# KONJUGIERTE PERSPEKTIVEN

LADISLAV DRS, Praha

(Eingegangen am 11. September 1963)

## A. DIE GRUNDBEGRIFFE

Es seien die Projetionen $^1\mathbf{P}$, $^2\mathbf{P}$, $\mathbf{P}$ durch die Zentren $^1C$, $^2C$, (die Punkte des euklidischen Raumes $R_3$), $G$ (der Punkt des erweiterten euklidischen Raumes $\bar{R}_3$) und durch die Projektionsebenen $^1\pi$, $^2\pi$, $\gamma$ aus $R_3$ gegeben. Wir erwägen die Projektionen $^1\mathbf{P}(P) = P_I$, $^2\mathbf{P}(P) = P_{II}$, $\mathbf{P}(P) = P^\gamma$ des Punktes $P \in \bar{R}_3$, $P \notin {}^1C, {}^2C, G$, die Projektionen $^1\mathbf{P}(P^\gamma) = P_I^\gamma$, $^2\mathbf{P}(P^\gamma) = P_{II}^\gamma$ und die Projektionen $^1\mathbf{P}(G) = G_I$, $^2\mathbf{P}(G) = G_{II}$. Die Punkte $P_I, P_I^\gamma, G_I$ bzw. $P_{II}, P_{II}^\gamma, G_{II}$ liegen an der Gerade $^1\pi \cap {}^1CGP$ bzw. $^2\pi \cap {}^2CGP$. Das Paar $P_I, P_I^\gamma$ bzw. $P_{II}, P_{II}^\gamma$ ist die erste bzw. die zweite Perspektive des Punktes $P$. Ähnlich ist $F_I(P_I, \ldots)$, $F_I^\gamma(P_I^\gamma, \ldots)$ die erste, $F_{II}(P_{II}, \ldots)$, $F_{II}^\gamma(P_{II}^\gamma, \ldots)$ die zweite Perspektive der Figur $F(P, \ldots)$ die aus den Punkten $P, \ldots$ zusammengesetzt ist. Wenn wir annehmen, dass $^1\pi \cap {}^2\pi = a$, $a \in R_3$, $a \cap {}^1C^2C = \emptyset$ ist, so können wir die Ebenen $^1\pi$, $^2\pi$ mit den Perspektiven um die Achse $a$ in die Rissebene $\varrho$ drehen, $a \in \varrho$, und wir erhalten zwei konjugierte Perspektiven $F_1, F_1^\gamma$; $F_2, F_2^\gamma$ der Figur $F$. Wir bezeichnen weiter $A = a \cap \gamma$, $c = {}^1C^2C$, $K_I = c \cap {}^1\pi$, $K_{II} = c \cap {}^2\pi$. *Die Kernpunkte $K_I, K_{II}$ liegen nicht an der Achse $a$.* Die zweimal projizierende Ebene $Pc$ des Punktes $P \in \bar{R}_3$, $P \notin c$ bezeichnen wir $k^P$. Dann ist $Pc \cap {}^1\pi = k_I^P$, $Pc \cap {}^2\pi = k_{II}^P$, $(k_I^P \cap k_{II}^P) \in a$, in Worten: *die Kerngeraden $k_I^P, k_{II}^P$ des Punktes $P$ treffen sich an der Achse $a$.*

## B. KONJUGIERTE PERSPEKTIVEN DER EBENE $\gamma$

Aus der Definition der konjugierten Perspektiven ergibt sich, dass die Felder $\gamma_1, \gamma_2$ in $\varrho$ projektiv zugeordnet sind. Die Ebene $\gamma$ sei durch den Punkt $A \in a$ und durch die Gerade $h$, $A \notin h$, $h \cap c = \emptyset$ bestimmt. In den Projektiven Feldern $\gamma_1, \gamma_2$ sind:

$A$ – der selbstentsprechende Punkt.

$K_1, K_2$ – die Zentren von zwei perspektivischen Strahlenbüscheln der Kerngeraden $k_1^P, k_2^P, \ldots$ von den Punkten $P \in \gamma, \ldots$. Die Achse dieser Büschel ist die Gerade $a$.

$h_1, h_2$ – das Paar von projektiven Geraden.

