Časopis pro pěstování matematiky

Vladimír Petrův

Zu der Existenz der Lösung der Frenetschen Formeln für eine Weltlinie

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 90 (1965), No. 1, 66--78

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117542`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 90 (1965), Praha

ZU DER EXISTENZ DER LÖSUNG DER FRENETSCHEN FORMELN FÜR EINE WELTLINIE

VLADIMÍR PETRŮV, Praha

(Angelangt am 4. Februar 1964)

Es wird gezeigt, dass die Weltlinie eindeutig durch die Funktionen P, Q, R bestimmt ist, und dass die erlaubte Wahl der Integrationskonstanten nichts anderes als die spezielle Wahl des inertialen Systems ist.

F. NOŽIČKA hat bewiesen[1]), dass die Weltlinie ein gewisses System von 16 Differenzialgleichungen (die so genannten Frenetschen Formeln) und dabei noch 10 Bedingungen erfüllen muss. Es ist klar, dass auch umgekehrt jeder Lösung dieses Systems von 16 Differenzialgleichungen, die jene 10 Bedingungen erfüllt, eine Weltlinie entspricht. In der Bemerkung 6 § 4[1]) wird angeführt, dass man sich bei Lösung des Systems der Differenzialgleichungen die Erfüllung dieser 10 Bedingungen für $\tau = 0$ vorschreibt. Es entsteht also die Frage, ob die Erfüllung dieser 10 Bedingungen für $\tau = 0$ schon dazu genügt, damit die Lösung des Systems eine Weltlinie gäbe, d.i. in anderen Worten: ob aus der Erfüllung der 10 Bedingungen für $\tau = 0$ schon die identische Erfüllung dieser 10 Bedingungen (für Lösungen jenes Systems der 16 Differenzialgleichungen) folgt. Wir werden beweisen, dass es so wirklich ist.

Setzen wir (P, Q, R sind stetige, nichtnegative Funktionen in gewissem Intervalle $\langle 0, a)$, $0 < a \leqq +\infty$, P ist nicht gleich Null in diesem Intervall)

$$\sigma = \frac{1}{\mu c} \int_0^\tau P(\varrho)\, d\varrho\,, \tag{1}$$

$$q = \frac{Q}{P}\,, \quad r = \frac{R}{P}\,, \tag{2}$$

$$j_1^\alpha = \frac{1}{c}\, i_1^\alpha,\ j_2^\alpha = i_2^\alpha,\ j_3^\alpha = i_3^\alpha,\ j_4^\alpha = i_4^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)\,, \tag{3}$$

bekommen wir aus den Formeln von Frenet ein einfacheres System der Differential-

[1]) siehe [1].

gleichungen[2])

$$\text{(4)} \qquad \frac{\mathrm{d}j_1^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = j_2^\alpha, \qquad \frac{\mathrm{d}j_2^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = j_1^\alpha + qj_3^\alpha,$$

$$\frac{\mathrm{d}j_3^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = -qj_2^\alpha + rj_4^\alpha, \quad \frac{\mathrm{d}j_4^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = -rj_4^\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4).$$

Die oben erwähnten 10 Bedingungen haben dann die Form

$$\text{(5)} \qquad g_{\alpha\beta}j_1^\alpha j_1^\beta = -1, \quad g_{\alpha\beta}j_k^\alpha j_k^\beta = 1 \quad (k = 2, 3, 4),$$
$$g_{\alpha\beta}j_k^\alpha j_l^\beta = 0 \quad (k, l = 1, 2, 3, 4;\ k > l).$$

Setzen wir

$$\text{(6)} \qquad k_1^\alpha = ij_1^\alpha,\ k_2^\alpha = j_2^\alpha,\ k_3^\alpha = j_3^\alpha,\ k_4^\alpha = j_4^\alpha.$$

Statt des Systems (4) haben wir dann das System

$$\text{(7)} \qquad \frac{\mathrm{d}k_1^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = ik_2^\alpha, \qquad \frac{\mathrm{d}k_2^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = -ik_1^\alpha + qk_3^\alpha,$$

$$\frac{\mathrm{d}k_3^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = -qk_2^\alpha + rk_4^\alpha, \quad \frac{\mathrm{d}k_4^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = -rk_3^\alpha, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4),$$

und die Bedingungen (5) gehen in die Bedingungen

$$\text{(8)} \qquad g_{\alpha\beta}k_i^\alpha k_j^\beta = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3, 4)$$

über.

Es ist klar, dass die Lösung des Systems (4) die Bedingungen (5) identisch (resp. für $\sigma = 0$) gerade in dem Falle erfüllt, wenn die Lösung des Systems (7) die Bedingungen (8) identisch (resp. für $\sigma = 0$) erfüllt. Es genügt also zu beweisen, dass die Lösung des Systems (7), die die Bedingungen (8) für $\sigma = 0$ erfüllt, diese Bedingungen identisch erfüllen muss. Bezeichnen wir

$$K^\alpha = \begin{pmatrix} k_1^\alpha \\ k_2^\alpha \\ k_3^\alpha \\ k_4^\alpha \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_1^1, k_1^2, k_1^3, k_1^4 \\ k_2^1, k_2^2, k_2^3, k_2^4 \\ k_3^1, k_3^2, k_3^2, k_3^4 \\ k_4^1, k_4^2, k_4^3, k_4^4 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0, & i, & 0, 0 \\ -i, & 0, & q, 0 \\ 0, & -q, & 0, r \\ 0, & 0, & -r, 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1, 0, 0, & 0 \\ 0, 1, 0, & 0 \\ 0, 0, 1, & 0 \\ 0, 0, 0, & -c^2 \end{pmatrix};$$

E sei die Einheitsmatrix vom Typ (4,4). Man kann dann das System (7) in der Form

$$\text{(9)} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} K^\alpha = AK^\alpha,$$

[2]) siehe [2].

und die Bedingungen (8) in der Form

$$KG\bar{K} = E \tag{10}$$

schreiben.

