Michal Greguš

Über das verallgemeinerte Randwertproblem der $n$-ten Ordnung

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 89 (1964), No. 1, 85--89

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117497`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

# ÜBER DAS VERALLGEMEINERTE RANDWERTPROBLEM DER $n$-TEN ORDNUNG

MICHAL GREGUŠ, Bratislava

(Eingegangen am 10. November 1962)

In der Arbeit wird mit Hilfe der Greenschen Funktion das unhomogene Randwertproblem der $n$-ten Ordnung mit verallgemeinerten Randbedingungen gelöst.

**Einleitung.** Es ist bekannt [1], dass wenn die lineare Differentialgleichung $n$-ter Ordnung

$$L(y) = 0$$

und $n$ Randbedingungen

$$U_i(y) = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

in zwei Punkten $a < b$ gegeben sind, dann kann man unter gewissen Voraussetzungen zu einem beliebigen Punkt $\xi \in (a, b)$ die sogenannte Greensche Funktion $G(x, \xi)$ konstruieren, durch die Lösung $y$ des unhomogenen Problems

$$L(y) = r(x)\,, \quad U_i(y) = 0$$

in der Form

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi)\, r(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

ausgedrückt werden kann.

Dieses Ergebnis wird ferner zur Lösung bestimmter Randwertprobleme mit Parameter in der Weise verwendet, dass das Problem auf eine bestimmte Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art überführt wird.

In dieser Arbeit wird das angeführte Problem und die Randbedingungen verallgemeinert.[1])

[1]) Zuerst verallgemeinerte ich die Randbedingungen über $m$ Punkte. Auf die in dieser Arbeit angeführte Verallgemeinerung wurde ich von J. KURZWEIL aufmerksam gemacht.

**1.** Es sei das Randwertproblem

$$
(1) \qquad L(y) = p_0 \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = 0\,,
$$

$$
U_i(y) = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b y^{(j-1)}(x)\, d\varphi_{ij}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n
$$

gegeben, wo $\varphi_{ij}$ Massen mit endlicher Variation, und $p_0 \neq 0, p_1, \ldots, p_n$ stetige Funktionen im Intervall $\langle a, b\rangle$ sind.

Setzen wir voraus, dass das Problem (1) unlösbar ist, d. h. dass seine einzige Lösung die Funktion ist, welche identisch verschwindet. Dann gilt folgender Satz:

**Satz 1.** *Für einen beliebigen Punkt $\xi \in (a, b)$ kann man die Funktion $G(x, \xi)$ konstruieren, welche folgende Eigenschaften hat:*

1. *$G(x, \xi)$, $\partial/\partial x\, G(x, \xi) = G_x(x, \xi)$, $\ldots$, $\partial^{n-2}/\partial x^{n-2}\, G(x, \xi) = G_{x^{n-2}}(x, \xi)$ sind stetige Funktionen von $x \in \langle a, b\rangle$.*

2. *Die Funktion $G_{x^{n-1}}(x, \xi)$ ist überall in $\langle a, b\rangle$ ausser dem Punkt $\xi$ stetig, wo sie eine Unstetigkeit erster Art mit dem Sprung $1/p_0(\xi)$ hat, d. h.,*

$$
(2) \qquad G_{x^{n-1}}(\xi + 0, \xi) - G_{x^{n-1}}(\xi - 0, \xi) = \frac{1}{p_0(\xi)}\,.
$$

3. *Die Funktion $G(x, \xi)$ ist die Lösung der Differentialgleichung $L(y) = 0$ in den Intervallen $\langle a, \xi)$, $\langle \xi, b\rangle$ und erfüllt die Randbedingungen $U_i(y) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

4. *Die Funktion $G(x, \xi)$ ist durch die Eigenschaften 1, 2 und 3 eindeutig bestimmt.*

Beweis. $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ sei ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung $L(y) = 0$. Dann muss die Funktion $G(x, \xi)$, welche wir konstruieren wollen, in den Intervallen $\langle a, \xi)$, $\langle \xi, b\rangle$ die Form

$$
G(x, \xi) = a_1(\xi)\, y_1(x) + a_2(\xi)\, y_2(x) + \ldots + a_n(\xi)\, y_n(x) \quad (a \leqq x < \xi)\,,
$$
$$
G(x, \xi) = b_1(\xi)\, y_1(x) + b_2(\xi)\, y_2(x) + \ldots + b_n(\xi)\, y_n(x) \quad (\xi \leqq x \leqq b)
$$

haben, wo $a_1(\xi), \ldots, a_n(\xi), b_1(\xi), \ldots, b_n(\xi)$ Konstanten sind. Aus der Stetigkeit der Funktion $G(x, \xi)$ und ihren ersten $n - 2$ Ableitungen nach $x$ im Punkte $\xi$ und aus der Bedingung (2) folgen für die Differenz $c_i = b_i - a_i$ $n$ Bedingungen

$$
\begin{aligned}
c_1\, y_1(\xi) + c_2\, y_2(\xi) + \ldots + c_n\, y_n(\xi) &= 0\,,\\
c_1\, y_1'(\xi) + c_2\, y_2'(\xi) + \ldots + c_n\, y_n'(\xi) &= 0\,,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\
c_1\, y_1^{(n-2)}(\xi) + c_2\, y^{(n-2)}(\xi) + \ldots + c_n\, y^{(n-2)}(\xi) &= 0\,,\\
c_1\, y_1^{(n-1)}(\xi) + c_2\, y^{(n-1)}(\xi) + \ldots + c_n\, y^{(n-1)}(\xi) &= \frac{1}{p_0(\xi)}\,.
\end{aligned}
$$

Die Determinante dieses Systems ist die Wronskische Determinante des Fundamentalsystems der Lösungen im Punkte $\xi$, und daher sind die Zahlen $c_i$ eindeutig bestimmt.