Durch diese Elemente ist die Projektivität bestimmt, aus $P_1 \in \gamma_1$ kann man $P_2$ konstruieren, (Abb. 1). Wenn wir $P_1K_1 = k_1^P$, $a \cap k_1^P = \alpha$, $AP_1 = p_1$, $p_1 \cap h_1 = H_1$, $K_1H_1 = k_1^H$, $k_1^H \cap a = \varkappa$ bezeichnen, so ist $\alpha K_2 = k_2^P$, $\varkappa K_2 = k_2^H$, $H_2 = h_2 \cap k_2^H$, $p_2 = AH_2$ und $P_2 = p_2 \cap k_2^P$ (die Konstruktion **K**1).

Können umgekehrt zwei projektive Felder für die konjugierten Perspektiven gehalten werden? Seien also in der Ebene $\varrho \subset R_3$ die Punkte $K_1' \neq A' \neq K_2'$ und die Geraden $h_1' \neq a' \neq h_2'$ mit diesen Eigenschaften gegeben: $A' \in a'$; $a' \subset R_3$; $A' \notin$ $\notin K_1'K_2'$; $K_1', K_2' \notin a'$; $K_1' \notin h_1'$; $K_2' \notin h_2'$; $A' \notin h_1', h_2'$. Diese Elemente bestimmen eine einzige Projektivität der Felder $\gamma_1, \gamma_2$, wenn wir den Punkt $A'$ als den selbstentsprechenden Punkt, die Punkte $K_1', K_2'$ als Zentren von perspektivischen Büscheln mit der Achse $a'$ und das Paar $h_1', h_2'$ als projektives Paar wählen. Wir werden diese Elemente mit solchen Eigenschaften kurz als **P** bezeichnen.

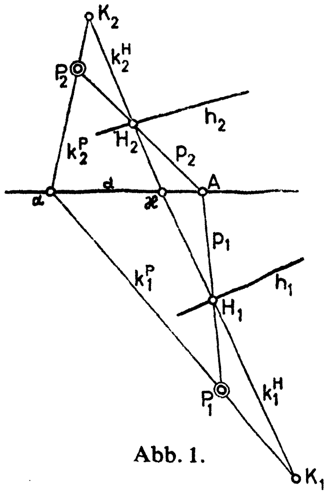

Abb. 1.

**Hilfsatz 1:** *Wenn die Projektivität der Felder $\gamma_1', \gamma_2'$ in $\varrho$ durch* **P** *und ein Winkel $\omega \neq 0°, 180°$ gegeben sind, so gibt es ein einziges Paar von Projektionen ${}^1\mathbf{P}({}^1\pi = \varrho, {}^1C)$, ${}^2\mathbf{P}({}^2\pi, {}^2C)$ und eine einzige Ebene $\gamma = (A, h)$ so, dass $A = A'$, $h$ – die Ferngerade von $\gamma$, $\sphericalangle\, {}^1\pi{}^2\pi = \omega$, ${}^1\pi \cap {}^2\pi = a = a'$ ist und dass für die konjugierten Perspektiven von $\gamma$ in $\varrho$ $K_1' = K_1$, $K_2' = K_2$, $h_1' = h_1$, $h_2' = h_2$ gilt.*

Beweis. Wir nehmen ${}^1\pi = \varrho$, $\gamma_I' = \gamma_I$ und drehen das Feld $\gamma_2'$ um die Achse $a' = a$ in die Ebene ${}^2\pi$ so, dass $\sphericalangle\, {}^1\pi{}^2\pi = \omega$ sein wird. Das neue Feld bezeichnen wir als $\gamma_{II}$ und die Ebene durch $A' = A$ und durch die Fernpunkte von $h_1' = h_1$ und $h_{II}$ mit $\gamma$. Die Ebenen ${}^1\varepsilon$, ${}^2\varepsilon$, wo $h_I \subset {}^1\varepsilon \parallel \gamma$, $h_{II} \subset {}^2\varepsilon \parallel \gamma$ ist, bestimmen an der Gerade $K_IK_{II} = c$ die Punkte ${}^1C = {}^1\varepsilon \cap c$, ${}^2C = {}^2\varepsilon \cap c$. Diese eindeutig bestimmten Projektionen ${}^1\mathbf{P}({}^1\pi, {}^1C)$, ${}^2\mathbf{P}({}^2\pi, {}^2C)$ und die Ebene $\gamma$ haben sicher die geforderten Eigenschaften.

