Časopis pro pěstování matematiky

Miroslav Šisler

O jedné iterační metodě řešení soustavy přibližně lineárních rovnic

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 89 (1964), No. 1, 36--52

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117494

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 89 (1964), Praha

O JEDNÉ ITERAČNÍ METODĚ ŘEŠENÍ SOUSTAVY PŘIBLIŽNĚ LINEÁRNÍCH ROVNIC

MIROSLAV ŠISLER, Praha
(Došlo dne 21. srpna 1962)

V článku je navržena a zkoumána jistá iterační metoda řešení soustav rovnic, které jsou v podstatě lineární až na jeden malý nelineární člen.

I

Mnohé fysikální, případně technické zákonitosti se dají popsat v prvé aproximaci soustavou lineárních rovnic, avšak při přesnějším zkoumání je třeba rovnice doplnit ještě jistými nelineárními členy, které jsou malé v okolí řešení původní soustavy lineárních rovnic. V tomto příspěvku se proto navrhuje jistá iterační metoda, která je zobecněním známé Gauss-Seidelovy metody pro řešení soustav lineárních rovnic a je výhodná pro řešení výše zmíněných soustav.

Uvažujme soustavu rovnic

(1) $$\mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{d} + \varrho\, \mathbf{z}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}\,,$$

kde $\mathbf{D}$ je regulární reálná čtvercová matice řádu n, $\mathbf{x}$ reálný sloupcový vektor o složkách $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $\mathbf{d}$ reálný sloupcový vektor o složkách $d_1, d_2, \ldots, d_n$, $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ sloupcový vektor o složkách $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)$, kde $f_1, \ldots, f_n$ jsou reálné funkce n reálných proměnných se spojitými prvními parciálními derivacemi v okolí reálného řešení $\mathbf{a}$ soustavy (1) a ϱ je jistá konstanta.

O matici $\mathbf{D}$ dále předpokládejme, že je symetrická a positivně definitní. (Tento předpoklad nesnižuje nikterak obecnost našich úvah, neboť v případě nesymetrické matice $\mathbf{D}$ je možno vynásobit (1) zleva transponovanou maticí $\mathbf{D}'$ a soustava $\mathbf{D}'\mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{D}'\mathbf{d} + \varrho\mathbf{D}'\,\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$ již vyhovuje našim požadavkům.)

Matici $\mathbf{D}$ pišme ve tvaru

(2) $$\mathbf{D} = \mathbf{P} - \mathbf{Q} - \mathbf{Q}'\,,$$

kde $\mathbf{P}$ je positivně definitní, symetrická matice, $\mathbf{Q}'$ je transponovaná matice k matici $\mathbf{Q}$. Podle lemmatu 4 práce [2] je matice $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$ regulární a můžeme definovat iterační metodu tímto předpisem:

(3) $$\mathbf{x}_{\nu+1} = (\mathbf{P} - \mathbf{Q})^{-1}\, \mathbf{Q}'\mathbf{x}_\nu - (\mathbf{P} - \mathbf{Q})^{-1}\,(\mathbf{d} + \varrho\, \mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu))\,.$$

Poznámka 1. Z definice (3) je patrno, že v případě, že $\mathbf{D} = (d_{ij})$, $\mathbf{P} = (p_{ij})$, $\mathbf{Q} = (q_{ij})$ a je $p_{ii} = d_{ii}$ $(i = 1, \ldots, n)$, $p_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, $q_{ij} = d_{ij}$ $(i > j)$, $q_{ij} = 0$ $(i \leqq j)$ (tj. $\mathbf{P}$ je diagonální matice, $\mathbf{Q}$ trojúhelníková matice), je iterační metoda v podstatě Gauss-Seidelovou metodou s tím rozdílem, že vektor $\mathbf{d} + \varrho\, \mathbf{z}(\mathbf{x})$ není zde konstantní. Při praktickém výpočtu aproximací lze tedy postupovat podle tohoto schématu (přitom $x_{\nu+1,1}, \ldots, x_{\nu+1,n}$ jsou složky $(\nu + 1)$-ní aproximace, $x_{\nu,1}, \ldots, x_{\nu,n}$ složky ν-té aproximace):

$$(3') \quad x_{\nu+1,1} = \frac{1}{d_{11}} \left[- d_{12} x_{\nu,2} - \ldots - d_{1n} x_{\nu,n} - d_1 - \varrho f_1(x_{\nu,1}, \ldots, x_{\nu,n}) \right],$$

