Časopis pro pěstování matematiky

Karel Čulík

Замечание к построению правильных графов третьей степени, содержащих гамильтоновскую окружность

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 89 (1964), No. 4, 385--389

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117514`

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 89 * PRAHA 31. X. 1964 * ČÍSLO 4

ЗАМЕЧАНИЕ К ПОСТРОЕНИЮ ПРАВИЛЬНЫХ ГРАФОВ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ, СОДЕРЖАЩИХ ГАМИЛЬТОНОВСКУЮ ОКРУЖНОСТЬ

КАРЕЛ ЧУЛИК (Karel Čulík), Прага

(Поступило в редакцию 24/I 1962 г.)

Описано простое построение всех конечных правильных графов третьей степени, содержащих гамильтоновскую окружность.

В работе [1] изложено построение всех конечных неоринтированных графов без петлей, которые:

(1) правильны и являются графами третьей степени,

(2) обладают гамильтоновской окружностью и

(3) разложимы на таких три линейных фактора, что произведение каждых двух из них является гамильтоновской окружностью.

Рекуррентные построения, используемые в [1], составлены из основных построений двух родов, описание которых сравнительно сложно. В настоящей заметке мы покажем, каким образом можно при помощи одного только, совершенно элементарного построения, рекуррентно получить все графы, удовлетворяющие (1) и (2), т.е. вообще все конечные правильные графы третьей степени (неориентированные и без петлей), содержащие гамильтоновскую окружность.

Этим одним выше упомянутым построением является известное „соединение ребер“ ([2], стр. 181), что значит следующее: на двух произвольных ребрах (или же на одном и том же ребре) выберем две новых вершины, которые соединим новым ребром (при этом мы имеем в виду все время плоские представления всех графов, что очень упрощает описание конструкций). „Обратным“ построением к „соединению ребер“ выбает обыкновенно „расщепление ребра“ ([2], стр. 183), что также является (при определенной специализации) одним из основных построений в [1].

Мы будем разуметь „обратным“ построением к „соединению ребер“ т. наз. „освобождение ребра“, что значит: ребро и вершины, которые оно соединяет, выпустим и в том месте, где были раньше вершины, соединим оставшиеся два ребра в одно (следовательно, из двух ребер возникнет всегда только одно, рис. 1a), возможно, что из трех ребер возникнет только одно, рис. 1e)). При этом ребро h, соединяющее вершины u, $v(u \neq v)$ можем выпустить только тогда, если же ни одна из вершин u, v не принадлежит двухугольнику, или же в том случае, когда обе вершины и ребро h принадлежат двухугольнику, но u, v при этом не соединены тремя параллельными ребрами и остающиеся ребра не