Die projektiven Felder, die durch **P** bestimmt sind, kann man also nach diesem Hilfsatz auch für die konjugierten Perspektiven einer Ebene halten. Darum werden wir weiter die Elemente von **P** ohne Strich bezeichnen.

**Hilfsatz 2.** *Die Punkte ${}^1C$, ${}^2C$ aus dem 1. Hilfsatz sind, wenn man den Winkel $\sphericalangle\, {}^1\pi{}^2\pi = \omega$ beliebig ändert, Punkte von zwei Kreisen ${}^1k$, ${}^2k$, deren Ebenen ${}^1\varkappa$, ${}^2\varkappa$ normal zu $a$ stehen.*

Beweis. a) Die Gerade $K_1K_2$ stehe nicht normal zu $a$. (Abb. 2, wo die normalen Projektionen in die Ebene ${}^1\pi = \varrho$ mit Indexen ${}_0$ und die normalen Projektionen in eine zu $a$ normale Ebene mit Klammern bezeichnet sind.) Der Punkt $K_2$ dreht sich bei der Änderung von $\omega$ um die Achse $a$ an dem Kreis $k^K$. Die Gerade $K_IK_{II} = c$ ist die Erzeugende des Kreiskegels $(K_I, k^K)$.

An dieser Gerade liegen die Punkte ${}^1C$, ${}^2C$ und zwar in den Ebenen ${}^1\varepsilon$, ${}^2\varepsilon$ aus dem 1. Hilfsatz. Um diese Punkte zu erhalten, konstruieren wir die Gerade $\bar{h}_2$ so, dass $h_2 \parallel \bar{h}_2$ und $(h_1 \cap a) \in \bar{h}_2$ ist und bezeichnen $\bar{Q} \in \bar{h}_2$, $K_2\bar{Q} \parallel a$. Jetzt ist ${}^1\varepsilon = h_I\bar{h}_{II} = h_I\bar{Q}_{II}$. Wenn wir ${}^1C = c \cap {}^1\varepsilon$ erhalten wollen, so legen wir durch $c$ eine Ebene $\alpha$, die mit $a$ parallel ist und dann ist $\alpha \cap {}^1\varepsilon = Q_I\bar{Q}_{II}$ und ${}^1C = Q_I\bar{Q}_{II} \cap c$. Die Geraden $K_IK_{II}$ und $Q_I\bar{Q}_{II}$ sind die Erzeugenden von Kreiskegeln mit den Richtkreisen in parallelen Ebenen und die Punkte ${}^1C$ liegen an ihren gemeinsamem Kreis ${}^1k$ in einer zu a normalen Ebene $\varkappa$. Ein Punkt dieses Kreises ist $K_1K_2 \cap Q_1\bar{Q}$ und dadurch ist der Kreis ${}^1k$ bestimmt. Ähnlich erhalten wir den Kreis ${}^2k$.

b) Wenn $K_1K_2 \perp a$ ist (Abb. 3), so kommen wir ähnlich wie im a) zu diesem Ergebniss: Die Punkte ${}^1C$ sind wieder Punkte des Kreises ${}^1k$ in einer zu $a$ normalen Ebene, welche die Gerade $K_1K_2$ enthält. Dieser Kreis ist ihr Schnitt mit dem Kreiskegel $(Q_1, k^Q)$, wobei $k^Q$ der Kreis ist, an welchem sich der Punkt $\bar{Q}$ um die Achse $a$ dreht. Wie im a) ist $\bar{Q} \in \bar{h}_2$, $(h_1 \cap a) \in \bar{h}_2$, $\bar{h}_2 \parallel h_2$.