Die Lösung der Gleichung (9) hat die Form[3])

$$K^\alpha = BC^\alpha \tag{11}$$

wo

$$B = e^{\int_0^\sigma A d\sigma}\ ^{3'}) \tag{12}$$

und C^α die Matrix der Konstanten C_1^α, C_2^α, C_3^α, C_4^α vom Typ (1,4) ist. Bezeichnen wir

$$C = \begin{pmatrix} C_1^1, & C_1^2, & C_1^3, & C_1^4 \\ C_2^1, & C_2^2, & C_2^3, & C_2^4 \\ C_3^1, & C_3^2, & C_3^3, & C_3^4 \\ C_4^1, & C_4^2, & C_4^3, & C_4^4 \end{pmatrix}.$$

Dann wird

$$K = BC\,. \tag{13}$$

Weil die Matrix A antisymmetrisch ist, hat man $\bar{A} = -A$ und deswegen ist

$$\bar{B}B = e^{\int_0^\sigma \bar{A} d\sigma} \cdot e^{\int_0^\sigma A d\sigma} = e^{-\int_0^\sigma A d\sigma + \int_0^\sigma A d\sigma} = E\,. \tag{14}$$

Die identische Erfüllung der Bedingung (10) fordert dann, dass $BCG\bar{C}\bar{B} = E$ wäre, woraus man wegen (14) (man multipliziert mit $\bar{B}$ von links und mit B von rechts) als equivalente Gleichung

$$CG\bar{C} = E \tag{15}$$

bekommt.

Aus (12) folgt es, dass $B = E$ für $\sigma = 0$ ist, also $K(0) = C$ ist. Die Bedingung (15) bedeutet also dasselbe, wie die Erfüllung der Bedingung (10) für $\sigma = 0$.

Wir haben so diesen Satz bewiesen:[4])

Satz 1. *Wenn man eine Lösung des Systems* (4) *hat, die die Bedinungen* (5) *für* $\sigma = 0$ *erfüllt, dann erfüllt diese Lösung die Bedingungen* (5) *identisch, d.i. den Funktionen* j_k^α *entspricht eine Weltlinie.*

---

[3]) siehe [3].

[3']) Unter diesem Ausdruck verstehen wir das multiplikative Integral von Volterra.

[4]) siehe auch [4].

Bei der Lösung des Systems von 16 Differenzialgleichung (4) bekommt man 16 beliebige Konstanten. Für die Bestimmung dieser Konstanten hat man 10 Bedingungen (5) (genommen für $\sigma = 0$). Es wird jetzt gezeigt, dass man durch passende Wahl des inertialen Systems zu diesen Bedingungen noch 6 weitere Bedingungen zufügen kann, so dass die 16 Konstanten eindeutig betimmts sind. Man wird auf ähnliche Weise fortschreiten, wie es im Falle, dass die Funktionen q, r konstant sind, gemacht worden ist.[5])

Erinnern wir uns noch daran, dass

$$i_1^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \tag{16}$$

$$j_1^4 > 0 \tag{17}$$

ist. Die Bedingung (17) ist sehr wichtig. Bei Voraussetzung ihrer Gültigkeit ist nämlich die Bedingung $g_{\alpha\beta} j_1^\alpha j_1^\beta = -1$ der Bedingung

$$|v|^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 < c^2 \tag{18}$$

equivalent; die Bedingung (18) ist eine Bedingung, die erfüllt sein muss, damit die Lösung wirklich eine Weltlinie gäbe. Wir müssen uns also beim Lösen des Systems (4) auf die Lösungen beschränken, für die die Bedingung (17) erfüllt ist. (Wenn $j_1^4(\sigma) = 0$ für irgendein σ wäre, dann würde für das t, das diesem σ entspricht, in (18) die Gleichheit gelten.)

Es mögen $[\varphi_{k1}, \varphi_{k2}, \varphi_{k3}, \varphi_{k4}]$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ die Lösungen des Systems (4) sein, die die Anfangsbedingungen $\varphi_{ki}(0) = \delta_{ik}$ $(i, k = 1, 2, 3, 4)$ erfüllen. Dann bilden diesen Lösungen ein Fundamentalsystem und es ist

$$j_\alpha^k = \sum_{i=1}^{4} A^{\alpha,i} \varphi_{ik}, \tag{19}$$

wo $A^{\alpha,i}$ $(\alpha, i = 1, 2, 3, 4)$ Konstanten sind. Für $\sigma = 0$ bekommt man

$$j_k^\alpha(0) = \sum_{i=1}^{4} A^{\alpha,i} \delta_{ik} = A^{\alpha,k}.$$

Wir werden jetzt ein inertiales System wählen, das sich unter Bezug auf das bisherige mit der Geschwindigkeit $v = [j_1^1(0)/j_1^4(0), j_1^2(0)/j_1^4(0), j_1^3(0)/j_1^4(0)]$ bewegt; (dass es möglich ist, d.i. dass $v^2 < c^2$ ist, sichert uns die Bedingung (17)). In diesem neuen inertialen System wird die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null, also $j_1^1(0) = j_1^2(0) = j_1^3(0) = 0$ sein, d.i.