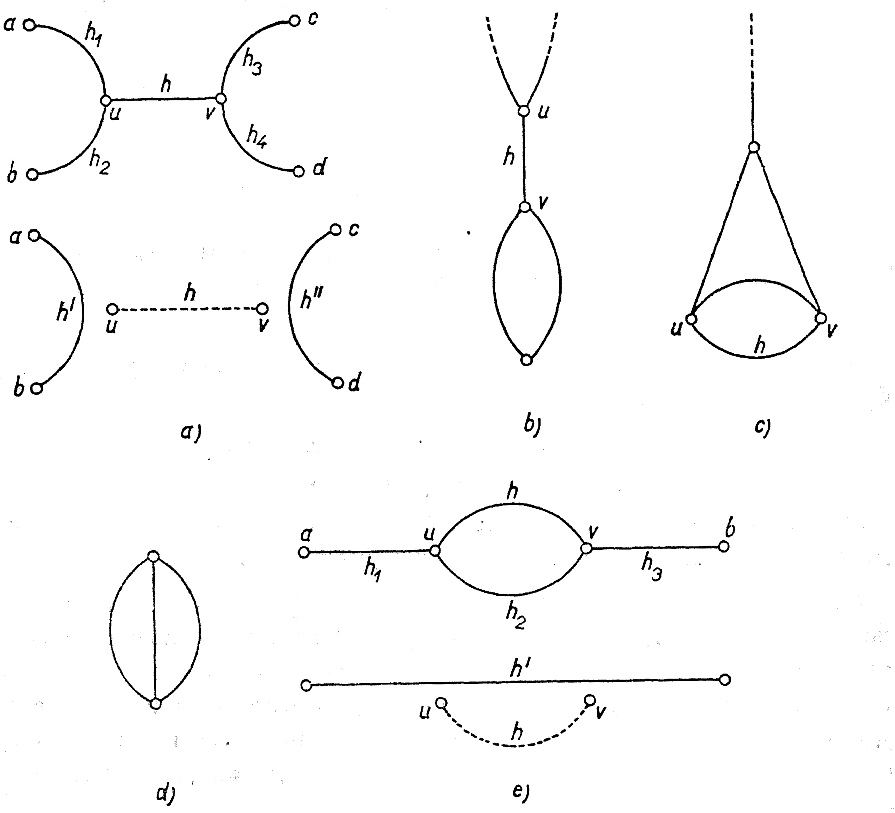

Рис. 1.

ведут из вершин u, v в ту же вершину (исключенные случаи освобождения ребра h изображены на рис. 1b), c) и d)). Легко видно, что приведенные ограничения освобождения ребер гарантируют, что в возникшем графе не будет петлей, т.е. что мы будем иметь все время дело с классом графов, исследуемых в [1].

Если же в графе нельзя освободить ни одно ребро, то мы называем его неприводимым. Очевидно, что единственным связным неприводимым графом, удовлетворяющим (1), является граф на рис. 1d).

Ребра h_1, h_2 мы называем гамильтоновской парой графа, удовлетворяющего (1), если или же $h_1 = h_2$, или h_1, h_2 образуют двухугольник, или h_1, h_2 лежат на одной и той же гамильтоновской окружности.

Теорема. *В каждом графе, который выполняет условия* (1) *и* (2) *и который не является неприводимым, можно освободить по крайней мере одно ребро таким образом, что возникший граф опять-таки выполняет* (1) *и* (2) *или же он связен и неприводим. Наоборот, в каждом графе, который выполняет* (1) *и* (2) *или который является связным и неприводимым, существует гамильтоновская пара ребер, и соединением ребер гамильтоновской пары этого графа всегда можно образовать граф, удовлетворяющий* (1) *и* (2).

Доказательство. Если данный граф удовлетворяет условиям (1) и (2) и если он при этом неприводим, то в нем имеется ребро, соединяющее две вершины, которые не являются соседними по крайней мере в одной гамильтоновской окружности, или же в нем такого ребра нет, т.е. каждое ребро соединяет таких две вершины, которые являются соседними на каждой гамильтоновской окружности данного графа. В первом случае можно, конечно, рассматриваемое ребро освободить (имеем дело с типом на рис. 1а)), так что опять возникает граф, выполняющий (1) и (2), или граф, который является связным (из (2) вытекает, что в рассматриваемом графе нет мостов) и неприводимым. Во втором случае данный граф состоит из отдельных ребер и двухугольников таким образом, что каждых два двухугольника соединены одним ребром, так что произвольное ребро можно освободить, причем опять возникнет граф, который или удволетворяет (1) и (2) или является связным и неприводимым.

Далее очевидно, что в каждом графе, удовлетворяющем (1) и (2) или в каждом связном и неприводимом графе существует гамильтоновская пара ребер. Также последняя часть теоремы очевидна (так как новые вершины помещаем прямо на ребра первоначальной гамильтоновской окружности).

Следствие. Каждый граф, выполняющий условия (1) и (2) (и, следовательно, также (3)), можно получить последовательным соединением гамильтоновских пар ребер, если в качестве исходного графа возьмем связный неприводимый граф, удовлетворяющий (1), и таким образом получим только графы, выполняющие (1) и (2).

Литература

[1] *А. Коциг:* Построение гамильтоновских графов третьей степени. Журнал для занятий по матем. *87* (1962), 148—168.