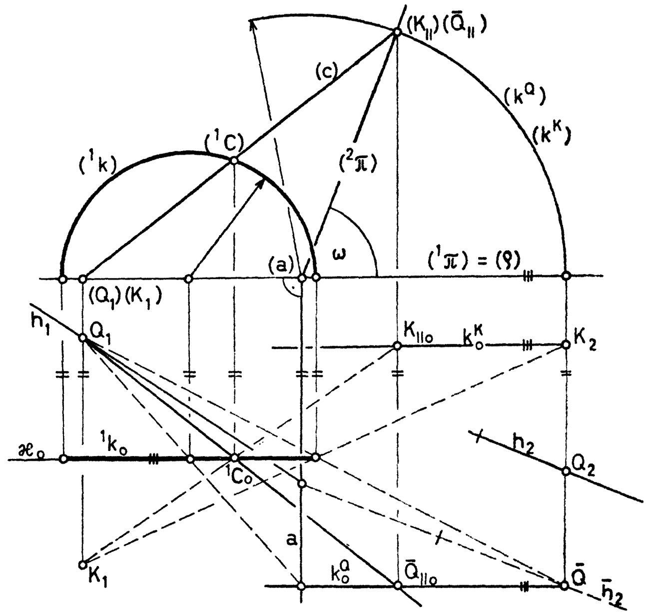

Abb. 2.

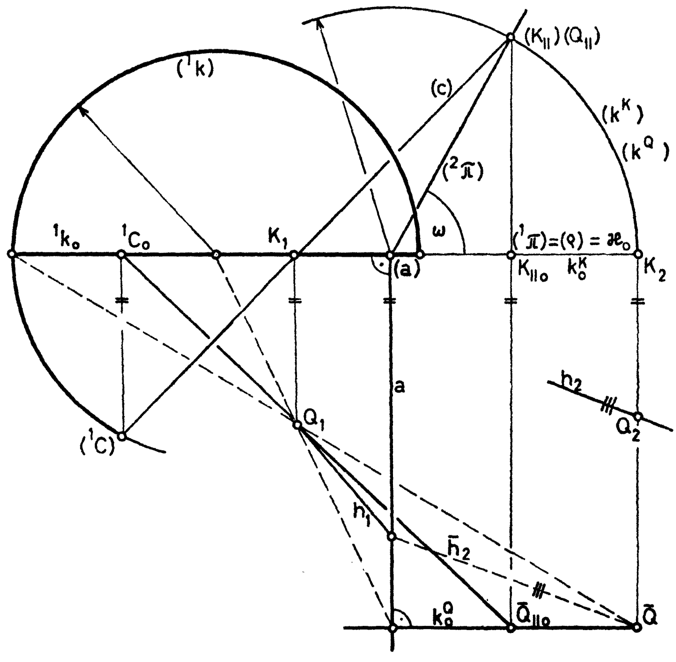

Abb. 3.

## C. KONJUGIERTE PERSPEKTIVEN DER RÄUMLICHEN FIGUR $F$

Es war im Abschnitte B gezeigt, dass $F_1^\gamma$, $F_2^\gamma$ zwei projektive Figuren in $\varrho$ sind. Was für ein Zusammenhang besteht zwischen den Figuren $F_1$ und $F_2$? Wenn wir die Punkte $G_1$, $G_2$ benutzen, so können wir aus $P_1 \in F_1$ den konjugierten Punkt $P_2$ auf diese Weise bestimmen:

$$P_1K_1 \cap P_2K_2 = \alpha\,, \quad \alpha \in a\,, \quad P_1 \in G_1P_1^\gamma\,, \quad P_2 = G_2P_2^\gamma\,, \quad (\text{Konstruktion } \mathbf{K}2)\,.$$

Umgekehrt seien gegeben:

a) die Projektiven Felder $\gamma_1$, $\gamma_2$ durch $\mathbf{P}$ und die Figur $F_1^\gamma(P_1^\gamma, \ldots)$ in $\gamma_1$,

b) die Punkte $G_1'$, $G_2'$ welche die Bedingung $(G_1'K_1 \cap G_2'K_2) \in a$ erfüllen,

c) die Figur $F_1'(P_1', \ldots)$, wo $P_1' \neq G_1'$, $G_1' \in P_1'P_1^\gamma, \ldots$ ist.