Wenn wir $G(x, \xi)$ in die Bedingungen $U_i(y) = 0$ einsetzen, wir bekommen für $a_i$ folgendes System von Gleichungen:

$$\sum_{j=1}^{n} a_i \left[ \int_a^{\xi} y^{(j-1)}(x) \, d\varphi_{ij} + \int_{\xi}^{b} y^{(j-1)}(x) \, d\varphi_{ij} \right] = -c_i \int_{\xi}^{b} y^{(j-1)}(x) \, d\varphi_{ij} ,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n .$$

Die Determinante dieses Systems von Gleichungen ist von Null verschiedenen, weil das Problem (1) unlösbar ist. Aus diesem System können also $a_1, a_2, \ldots, a_n$ eindeutig bestimmt werden und dann ist $b_i = c_i + a_i$. (Wenn die rechte Seite dieses Systems gleich Null ist, dann ist $a_i \equiv 0$ und $b_i \equiv c_i$). Damit ist der Satz bewiesen.

**2. Die Lösung eines unhomogenen Problems in der Form eines Integrals.** Es sei

$$L(y) = r(x) , \quad U_i(y) = 0 , \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

ein unhomogenes Problem. $r(x)$ sei eine stetige Funktion im Intervall $\langle a, b \rangle$. Setzen wir voraus, dass das dem Problem (3) entsprechende Problem (1) unlösbar ist. Dann gilt folgender

**Satz 2.** *$G(x, \xi)$ sei die zum Problem (1) gehörige Greensche Funktion. Dann ist die Lösung $y(x)$ des unhomogenen Problems (3) durch die Formel*

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) \, r(\xi) \, d\xi$$

*gegeben.*

Beweis. Aus der Stetigkeit der Ableitungen der Funktion $G(x, \xi)$ nach $x$ bis zur Ordnung $n - 2$ eingerechnet im Intervall $\langle a, b \rangle$ folgt

$$y^{(l)}(x) = \int_a^b G_{x^l}(x, \xi) \, r(\xi) \, d\xi , \quad l = 1, 2, \ldots, n - 2 .$$

$$y^{(n-1)}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_a^x G_{x^{n-2}}(x, \xi) \, r(\xi) \, d\xi + \int_x^b G_{x^{n-2}}(x, \xi) \, r(\xi) \, d\xi \right] =$$
$$= \int_a^x G_{x^{n-1}}(x, \xi) \, d\xi + G_{x^{n-2}}(x, x) \, r(x) +$$
$$+ \int_x^b G_{x^{n-1}}(x, \xi) \, r(\xi) \, d\xi - G_{x^{n-2}}(x, x) \, r(x) = \int_a^b G_{x^{n-1}}(x, \xi) \, r(\xi) \, d\xi .$$

$$y^{(n)} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \int_a^x G_{x^{n-1}}(x, \xi) \, r(\xi) \, d\xi + \int_x^b G_{x^{n-1}}(x, \xi) \, r(\xi) \, d\xi \right] =$$
$$= \int_a^b G_{x^n}(x, \xi) \, r(\xi) \, d\xi + G_{x^{n-1}}(x, x - 0) \, r(x) -$$
$$- G_{x^{n-1}}(x, x + 0) \, r(x) = \int_a^b G_{x^n}(x, \xi) \, r(\xi) \, d\xi + \frac{r(x)}{p_0(x)} ,$$

weil

$$G_{x^{n-1}}(x, x - 0) - G_{x^{n-1}}(x, x + 0) = G_{x^{n-1}}(x + 0, x) - G_{x^{n-1}}(x - 0, x) = \frac{1}{p_0(x)}.$$

Aus den so ermittelten Ableitungen folgt

$$L(y) = \int_a^b L[G(x, \xi)]\, r(\xi)\, \mathrm{d}\xi + r(x) = r(x).$$

Die Erfüllung der Randbedingungen $U_i(y) = 0$ reduziert sich jetzt zur Verwechslung der Integrationfolge in den Integralen

$$\int_a^b \int_a^b G_{x^{j-1}}(x, \xi)\, r(\xi)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\varphi_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Aus den Eigenschaften der Funktionen $G(x, \xi)$ und $r(\xi)$ folgt, dass dies möglich ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Bemerkung. Die bekannten Resultate über die Lösung der Randwertprobleme der Form

$$L(y) = r(x), \quad U_i(y) = \gamma_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

wo $\gamma_i$ Konstanten sind, und über die Äquivalenz der Randwertprobleme, welche vom Parameter abhängen, gelten auch in diesem Falle und deshalb werden sie nicht angeführt.

## *Literatur*

[1] *G. Sansone*: Equazioni differenziali nel Campo Reale, Vol. I, Bologna 1948.

## Výťah

## O ZOBECNENOM OKRAJOVOM PROBLÉME $n$-TÉHO RÁDU

MICHAL GREGUŠ, Bratislava

V práci je rozriešený nehomogénny okrajový problém $n$-tého rádu so zovšeobecnenými okrajovými podmienkami typu

$$L(y) = r(x), \quad U_i(y) = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b y^{(j-1)}(x)\, \mathrm{d}\varphi_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

kde $\varphi_{ij}$ sú miery s konečnou variáciou. Riešenie je prevedené pomocou Greenovej funkcie.

Резюме

## ОБ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ $n$-ОГО ПОРЯДКА

МИХАЛ ГРЕГУШ, Братислава

В работе разрешена неоднородная краевая задача $n$-ого порядка с обобщенными краевыми условиями вида

$$L(y) = r(x), \quad U_i(y) = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b y^{(j-1)}(x) \, d\varphi_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\varphi_{ij}$ — меры с ограниченным изменением.