$$A^{1,1} = A^{2,1} = A^{3,1} = 0, \tag{20}$$

[5]) siehe [2].

und die erste der Gleichungen (5) gibt uns $-c^2(A^{4,1})^2 = -1$, woraus wegen der Bedingung (17)

(21) $$A^{4,1} = \frac{1}{c}$$

folgt. Aus den Gleichungen $g_{\alpha\beta} j_1^\alpha j_2^\beta = g_{\alpha\beta} j_1^\alpha j_3^\beta = g_{\alpha\beta} j_1^\alpha j_4^\beta = 0$ bekommt man $-c^2 A^{4,1} A^{4,2} = -c^2 A^{4,1} A^{4,3} = -c^2 A^{4,1} A^{4,4} = 0$, also wegen (21)

(22) $$A^{4,2} = A^{4,3} = A^{4,4} = 0\,.$$

Drehen wir noch die Raumachsen des gewählten inertialen Systems so um, dass die dritte Achse die Richtung des Vektoren $[j_2^1(0), j_2^2(0), j_2^3(0)]$ hat und die zweite in der Ebene, die durch diesen Vektor und den Vektor $[j_3^1(0), j_3^2(0), j_3^3(0)]$ bestimmt ist, liegt. Dieses können wir leicht durch orthogonale Transformation erreichen. In so gewähltem inertialem Systeme wird dann $j_2^1(0) = j_2^2(0) = j_3^1(0) = 0$, d.i.

(23) $$A^{1,2} = A^{2,2} = A^{1,3} = 0$$

sein.

Aus der Gleichung $g_{\alpha\beta} j_2^\alpha j_2^\beta = 1$ bekommt man so (siehe (22), (23)) $(A^{3,2})^2 = 1$ und daraus (durch eventuelle Änderung der Orientierung der dritten Raumachse)

(24) $$A^{3,2} = 1\,.$$

Die Gleichungen $g_{\alpha\beta} j_2^\alpha j_3^\beta = g_{\alpha\beta} j_2^\alpha j_4^\beta = 0$ geben dann $A^{3,2} A^{3,3} = A^{3,2} A^{3,4} = 0$, es ist also wegen (24)

(25) $$A^{3,3} = A^{3,4} = 0\,.$$

Aus der Gleichung $g_{\alpha\beta} j_3^\alpha j_3^\beta = 1$ folgt (siehe (22), (23), (25)) $(A^{2,3})^2 = 1$ und von hier (durch eventuelle Änderung der Orientierung der zweiten Raumachse)

(26) $$A^{2,3} = 1\,.$$

Aus der Gleichung $g_{\alpha\beta} j_3^\alpha j_4^\beta = 0$ hat man dann $A^{2,3} A^{2,4} = 0$, es ist also wegen (26)

(27) $$A^{2,4} = 0\,.$$

Aus der Gleichung $g_{\alpha\beta} j_4^\alpha j_4^\beta = 1$ bekommt man schliesslich (siehe (22), (25), (27)) $(A^{1,4})^2 = 1$ und von da (durch eventuelle Änderung der Orientierung der ersten Raumachse)

(28) $$A^{1,4} = 1\,.$$

Wir haben so ein inertiales System eindeutig (bis auf die Wahl des Zeitraumursprunges) gewählt, so dass (siehe (19)–(28))

(29) $$j_k^1 = \varphi_{4k}\,, \quad j_k^2 = \varphi_{3k}\,, \quad j_k^3 = \varphi_{2k}\,, \quad j_k^4 = \frac{1}{c}\,\varphi_{1k}\,.$$

Wir haben so diesen Satz bewiesen:

Satz 2. *Die Funktionen q, r sollen stetig und nichtnegativ im Intervalle $I = \langle 0, b)$ $(0 < b \leqq +\infty)$ sein. Es mögen $[j_1^\alpha, j_2^\alpha, j_3^\alpha, j_4^\alpha]$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ Lösungen des Systems (4) im Intervall I sein, die die Anfangsbedingungen*

$$
\begin{aligned}
(30)\qquad & j_1^1(0) = 0\,, \quad j_2^1(0) = 0\,, \quad j_3^1(0) = 0\,, \quad j_4^1(0) = 1\,,\\
& j_1^2(0) = 0\,, \quad j_2^2(0) = 0\,, \quad j_3^2(0) = 1\,, \quad j_4^2(0) = 0\,,\\
& j_1^3(0) = 0\,, \quad j_2^3(0) = 1\,, \quad j_3^3(0) = 0\,, \quad j_4^3(0) = 0\,,\\
& j_1^4(0) = \frac{1}{c}\,, \quad j_2^4(0) = 0\,, \quad j_3^4(0) = 0\,, \quad j_4^4(0) = 0
\end{aligned}
$$

erfüllen. Dann gilt es: Es gibt ein inerziales System (und bis auf die Wahl des Zeitraumursprunges nur ein einziges) so, dass im Intervalle I die Funktionen $j_k^\alpha(\alpha, k = 1, 2, 3, 4)$ gerade den Weltlinien entsprechen, die den Funktionen q, r entsprechen.