Dann kann man konstruieren

1) die zu $F_1^\gamma$ projektive Figur $F_2^\gamma(P_2^\gamma, \ldots)$, (nach $\mathbf{K}1$),

2) die Figur $F_2'(P_2', \ldots)$ aus den Schnittpunkten $P_2', \ldots$ von $P_2^\gamma G_2', \ldots$ und $(P_1K_1 \cap \cap\, a)\, K_2, \ldots$.

Nach dem 1. Hilfsatz sind $F_1^\gamma$ und $F_2^\gamma$ konjugierte Perspektiven von der Figur $F^\gamma(P^\gamma, \ldots) \subset \gamma$, die durch Projektionen ${}^1\mathbf{P}({}^1C, {}^1\pi)$, ${}^2\mathbf{P}({}^2C, {}^2\pi)$ entstanden.

Sei weiter $G = G_I'{}^1C \cap G_{II}'{}^2C$ (die Geraden $G_I'{}^1C$ und $G_{II}'{}^2C$ treffen sich, weil $(G_1'K_1 \cap G_2'K_2) \in a$ ist). Durch $G$, $\gamma$ sei die Projektion $\mathbf{P}$ definiert. Dann ist $G_1' = G_1$, $G_2' = G_2$. Durch die Punkte $P = {}^1CP_I' \cap {}^2CP_{II}', \ldots$ ist eine neue Figur $F(P, \ldots)$ definiert, für welche, wie man sich leicht überzeugt, $\mathbf{P}(F) = F^\gamma$, $F_2' = F_2$, $F_1' = F_1$ ist.

Das bedeutet: Die Figuren $F_2'$, $F_2^\gamma$, welche durch die angegebene Weise aus $\mathbf{P}$, $G_1'$, $G_2'$ konstruiert wurden, sind gemeinsam mit den Figuren $F_1$, $F_1^\gamma$ die konjugierten Perspektiven einer Raumfigur $F$. Darum werden wir weiter zu $F_2$, $G_1$, $G_2$ keine Striche zufügen.

Auf Grund dieser Überlegung ist das Umzeichnen von Perspektiven nur mit Hilfe der Elemente $\mathbf{P}$, $G_1$, $G_2$ durchführbar. Die Projektionen ${}^1\mathbf{P}$, ${}^2\mathbf{P}$, $\mathbf{P}$ braucht man nicht konstruieren.

Am häufigsten wählt man die Projektion $\mathbf{P}$ speziell: Das Zentrum $G$ ist der Fernpunkt von den Normalen zu $\gamma$. Dann sind die Paare $F_1^\gamma$, $F_1$; $F_2^\gamma$, $F_2$ zwei Perspektiven im gewöhnlichen Sinne ($\gamma$ – die Grundebene, $h_I$, $h_{II}$ die Horizonte). Nur solche Perspektiven werden wir weiter in Betracht ziehen.

Wie soll man jetzt die Elemente $\mathbf{P}$, $G_1$, $G_2$ wählen, wenn man den Punkt $G$ als den Fernpunkt von den Normalen zu $\gamma$ erhalten will?

a) Wenn die Gerade $h_1$ nicht zu a normal steht, (Abb. 4), ist auch die Ebene $\varkappa$ des Kreises ${}^1k$ nicht zu $a$ normal. Wenn wir den Punkt $G$ als Fernpunkt von Normalen zu $\gamma$ erhalten wollen, so muss die Bedingung $G^1C \perp \gamma$, also auch $G_1{}^1C \perp h_1{}^1C$ erfüllt sein. Darum führen wir nach der Abb. 4 eine Ebene $\varepsilon \perp h_1$ ein, welche den Kreis ${}^1k$ im Punkte ${}^1C$ schneidet und bezeichnen $h_1 \cap \varepsilon = E$. Der gesuchte Punkt $G$

liegt an $\varepsilon \cap {}^1\pi$ und es ist $E^1C \perp G_1{}^1C$. Bei der Bezeichnung nach der Abb. 4 erhalten wir für die Koordinaten des Punktes $G_1$

$$x = m + \xi\,,$$
$$y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha + \eta\,,$$
$$(y - \eta)\,\eta = r - (\xi : \cos\alpha)^2\,.$$

