max_{\mathbf{u}\in U}(e^{-A'\tau}\psi, \mathbf{B}\mathbf{u}) \text{ für } i = 1, 2 \text{ und für fast alle } \tau \in \langle 0, T\rangle\,.$$

Wir definieren für jedes $t \in \langle 0, T\rangle$ eine Funktion $v_t(\tau)$ auf solcheine Weise:

$$\mathbf{v}_t(\tau) = \mathbf{u}^1(\tau) \quad \text{für} \quad 0 \leqq \tau \leqq t$$
$$\mathbf{v}_t(\tau) = \mathbf{u}^2(\tau) \quad \text{für} \quad t < \tau \leqq T\,.$$

Für jedes $t \in \langle 0, T \rangle$ gilt

$$(e^{-A'\tau}\psi, \mathbf{B}\mathbf{v}_t(\tau)) = \max_{u \in U} (e^{-A'\tau}\psi, \mathbf{B}\mathbf{u}) \text{ für fast alle } \tau \in \langle 0, T \rangle .$$

Es ist also

$$\mathbf{y} = -\int_0^T e^{-A\tau}\mathbf{B}\mathbf{v}_t(\tau)\, d\tau \quad \text{für alle} \quad t \in \langle 0, T \rangle .$$

Weiter ist $\mathbf{v}_0(\tau) = \mathbf{u}^2(\tau)$; also ist

$$0 = \int_0^T e^{-A\tau}\mathbf{B}\mathbf{v}_t(\tau)\, d\tau - \int_0^T e^{-A\tau}\mathbf{B}\mathbf{v}_0(\tau)\, d\tau = \int_0^t e^{-A\tau}\mathbf{B}(\mathbf{u}^1(\tau) - \mathbf{u}^2(\tau))\, d\tau$$

für alle $t \in \langle 0, T \rangle$ und also auch $e^{-A\tau}\mathbf{B}(\mathbf{u}^1(t) - \mathbf{u}^2(t)) = \mathbf{0}$ für fast alle $t \in \langle 0, T \rangle$. Von der Voraussetzung über die Matrix $\mathbf{B}$ folgt $\mathbf{u}^1(t) = \mathbf{u}^2(t)$ fast überall im $\langle 0, T \rangle$ was auch zu beweisen war.

Sei E_T die Menge der extremalen Punkte (ein Punkt der konvexen Menge heisst extremal, wenn er auf keine Weise ein innerer Punkt einer zur Menge gehörenden Strecke ist) und A_T die Menge der stark extremalen Punkte der Menge Σ_T. Wir beweisen das

Lemma 5. *Für jeden Punkt $\psi \in E_n$ gilt*

$$\sup_{x \in \mathrm{A}_T} (\psi, \mathbf{x}) = \sup_{x \in \Sigma_T} (\psi, \mathbf{x}) .$$

Beweis. Nachdem $\mathrm{A}_T \subset \Sigma_T$ ist auch $\sup_{x \in \mathrm{A}_T} (\psi, \mathbf{x}) \leqq \sup_{x \in \Sigma_T} (\psi, \mathbf{x})$, Bestimmt ψ eine reguläre Stützebene der Menge Σ_T dann gilt mit Rücksicht auf die Definition 5. das Gleichheitszeichen, d.h. $\sup_{x \in \mathrm{A}_T} (\psi, \mathbf{x}) = \sup_{x \in \Sigma_T} (\psi, \mathbf{x})$. Sei also $\psi \in E_n$ ein Punkt, der eine singuläre Stützebene der Menge Σ_T bestimmt. Nach dem Lemma 3. haben die Punkte $\varphi \in E_n$, die eine reguläre Stützebene bestimmen, volles Mass im E_n und sind dadurch dicht im E_n. Es ist leicht zu sehen, dass es für jede Zahl $\eta > 0$ ein $\psi^* \in E_n$, $|\psi^*| < \eta$ gibt, so dass $\psi + \psi^* \in E_n$ eine reguläre Stützebene zu Σ_T bestimmt. Sei nun $\varepsilon > 0$. Zu diesem $\varepsilon > 0$ bestimmen wir ein $\eta > 0$ so, dass $|(\psi^*, \mathbf{x})| \leqq \leqq |\psi^*|\, |\mathbf{x}| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $\mathbf{x} \in \Sigma_T$ ist (dieses ist möglich nachdem Σ_T eine beschränkte Menge ist). Es ist also

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \sup_{x \in \Sigma_T} (\psi, \mathbf{x}) - \sup_{x \in \mathrm{A}_T} (\psi, \mathbf{x}) = \\ &= \sup_{x \in \Sigma_T} (\psi, \mathbf{x}) - \sup_{x \in \Sigma_T} (\psi + \psi^*, \mathbf{x}) - \sup_{x \in \mathrm{A}_T} (\psi, \mathbf{x}) + \sup_{x \in \mathrm{A}_T} (\psi + \psi^*, \mathbf{x}) \leqq \\ &\leqq \left|\sup_{x \in \Sigma_T} (\psi, \mathbf{x}) - \sup_{x \in \Sigma_T} (\psi + \psi^*, \mathbf{x})\right| + \left|\sup_{x \in \mathrm{A}_T} (\psi, \mathbf{x}) - \sup_{x \in \mathrm{A}_T} (\psi + \psi^*, \mathbf{x})\right| \leqq \\ &\leqq \left|\sup_{x \in \Sigma_T} (\psi^*, \mathbf{x})\right| + \left|\sup_{x \in \mathrm{A}_T} (\psi^*, \mathbf{x})\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon . \end{aligned}$$

Nachdem $\varepsilon > 0$ beliebig war, bekommen wir die geforderte Gleichung.