[2] *D. König:* Theorie der endlichen und unendlichen Graphen, Leipzig 1936.

Shrnutí

POZNÁMKA O KONSTRUKCÍCH PRAVIDELNÝCH GRAFŮ TŘETÍHO STUPNĚ, KTERÉ OBSAHUJÍ HAMILTONOVSKOU KRUŽNICI

KAREL ČULÍK, Praha

V [1] je udána konstrukce všech konečných neorientovaných grafů bez smyček, které splňují podmínky: (1) jsou pravidelné třetího stupně, (2) obsahují Hamiltonovskou kružnici a (3) připouštějí takový rozklad v lineární faktory, že komposice každých dvou je Hamiltonovskou kružnicí. Užité rekurentní konstrukce jsou dosti složité, ale v základě jsou to známé konstrukce „spojování hran“ a „štěpení hrany“ (viz [2], str. 181 a 183). Vezmeme-li místo „stěpení hrany“ přirozenou inversní konstrukci k „spojování hran“ — tzv. „vypuštění hrany“ — lze velmi jednoduše a skoro triviálně konstruovat vůbec všechny konečné neorientované grafy, které splňují (1) a (2).

Graf se nazývá *ireducibilní*, když má tvar jako na obr. 1, d). Hrany h_1 a h_2 tvoří Hamiltonovský pár, když buď $h_1 = h_2$ nebo h_1 a h_2 tvoří dvojúhelník nebo h_1 i h_2 patří téže Hamiltonovské kružnici.

V každém grafu, který splňuje (1) a (2) a není ireducibilní, lze „vypustit“ alespoň jednu hranu tak, že vznikne buď zase graf splňující (1) a (2) nebo ireducibilní graf. Naopak v každém grafu, který splňuje (1) a (2) nebo je ireducibilní, existuje takový Hamiltonovský pár hran, jejichž „spojením“ vznikne graf, který splňuje (1) a (2).

Zusammenfassung

BEMERKUNG ÜBER DIE KONSTRUKTIONEN DER REGULÄREN GRAPHEN DES DRITTEN GRADES, WELCHE DEN HAMILTONSCHEN KREIS ENTHALTEN

KAREL ČULÍK, Praha

In [1] wird eine Konstruktion der sämtlichen endlichen, nichtgerichten Graphen ohne Schlingen angegeben. Dabei sind die Graphen (1) regulär vom dritten Grad, (2) enthalten einen Hamiltonschen Kreis und (3) besitzen eine solche Zerlegung in drei lineare Faktoren, dass die Komposition von je zwei von ihnen ein Hamiltonscher Kreis ist. Die benutzten rekursiven Konstruktionen sind ziemlich kompliziert und stellen im Grunde die bakannten Konstruktionen des Verbindens der Kanten und des Spaltens einer Kante (siehe [2], S. 181 und 183) dar. Wenn wir anstatt des

Spaltens einer Kante eine natürliche inverse Konstruktion zum Verbinden der Kanten – das sog. Entfernen einer Kante – benutzen werden, kann man überhaupt alle endlichen, nichtgerichteten Graphen, die (1) und (2) erfüllen, sehr einfach und fast trivial konstruieren.

Ein Graph heisst irreduzibel, wenn er die Form von Abb. 1, d) hat. Die Kanten h_1, h_2 bilden ein Hamiltonsches Paar, wenn entweder $h_1 = h_2$ oder h_1, h_2 ein Zweieck bilden oder h_1 und h_2 demselben Hamiltonschen Kreis angehören.

In jedem Graph, der (1) und (2) erfüllt und nicht irreduzibel ist, kann man mindestens eine Kante entfernen, so dass ein Graph ensteht, der (1) und (2) erfüllt oder irreduzibel ist. Umgekehrt in jedem Graph, der (1) und (2) erfüllt oder irreduzibel ist, gibt es ein solches Hamiltonsches Paar der Kanten, dass durch das Verbinden von ihnen ein Graph ensteht, der wieder (1) und (2) erfüllt.