Daraus ergibt sich die Gleichung der Hyperbel ${}^1h$, an welcher die möglichen Punkte $G_1$ (die Fluchtpunkte der zu $\gamma$ normalen Richtung) liegen:

$${}^1h \equiv x^2 + xy\,\mathrm{tg}\,\alpha - 2mx : \cos^2\alpha + m : \cos^2\alpha - r^2 = 0\,.$$

Ihre Asymptotenrichtungen sind

$$x = 0\,,$$
$$y = -x : \mathrm{tg}\,\alpha\,,$$

ihr Zentrum hat die Koordinaten

$$x = 0\,,$$
$$y = 4m : \sin 2\alpha\,.$$

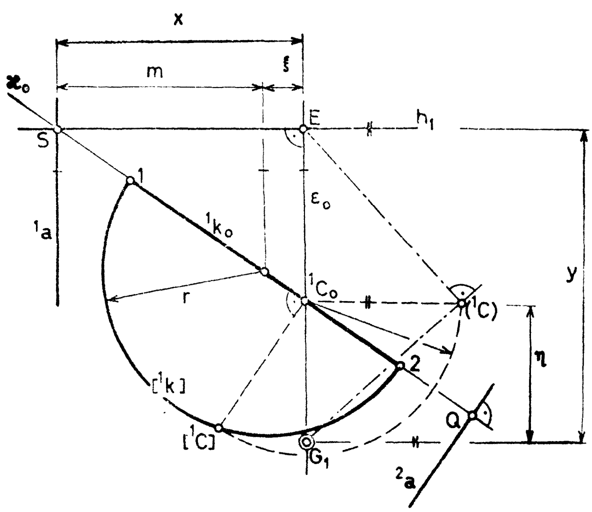


Abb. 4.

Diese Hyperbel kann man auch leicht Konstruieren: Die Asymptote ${}^1a$ geht durch den Schnittpunkt $h_1 \cap \varepsilon = S$ normal zu $h_1$. Weil die Schnittpunkte 1, 2 des Kreises ${}^1k$ mit der Ebene ${}^1\pi$ auch die Punkte von ${}^1h$ sind, so erhalten wir an $\varkappa_0$ den Punkt $Q(\overline{S1} = \overline{2Q})$ der zweiten Asymptote ${}^2a$, die normal zu $\varkappa_0$ steht. Dadurch ist ${}^1h$ bestimmt.

b) Wenn die Gerade $h_1$ (und nicht die Gerade $h_2$) zu a normal ist, so haben wir $\varkappa \parallel h_1$, $d \neq 0$, Abb. 5. Wir wählen wieder die Ebene $\varepsilon \perp h_1$ so dass sie den Kreis ${}^1k$ im Punkte ${}^1C$ trifft und bezeichnen $h_1 \cap \varepsilon = E$. Ähnlich wie im a) bestimmen wir den Punkt $G_1$ an $\varepsilon_0$ aus der Bedingung $G_1{}^1C \perp h_1{}^1C$. Bei der Bezeichnung nach der Abb. 5 haben wir für die Koordinaten von $G_1$ die Gleichungen

$$\eta = y - d\,,$$
$$\eta \,.\, d = r^2 - d^2\,,$$
$$d(y - d) = r^2 - x^2\,.$$

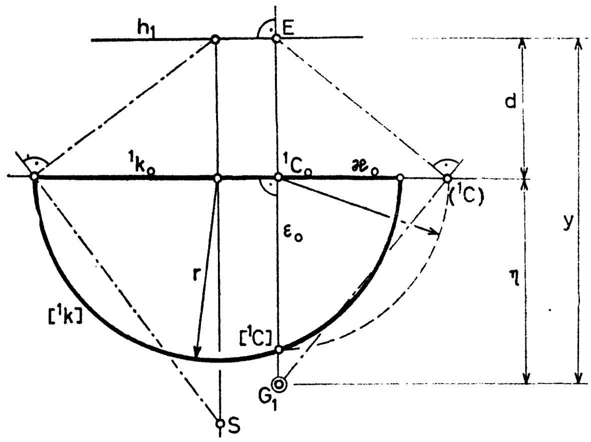

Abb. 5.