Wenn man jetzt mittels der Gleichungen (1)–(3) vom System (4) zum equivalenten System der Differenzialgleichungen – den Frenetschen Formeln –

$$
\begin{aligned}
(31)\qquad & \frac{\mathrm{d}i_1^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = \frac{P}{\mu}\, i_2^\alpha\,, \qquad \frac{\mathrm{d}i_2^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = \frac{P}{\mu c^2}\, i_1^\alpha + \frac{Q}{\mu c}\, i_3^\alpha\,,\\
& \frac{\mathrm{d}i_3^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{Q}{\mu c}\, i_2^\alpha + \frac{R}{\mu c}\, i_4^\alpha\,, \qquad \frac{\mathrm{d}i_4^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{R}{\mu c}\, i_3^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)
\end{aligned}
$$

übergeht, den Zeitraumursprung so wählt, dass $x^\alpha(0) = 0$ für $\tau = 0$ ist, und noch aus ästhetischen Grunden die Rolle der ersten und der dritten Raumachse umwandelt, bekommt der Satz 2 die Form:

Satz 3. *Die Funktionen P, Q, R sollen stetig und nichtnegativ im Intervalle $J = \langle 0, a)$ $(0 < a \leqq +\infty)$, P positiv im Intervalle J sein. Es mag $[i_1^\alpha, i_2^\alpha, i_3^\alpha, i_4^\alpha]$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ Lösungen des Systems (31) im Intervall J sein, die die Anfangsbedingungen*

$$
\begin{aligned}
(32)\qquad & i_1^1(0) = 0\,, \quad i_2^1(0) = 1\,, \quad i_3^1(0) = 0\,, \quad i_4^1(0) = 0\,,\\
& i_1^2(0) = 0\,, \quad i_2^2(0) = 0\,, \quad i_3^2(0) = 1\,, \quad i_4^2(0) = 0\,,\\
& i_1^3(0) = 0\,, \quad i_2^3(0) = 0\,, \quad i_3^3(0) = 0\,, \quad i_4^3(0) = 1\,,\\
& i_1^4(0) = 1\,, \quad i_2^4(0) = 0\,, \quad i_3^4(0) = 0\,, \quad i_4^4(0) = 0
\end{aligned}
$$

erfüllen. Setzen wir

$$
(33)\qquad x^\alpha(\tau) = \int_0^\tau i_1^\alpha(\varrho)\,\mathrm{d}\varrho\,, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)\,.
$$

Dann gilt es: Es existiert ein einziges inertiales System so, dass die Weltlinie, die den Funktionen P, Q, R entspricht, im Intervalle J durch die Gleichungen $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ beschrieben ist.

Erinnern wir noch, wie wir den Satz 2 bewiesen haben: Bei der Voraussetzung der Gültigkeit der Gleichung (5) für $\sigma = 0$ hat man von den allgemeinen Anfangsbedingungen $j^\alpha_k(0) = A^{\alpha,k}$ durch spezielle Wahl des inertialen Systemes, d.i. durch Lorentzsche Transformationen, zu speziellen Anfangsbedingungen (30) geraten. Wenn man jetzt inverse Lorentztransformationen ausführt, bekommt man gleich die Sätze:

Satz 4. *Die Funktionen q, r sollen stetig und nichtnegativ im Intervalle $I = \langle 0, b)$ $(0 < b \leqq +\infty)$ sein. $c^\alpha_k(\alpha, k = 1, 2, 3, 4)$ sollen gegebene Zahlen, die die Bedingungen*

$$(34)\qquad \begin{aligned} &g_{\alpha\beta}c^\alpha_1 c^\beta_1 = -1\,, \quad g_{\alpha\beta}c^\alpha_k c^\beta_k = 1 \quad (k = 2, 3, 4)\,, \\ &g_{\alpha\beta}c^\alpha_k c^\beta_l = 0 \quad (k, l = 1, 2, 3, 4;\ k > l)\,, \quad c^4_1 > 0 \end{aligned}$$

erfüllen, sein. Es mag $[j^\alpha_1, j^\alpha_2, j^\alpha_3, j^\alpha_4]$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ Lösungen des Systems (4) im Intervall I sein, die die Anfangsbedingungen $j^\alpha_k(0) = c^\alpha_k$ erfüllen. Es gilt dann: Es gibt ein inertiales System (und bis auf die Wahl des Zeitraumursprunges nur ein einziges) so, dass im Intervalle I die Funktionen $j^\alpha_k(\alpha, k = 1, 2, 3, 4)$ gerade den Weltlinien entsprechen, die den Funktionen q, r entsprechen.

Satz 5. *Die Funktionen P, Q, R sollen stetig und nichtnegativ, die Funktion P positiv im Intervalle $J = \langle 0, a)$ $(0 < a \leqq +\infty)$ sein. $c^\alpha_k(\alpha, k = 1, 2, 3, 4)$ sollen gegebene Zahlen, die die Bedingungen*

$$(35)\qquad \begin{aligned} &g_{\alpha\beta}c^\alpha_1 c^\beta_1 = -c^2\,, \quad g_{\alpha\beta}c^\alpha_k c^\beta_k = 1 \quad (k = 2, 3, 4)\,, \\ &g_{\alpha\beta}c^\alpha_k c^\beta_l = 0 \quad (k, l = 1, 2, 3, 4;\ k > l)\,, \quad c^4_1 > 0 \end{aligned}$$

erfüllen, sein. Es mag $[i^\alpha_1, i^\alpha_2, i^\alpha_3, i^\alpha_4]$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ Lösungen des Systems (31) im Intervalle J sein, die die Anfangsbedingungen $i^\alpha_k(0) = c^\alpha_k$ erfüllen. Die Funktionen $x^\alpha(\tau)$ werden durch die Gleichung (33) definiert. Es gilt dann: Es gibt ein einziges inertiales System so, dass die Weltlinie, die den Funktionen P, Q, R entspricht, im Intervalle J durch die Gleichungen $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$ beschrieben ist.