Von dem Satz von Klee (siehe [6], Kapitel V.) und von dem Lemma 5. folgt dass $\mathrm{E}_T \subset \overline{\mathrm{A}}_T$ ist; weiter ist $\mathrm{A}_T \subset \mathrm{E}_T$. Das bedeutet, dass $\overline{\mathrm{A}}_T = \mathrm{E}_T$ und weiter $\mathbf{konv}\, \mathrm{A}_T = \mathbf{konv}\, \mathrm{E}_T = \Sigma_T$ (wobei $\mathbf{konv}\, \overline{\mathrm{A}}_T$ die konvexe Hülle der Menge $\overline{\mathrm{A}}_T$ und $\overline{\mathrm{A}}_T$ der Abschluss der Menge $\mathbf{A}_T$ im E_n ist). So haben wir die folgende Behauptung bewiesen:

Satz 4. *Die Menge Σ_T ist der Abschluss der konvexen Hülle aller Punkte $\mathbf{y}$ die man in der Form (4) schreiben kann, wobei $u(\tau) : 0 \leqq \tau \leqq T$ am Intervall $\langle 0, T \rangle$ eine zu irgendeinem $\psi \in E_n$ gehörende, fast überall eindeutig bestimmte extremale Regelung ist.*

Literatur

[1] *Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко:* Математическая теория оптимальных процессов, ФИЗМАТГИЗ, Москва, 1961.

[2] *J. Kurzweil:* К линейной теории оптимального управления, Čas. pěst. mat., *89* (1964), 90–101.

[3] *K. Reidemeister:* Über die singulären Randpunkte eines konvexen Körpers, Math. Annalen, *83* (1921), 116–119.

[4] *T. Bonnesen, W. Fenchel:* Theorie der konvexen Körper, Berlin, Springer, 1934.

[5] *N. Dunford, J. T. Schwartz:* Linear operators, Part I: General theory, New York, London 1959.

[6] *M. M. Day:* Normed linear spaces, Berlin, Springer, 1958.

Anschrift des Verfassers: Praha 1, Žitná 25 (Matematický ústav ČSAV).

Výtah

EXTREMÁLNÍ REGULACE PRO LINEÁRNÍ ÚLOHU OPTIMÁLNÍ REGULACE VZHLEDEM K ČASU S KONVEXNÍM OBOREM REGULACE

ŠTEFAN SCHWABIK, Praha

V práci se vyšetřuje lineární soustava

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{1}$$

s konstantními maticemi $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, kde $\mathbf{u}$ je prvek z konvexní množiny U, která má vnitřní bod.

V odstavci II. jsou dokázány některé jednoduché výsledky z teorie konvexních množin, pomocí kterých se ukazuje, že jestliže se definují extremální regulace ze vztahu (2) jako v [1], pak pro skoro všechna $\psi \in E_n$ (ve smyslu n-rozměrné Lebesgueovy míry) jsou určeny jednoznačně skoro všude v E_1 (Věta 1.).

Σ_T je množina všech bodů $\boldsymbol{x}^1 \in E_n$, které lze převést do počátku za čas $T_1 \leqq T$ nějakou regulací soustavy (1). Na základě výsledků práce [2] jsou určeny takové body množiny Σ_T, ze kterých lze dosáhnout počátek pomocí jednoznačně definovaných extremálních regulací na $\langle 0, T \rangle$. Ve větách 2. a 3. jsou pro toto uvedeny nutné a postačující podmínky. V dalším je ukázáno, že množinu Σ_T lze určit pomocí jednoznačných extremálních regulací na intervalu $\langle 0, T \rangle$ (Věta 4.).

Резюме

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ С ВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТЬЮ УПРАВЛЕНИЯ

ШТЕФАН ШВАБИК (Štefan Schwabik), Прага

В работе исследуется линейная система

(1) $$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$$

с постоянными матрицами $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ где $\boldsymbol{u}$ принадлежит выпуклому множеству U с внутренней точкой.

В абзаце II. доказаны некоторые элементарные результаты из теории выпуклых множеств. На основании этого показывается, что при определении экстремального управления из соотношения (2) так как в [1], для почти всех $\boldsymbol{\psi} \in E_n$ (в смысле n-размерной меры Лебега) эти управления однозначны почти всюду в E_1 (Теорема 1.).

Σ_T есть множество всех точек $\boldsymbol{x}^1 \in E_n$, которые возможно перевести в начало координат за время $T_1 \leqq T$ некоторым управлением системы (1). На основании результатов работы [2] определенны такие точки множества Σ_T, из которых возможно попасть в начало координат при помощи однозначно на $\langle 0, T \rangle$ определенных экcремальных управлений. В теоремах 2. и 3. для этого приводятся необходимые и достаточные условия. В далнейшем показано, что множество Σ_T возможно определить при помощи однозначных экстремальных управлений на отрезке $\langle 0, T \rangle$ (Теорема 4.).