Daraus ergibt sich die Gleichung der Parabel ${}^1p$, an welcher die möglichen Punkte $G_1$ liegen:

$${}^1p \equiv y = -x^2 : d + r^2 + d^2\,.$$

Die Abb. 5 enthält auch die Konstruktion des Scheitels $S$ von ${}^1p$. Die Kegelschnitte ${}^1h$, ${}^2h$, bzw. ${}^1p$, ${}^2p$ benennen wir als die zu den Elementen **P** *adjungierten Kegelschnitte.*

c) Bei $h_1 \perp a$ und $h_2 \perp a$ ist $d = 0$ und $G_1 = G_2$ ist der Fernpunkt von $a$.

Wir bemerken noch, dass im Falle c) die Ebenen ${}^1\pi$, ${}^2\pi$ normal zu $\gamma$ stehen, im Falle b) nur die Ebene ${}^2\pi$ und im Falle a) keine von ihnen.

Alle bisherigen Ergebnisse fassen wir in diesem **Satz** zusammen:

*Es seien die projektiven Felder $\gamma_1, \gamma_2$ in der Ebene $\varrho$ durch die Elemente* $\mathbf{P}(K_1, K_2, h_1, h_2, a, A)$ *gegebenen. Dan gibt es die Projektionen* ${}^1\mathbf{P}$, ${}^2\mathbf{P}$ *(mit Zentren ${}^1C, {}^2C$ und mit Projektionsebenen ${}^1\pi = \varrho$, ${}^2\pi$ und die Ebene $\gamma = (A, h)$ ($h$ – Ferngerade), so dass die konjugierten Perspektiven von $\gamma$ in $\varrho$ mit den Feldern $\gamma_1, \gamma_2$ identisch sind. Die Zentren ${}^1C, {}^2C$ von allen solchen Projektionen sind Punkte von zwei Kreisen*

*${}^1k$, ${}^2k$ in den zu a normalen Ebenen ${}^1\varkappa$, ${}^2\varkappa$. Wenn die Geraden $h_1$, $h_2$ nicht gleichzeitig zu a normal sind, so liegen die Punkte $G_1$, $G_2$ (die konjugierten Perspektiven von dem Fernpunkt G der Normalen zu $\gamma$) an den zu* **P** *adjungierten Kegelschnitten. Bei $h_1 \perp a$, $h_2 \perp a$ ist $G_1 = G_2$ der Fernpunkt von a.*

Nach diesem Satz kann man zu $F_1^\gamma, F_1$ die konjugierte Perspektive $F_2^\gamma, F_2$ auf diese Weise ermitteln:

Zuerst wählt man die projektiven Felder $\gamma_1, \gamma_2$ durch die Elemente **P**. Dann konstruiert man die zu **P** adjungierten Kegelschnitte. Wenn man passend $G_1$ an einem wählt und den Punkt $G_2$ an dem anderen und an der konjugierten Kerngerade ermittelt, so erhält man alle Elemente, die zu der Erfindung von $F_2^\gamma, F_2$ aus $F_1^\gamma, F_1$ nach den konstruktionen **K**1, **K**2 nötig sind.


## Výtah

## SDRUŽENÉ PERSPEKTIVY

LADISLAV DRS, Praha

Z dané perspektivy $F_1, F_1^\gamma$ lze sestrojit sdruženou $F_2, F_2^\gamma$ známe-li projektivitu **P** mezi perspektivami $F_1^\gamma$, $F_2^\gamma$ kolmých průmětů útvaru $F$ do roviny $\gamma$ a úběžníky $G_1$, $G_2$ směru kolmého k rovině $\gamma$. Závislost bodů $G_1$, $G_2$ na projektivitě **P** určuje závěrečná věta.



## Резюме

## СОПРЯЖЕННЫЕ ПЕРСПЕКТИВЫ

ЛАДИСЛАВ ДРС, (Ladislav Drs), Прага

Из данной перспективы $F_1, F_1^\gamma$ можно построить новую перспективу $F_2, F_2^\gamma$, зная проективность **P** между перспективами $F_1^\gamma$, $F_2^\gamma$ ортогональной проекции $F$ на плоскость $\gamma$ и зная еще точки схода $G_1$, $G_2$ нормального направления к плоскости $\gamma$. Зависимость точек $G_1$, $G_2$ от проективности **P** выражает заключительная теорема.