Bemerkung 1. Aus dem Beweise des Satzes 2 folgt: Es sei eine Weltlinie durch die Funktionen P, Q, R gegeben; wir wollen ihre Beschreibung mittels der Gleichungen $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$ finden. Man kann beliebig die Zahlen $c^1_1, c^2_1, c^3_1, c^2_2, c^3_2, c^3_3$ wählen (d.i. man kann die Werte der Funktionen $i^1_1, i^2_1, i^3_1, i^2_2, i^3_2, i^3_3$ für $\tau = 0$ vorschreiben). (Die einzige Beschränkung für diese Wahl ist, dass es möglich sein muss die übrigen c^α_k reel finden zu können, damit die Bedingungen (35) erfüllt seien.) Die übrigen Konstanten c^α_k bestimmt man dann aus den Bedingungen (35), wobei man beim Wurzelziehen nach Beliebigkeit das Zeichen + oder − wählen darf (nur c^4_1 muss man positiv nehmen). Die erwähnten Gleichungen der Weltlinie gibt dann der Satz 5. Die Wahl der Zahlen $c^1_1, c^2_1, c^3_1, c^2_2, c^3_2, c^3_3$ und die Wahl des Zeichen beim Wurzelziehen ist dann nichts anderes als die Wahl des speziellen inertialen Systems, in dem die Weltlinie durch die im Satze 5 gegebenen Gleichungen bestimmt ist.

Sehen wir noch speziell den Fall $R = 0$, d.i. $r = 0$ an (siehe (2)). Dann ist das System (4) dem Systeme der Gleichungen

$$\text{(36)} \qquad \frac{\mathrm{d}j_1^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = j_2^\alpha\,, \quad \frac{\mathrm{d}j_2^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = j_1^\alpha + qj_3^\alpha\,, \quad \frac{\mathrm{d}j_3^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = -qj_2^\alpha$$

und der Bedingung, dass j_4^α $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ konstant ist, equivalent. Die 4 Konstanten j_4^α sind durch 4 Bedingungen (5), in denen sie auftreten, bestimmt; im Falle $R = 0$ interessieren sie uns nicht. In diesem Falle interessiert uns nur das System (36) und die Bedingungen

$$\text{(37)} \qquad \begin{aligned} &g_{\alpha\beta}j_1^\alpha j_1^\beta = -1\,, \quad g_{\alpha\beta}j_k^\alpha j_k^\beta = 1 \quad (k = 2, 3)\,, \\ &g_{\alpha\beta}j_k^\alpha j_l^\beta = 0 \quad (k, l = 1, 2, 3;\ k > l)\,, \quad j_1^4 > 0 \end{aligned}$$

resp. das System

$$\text{(38)} \qquad \frac{\mathrm{d}i_1^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = \frac{P}{\mu}\,i_2^\alpha\,, \quad \frac{\mathrm{d}i_2^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = \frac{P}{\mu c^2}\,i_1^\alpha + \frac{Q}{\mu c}\,i_3^\alpha\,, \quad \frac{\mathrm{d}i_3^\alpha}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{Q}{\mu c}\,i_2^\alpha$$

und die ihm entsprechenden 6 Bedingungen. Die Funktionen j_1^1, j_2^1, j_3^1 aus dem Satze 2 sind dann identisch gleich Null[6]) und die Sätze 2–5 haben die Form:

Satz 6. *Es sei $r = 0$. Die Funktion q soll stetig und nichtnegativ im Intervalle $I = \langle 0, b)$ $(0 < b \leqq +\infty)$ sein. c_k^α $(\alpha = 1, 2, 3, 4;\ k = 1, 2, 3)$ sollen gegebene Zahlen sein, die die Bedingungen*

$$\text{(39)} \qquad \begin{aligned} &g_{\alpha\beta}c_1^\alpha c_1^\beta = -1\,, \quad g_{\alpha\beta}c_k^\alpha c_k^\beta = 1 \quad (k = 2, 3)\,, \\ &g_{\alpha\beta}c_k^\alpha c_l^\beta = 0 \quad (k, l = 1, 2, 3;\ k > l)\,, \quad c_1^4 > 0 \end{aligned}$$

erfüllen. Es mag $[j_1^\alpha, j_2^\alpha, j_3^\alpha]$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ Lösungen des Systems (36) im Intervalle I sein, die die Anfangsbedingungen $j_k^\alpha(0) = c_k^\alpha$ erfüllen. Es gilt dann: Es gibt ein inertiales System und bis auf die Wahl des Zeitraumursprunges ein einziges) so, dass im Intervalle I die Funktionen j_k^α $(\alpha = 1, 2, 3, 4;\ k = 1, 2, 3)$ gerade den Weltlinien entsprechen, die der Funktion q entsprechen.

Bemerkung 2. Speziell behält die Behauptung des Satzes 6 ihre Gültigkeit im speziellen Falle, das $j_1^1 = j_2^1 = j_3^1 = 0$ sind und $[j_1^\alpha, j_2^\alpha, j_3^\alpha]$ $(\alpha = 2, 3, 4)$ die Lösungen des Systems (36) im Intervalle I bezeichnet, die die Anfangsbedingungen

$$\text{(40)} \qquad \begin{aligned} &j_1^2(0) = 0\,, \quad j_2^2(0) = 0\,, \quad j_3^2(0) = 1\,, \\ &j_1^3(0) = 0\,, \quad j_2^3(0) = 1\,, \quad j_3^3(0) = 0\,, \\ &j_1^4(0) = \frac{1}{c}\,, \quad j_2^4(0) = 0\,, \quad j_3^4(0) = 0 \end{aligned}$$

erfüllen.

---

[6]) siehe [1].

Satz 7. *Es sei $R = 0$. Die Funktionen P, Q sollen stetig, P positiv, Q nichtnegativ im Intervalle $J = \langle 0, a)$ $(0 < a \leqq +\infty)$ sein. c_k^α $(\alpha = 1, 2, 3, 4;\ k = 1, 2, 3)$ sollen gegebene Zahlen sein, die die Bedingungen*

$$(41)\qquad \begin{aligned} g_{\alpha\beta}c_1^\alpha c_1^\beta &= -c^2\,, \quad g_{\alpha\beta}c_k^\alpha c_k^\beta = 1 \quad (k = 2, 3)\,, \\ g_{\alpha\beta}c_k^\alpha c_l^\beta &= 0 \quad (k, l = 1, 2, 3;\ k > l)\,, \quad c_1^4 > 0 \end{aligned}$$

erfüllen. Es mag $[i_1^\alpha, i_2^\alpha, i_3^\alpha]$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ Lösungen des Systems (38) im Intervalle J sein, die die Anfangsbedingungen $i_k^\alpha(0) = c_k^\alpha$ erfüllen. Die Funktionen $x^\alpha(\tau)$ werden durch Gleichung (33) definiert. Es gilt dann: Es gibt ein einziges inertiales System so, dass die Weltlinie, die den Funktionen P, Q entspricht, im Intervalle J mittels der Gleichungen $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$ beschrieben ist.

Bemerkung 3. Speziell: Die Behauptung des Satzes 7 behält ihre Gültigkeit, wenn man $i_1^3 = i_2^3 = i_3^3 = 0$ setzt und für $[i_1^\alpha, i_2^\alpha, i_3^\alpha]$ $(\alpha = 1, 2, 4)$ die Lösungen des Systems (38) im Intervalle J nimmt, die die Anfangsbedingungen

$$(42)\qquad \begin{aligned} &i_1^1(0) = 0\,, \quad i_2^1(0) = 1\,, \quad i_3^1(0) = 0\,, \\ &i_1^2(0) = 0\,, \quad i_2^2(0) = 0\,, \quad i_3^2(0) = 1\,, \\ &i_1^4(0) = 1\,, \quad i_2^4(0) = 0\,, \quad i_3^4(0) = 0 \end{aligned}$$

erfüllen. Die Funktion $x^3(\tau)$ ist dann identisch gleich Null.

Bemerkung 4. Es gibt wieder eine ähnliche Bemerkung wie die Bemerkung 1.

Mit dem Fall $q = 0$ werden wir uns nicht beschäftigen, er war schon völlig gelöst.

Wir werden jetzt voraussetzen, dass im Intervalle I die Funktionen q, r positiv sind und dass q stetige Ableitung zweiter und r erster Ordnung hat. Dann, wie wir schon wissen,[7] kann man das System (4) durch eine equivalente Differentialgleichung vierter Ordnung

$$(43)\qquad \frac{d^4 j_1^\alpha}{d\sigma^4} - \left[2\frac{q'}{q} + \frac{r'}{r}\right]\frac{d^3 j_1^\alpha}{d\sigma^3} + \left[q^2 + r^2 - 1 - \frac{q''}{q} + \frac{q'}{q}\left(2\frac{q'}{q} + \frac{r'}{r}\right)\right]\frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} +$$
$$+ \left[q^2\left(\frac{q'}{q} - \frac{r'}{r}\right) + 2\frac{q'}{q} + \frac{r'}{r}\right]\frac{d j_1^\alpha}{d\sigma} - \left[r^2 - \frac{q''}{q} + 2\frac{q'}{q}\left(2\frac{q'}{q} + \frac{r'}{r}\right)\right] j_1^\alpha = 0$$

ersetzen.

Im Falle $r = 0$, kann man analogisch bei der Voraussetzung, dass die Funktion q im Intervalle I positiv und stetig differenzierbar ist, das System (36) durch eine equivalente Differenzialgleichung dritter Ordnung

$$(44)\qquad \frac{d^3 j_1^\alpha}{d\sigma^3} - \frac{q'}{q}\frac{d^2 j_1^\alpha}{d\sigma^2} + (q^2 - 1)\frac{d j_1^\alpha}{d\sigma} + \frac{q'}{q} j_1^\alpha = 0$$

ersetzen.

---

[7]) siehe [2].

Aus den Gleichungen (4) bekommt man weiter

$$\frac{\mathrm{d}j_1^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = j_2^\alpha\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 j_1^\alpha}{\mathrm{d}\sigma^2} = \frac{\mathrm{d}j_2^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = j_1^\alpha + q j_3^\alpha\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^3 j_1^\alpha}{\mathrm{d}\sigma^3} = \frac{\mathrm{d}j_1^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} + q' j_3^\alpha + q\,\frac{\mathrm{d}j_3^\alpha}{\mathrm{d}\sigma} = (1 - q^2)\, j_2^\alpha + q' j_3^\alpha + q r j_4^\alpha\,.$$

Aus diesen Bedingungen kann man leicht die Anfangsbedingungen für die Gleichung (43) (resp. (44)), die den Anfangsbedingungen für das System (4) (resp. (36)) entsprechen, bekommen.

Aus dem Satze 2 und der Bemerkung 2 bekommt man so gleich die Sätze:

Satz 8. *Die Funktionen q, r sollen stetig und positiv im Intervalle $I = \langle 0, b)$ $(0 < b \leqq +\infty)$ sein und im Intervalle I soll q zweimal und r einmal stetig differenzierbar sein. Es mag j_1^α $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ Lösungen der Differenzialgleichung* (43) *bedeuten, die die Anfangsbedingungen*

$$(45) \qquad \begin{aligned} &j_1^1(0) = 0\,, && \frac{\mathrm{d}j_1^1(0)}{\mathrm{d}\sigma} = 1\,, && \frac{\mathrm{d}^2 j_1^1(0)}{\mathrm{d}\sigma^2} = 0\,, && \frac{\mathrm{d}^3 j_1^1(0)}{\mathrm{d}\sigma^3} = 1 - q^2(0)\,,\\ &j_1^2(0) = 0\,, && \frac{\mathrm{d}j_1^2(0)}{\mathrm{d}\sigma} = 0\,, && \frac{\mathrm{d}^2 j_1^2(0)}{\mathrm{d}\sigma^2} = q(0)\,, && \frac{\mathrm{d}^3 j_1^2(0)}{\mathrm{d}\sigma^3} = q'(0)\,,\\ &j_1^3(0) = 0\,, && \frac{\mathrm{d}j_1^3(0)}{\mathrm{d}\sigma} = 0\,, && \frac{\mathrm{d}^2 j_1^3(0)}{\mathrm{d}\sigma^2} = 0\,, && \frac{\mathrm{d}^3 j_1^3(0)}{\mathrm{d}\sigma^3} = q(0)\, r(0)\,,\\ &j_1^4(0) = \frac{1}{c}\,, && \frac{\mathrm{d}j_1^4(0)}{\mathrm{d}\sigma} = 0\,, && \frac{\mathrm{d}^2 j_1^4(0)}{\mathrm{d}\sigma^2} = \frac{1}{c}\,, && \frac{\mathrm{d}^3 j_1^4(0)}{\mathrm{d}\sigma^3} = 0 \end{aligned}$$

erfüllen. Es gilt dann: Es gibt ein inertiales System (und bis auf die Wahl des Zeitraumursprunges ein einziges) so, dass im Intervalle I die Funktionen j_1^α $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ gerade den Weltlinien angehören, die den Funktionen q, r entsprechen.

Satz 9. *Es sei $r = 0$. Die Funktion q soll positiv und stetig differenzierbar im Intervalle $I = \langle 0, b)$ $(0 < b \leqq +\infty)$ sein. Es mag j_1^α $(\alpha = 1, 2, 4)$ Lösungen der Differenzialgleichung* (44) *bedeuten, die die Anfangsbedingungen*

$$(46) \qquad \begin{aligned} &j_1^1(0) = 0\,, && \frac{\mathrm{d}j_1^1(0)}{\mathrm{d}\sigma} = 1\,, && \frac{\mathrm{d}^2 j_1^1(0)}{\mathrm{d}\sigma^2} = 0\,,\\ &j_1^2(0) = 0\,, && \frac{\mathrm{d}j_1^2(0)}{\mathrm{d}\sigma} = 0\,, && \frac{\mathrm{d}^2 j_1^2(0)}{\mathrm{d}\sigma^2} = q(0)\,,\\ &j_1^4(0) = \frac{1}{c}\,, && \frac{\mathrm{d}j_1^4(0)}{\mathrm{d}\sigma} = 0\,, && \frac{\mathrm{d}^2 j_1^4(0)}{\mathrm{d}\sigma^2} = \frac{1}{c} \end{aligned}$$

erfüllen. Setzen wir $j_1^3 = 0$. *Es gilt dann: Es gibt ein inertiales System (und bis auf die Wahl des Zeitraumursprunges ein einziges) so, dass im Intervalle I die Funktionen* j_1^α $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ *den Weltlinien angehören, die der Funktion q entsprechen.*

Mittels des Satzes 3 und der Bemerkung 3 kann man leicht noch diese Sätze beweisen:

Satz 10. *Die Funktionen P, Q, R sollen stetig und positiv im Intervalle* $J = \langle 0, a)$ $(0 < a \leqq +\infty)$ *sein. Die diesen Funktionen entsprechende Weltlinie soll in irgendeinem inertialen System die Gleichung* $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$ *haben. Dann sind die Funktionen* $x^1, x^2, x^3, x^4, 1$ *linear unabhängig im Intervalle J.*

Satz 11. *Es sei* $R = 0$. *Die Funktionen P, Q sollen stetig und positiv im Intervalle* $J = \langle 0, a)$ $(0 < a \leqq +\infty)$ *sein. Die diesen Funktionen entsprechende Weltlinie soll in irgendeinem inertialen System die Gleichung* $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$ *haben. Dann sind die Funktionen* $x^1, x^2, x^3, x^4, 1$ *linear abhängig im Intervalle J; lassen wir aber eine passend gewählte Funktion aus den ersten drei Funktionen aus, bekommen wir vier Funktionen, die schon im Intervalle J linear unabhängig sind.*

Der Beweis des Satzes 10: Alle Behauptungen werden im Intervalle J gemeint. Sind die Funktionen $x^1, x^2, x^3, x^4, 1$ linear abhängig, ist

$$C_1x^1 + C_2x^2 + C_3x^3 + C_4x^4 + C_5 = 0\,,$$

wo mindestens eine der Konstanten C_1, C_2, C_3, C_4 nicht gleich Null ist. Durch Differenzieren bekommt man die equivalente Bedingung

$$C_1 i_1^1 + C_2 i_1^2 + C_3 i_1^3 + C_4 i_1^4 = 0\,, \tag{47}$$

die die lineare Abhängigkeit der Funktionen $i_1^1, i_1^2, i_1^3, i_1^4$ bedeutet. Durch weiteres Differenzieren dieser Gleichung bekommt man wegen der Gleichungen (31) und der Bedingungen $Q > 0$, $R > 0$:

$$\begin{aligned} C_1 i_2^1 + C_2 i_2^2 + C_3 i_2^3 + C_4 i_2^4 &= 0\,,\\ C_1 i_3^1 + C_2 i_3^2 + C_3 i_3^3 + C_4 i_3^4 &= 0\,,\\ C_1 i_4^1 + C_2 i_4^2 + C_3 i_4^3 + C_4 i_4^4 &= 0\,. \end{aligned} \tag{48}$$

Die Gleichungen (47), (48) bedeuten, dass die Systeme $[i_1^\alpha, i_2^\alpha, i_3^\alpha, i_4^\alpha]$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$ linear abhängig sind. Wendet man jetzt eine passende Lorentzsche Transformation (d.i. eine Transformation mit der Determinante nicht gleich Null, die die lineare Abhängigkeit oder Unabhängigkeit nicht ändert) an, so dass man zum inertialen System, dessen Existenz der Satz 3 liefert, übergeht. Dann erfüllen die Funktionen i_k^α die Bedingungen (32), bilden also ein Fundamentalsystem und sind deswegen linear unabhängig, was einen Widerspruch gibt.

Der Beweis des Sytzes 11: Die lineare Abhängigkeit der Funktionen $x^1, x^2, x^3, x^4, 1$ würde man analogisch beweisen, wie es beim Beweise des Satzes 10 war. Man würde aus der Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit der Funktionen x^1, x^2, x^3, x^4, 1 ausgehen und zu einem Widerspruch mit der Bemerkung 3 gelangen. Ganz analogisch würde man auch den zweitel Teil des Satzes beweisen. Man würde aus der Voraussetzung, dass alle drei Gruppen von vier Funktionen: $x^1, x^2, x^4, 1$; $x^1, x^3, x^4, 1$; $x^2, x^3, x^4, 1$ linear abhängig sind, ausgehen und wieder zu einem Widerspruch mit der Bemerkung 3 gelangen.

Literatura

[1] *F. Nožička:* Les formules de Frenet pour la géodésique dans la mécanique de Minkowski. Czechoslovak Math. Journal *13* (*88*), (1963), 290—321.

[2] *V. Petrův:* Die Lösung der Formeln von Frenet im Falle konstanter Krümmungen. Aplikace matematiky sv. *9* (1964) č. 4.

[3] *F. R. Gantmacher:* Die Theorie der Matrixen. Moscow, 1953.

[4] *P. K. Raszewski:* Geometria Riemanna i analiza tensorowa. Warszawa, 1958.

Souhrn

K ŘEŠENÍ FRENETOVÝCH FORMULÍ PRO SVĚTOČÁRU

VLADIMÍR PETRŮV, Praha

V práci se vyšetřuje systém diferenciálních rovnic zvaných Frenetovy formule pro světočáru a ukazuje se, že světočára je již jednoznačně určena funkcemi P, Q, R, které v tomto systému vystupují. Volba integračních konstant není pak nic jiného než volba speciálního inerciálního systému, v němž udáváme popis světočáry rovnicemi $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$. Speciálně je dokázáno, že světočáru lze při vhodné volbě inerciálního systému jednoznačně vyjádřit rovnicemi

$$x^\alpha = \int_0^\tau i_1^\alpha(\varrho)\, d\varrho\,,$$

kde i_1^α je první funkce toho řešení systému (31), které splňuje počáteční podmínky (32) (v případě $R = 0$ lze vzíti místo systému (31) systém (38) a místo podmínek (32) podmínky (42)). Ekvivalentní vyjádření je toto: Položíme-li (3), pak j_1^α je řešení rovnice (43) (pro $r \neq 0$, pro $r = 0$ rovnice (44)), které splňuje počáteční podmínky (45) (pro $r \neq 0$, pro $r = 0$ podmínky (46)).

Резюме

К РЕШЕНИЮ ФОРМУЛ ФРЕНЕ ДЛЯ МИРОВОЙ ЛИНИИ

ВЛАДИМИР ПЕТРУВ (Vladimír Petrův), Прага

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений, несущих название формулы Френе, для мировой линии, и показывается, что мировая линия однозначно определена функциями P, Q, R, выступающими в этой системе. Выбор постоянных интегрирования представляет собой тогда не что иное, как выбор специальной инерциальной системы, в которой мировая линия выражена уравнениями $x^\alpha = x^\alpha(\tau)$ $(\alpha = 1, 2, 3, 4)$. Специально доказано, что при надлежащем выборе инерциальной системы можно однозначно выразить мировую линию уравнениями

$$x^\alpha = \int_0^\tau i_1^\alpha(\varrho)\, \mathrm{d}\varrho \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

где i_1^α – первая функция того решения системы (31), которое удовлетворяет начальным условием (32); (в случае $R = 0$ можно взять вместо системы (31) систему (38) и вместо условий (32) условия (42)). Другими словами: если положить (3), то j_1^α является решением уравнения (43) (для $r \neq 0$, в случае $r = 0$ уравнения (44)), удовлетворяющего начальным условиям (45) (для $r \neq 0$, в случае $r = 0$ условие (46)).