$$x_{\nu+1,2} = \frac{1}{d_{22}} \left[- d_{21} x_{\nu+1,1} - d_{23} x_{\nu,3} - \ldots - d_{2n} x_{\nu,n} - d_2 - \varrho f_2(x_{\nu,1}, \ldots, x_{\nu,n}) \right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{\nu+1,i} = \frac{1}{d_{ii}} \left[- d_{i1} x_{\nu+1,1} - \ldots - d_{i,i-1} x_{\nu+1,i-1} - d_{i,i+1} x_{\nu,i+1} - \ldots - \right.$$
$$\left. - d_{in} x_{\nu,n} - d_i - \varrho f_i(x_{\nu,1}, \ldots, x_{\nu,n}) \right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{\nu+1,n} = \frac{1}{d_{nn}} \left[- d_{n1} x_{\nu+1,1} - \ldots - d_{n,n-1} x_{\nu+1,n-1} - d_n - \varrho f_n(x_{\nu,1}, \ldots, x_{\nu,n}) \right].$$

Kdybychom za $\mathbf{P}$ vzali příslušnou blokově diagonální matici, obdrželi bychom obdobu tzv. skupinové iterace.

II

V dalším budeme zkoumat podmínky, které musí splňovat počáteční aproximace $\mathbf{x}_0$, ϱ a $\mathbf{z}(\mathbf{x})$, aby posloupnost aproximací definovaná vztahem (3) a počínající bodem $\mathbf{x}_0$ konvergovala k řešení soustavy (1). Zvláštní pozornost věnujeme případu, že $\mathbf{x}_0$ je přesným řešením soustavy lineárních rovnic $\mathbf{Dx} + \mathbf{d} = \mathbf{o}$ (to je z praktického hlediska nejdůležitější případ).

Dokážeme napřed některé pomocné věty. Označme přitom $\mathbf{A} = (\mathbf{P} - \mathbf{Q})^{-1}\, \mathbf{Q}'$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (\partial f_i / \partial x_j(\mathbf{x}))$ a

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{q}_1), & \ldots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{q}_1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{q}_2), & \ldots, & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{q}_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{q}_n), & \ldots, & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{q}_n) \end{bmatrix},$$

kde $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n$ jsou libovolné body.

Lemma 1. *Je-li a řešení soustavy* (1), *platí*

(4) a) $x_{\nu+1} - a = A(x_\nu - a) - \varrho(P - Q)^{-1} F(p_{\nu-1,1}, \ldots, p_{\nu-1,n})(x_\nu - a)$,

kde

$$p_{\nu-1,k} = \xi_{\nu-1,k} x_{\nu-1} + (1 - \xi_{\nu-1,k})\, a\,, \quad 0 < \xi_{\nu-1,k} < 1,\ k = 1, \ldots, n\,;$$

(5) b) *pro* $\nu > \mu \geqq 0$ *je*

$$x_\nu - a = A^{\nu-\mu}(x_\mu - a) - \varrho \sum_{i=\mu}^{\nu-1} A^{\nu-i-1}(P - Q)^{-1} F(p_{i-1,1}, \ldots, p_{i-1,n})(x_i - a)\,,$$

kde

$$p_{i-1,k} = \xi_{i-1,k} x_{i-1} + (1 - \xi_{i-1,k})\, a\,, \quad 0 < \xi_{i-1,k} < 1\,,\ k = 1, \ldots, n\,.$$

Důkaz. a) Protože a je řešení soustavy (1), platí

$$(P - Q)\,a - Q'a + d + \varrho\, z(a) = o\,,$$

čili

$$-(P - Q)^{-1}(d + \varrho\, z(a)) = a - Aa\,. \tag{6}$$

Podle věty o přírůstku funkce platí zřejmě, že

$$z(x_\nu) = z(a) + F(p_{\nu-1,1}, \ldots, p_{\nu-1,n})(x_\nu - a)\,, \tag{7}$$

kde

$$p_{\nu-1,k} = \xi_{\nu-1,k} x_{\nu-1} + (1 - \xi_{\nu-1,k})\, a\,, \quad 0 < \xi_{\nu-1,k} < 1,\ k = 1, \ldots, n\,.$$

Z (3), (6) a (7) tedy plyne, že

$$\begin{aligned} x_{\nu+1} &= Ax_\nu - (P - Q)^{-1}(d + \varrho\, z(x_\nu)) = \\ &= Ax_\nu - (P - Q)^{-1}[d + \varrho\, z(a) + \varrho\, F(p_{\nu-1,1}, \ldots, p_{\nu-1,n})(x_\nu - a)] = \\ &= Ax_\nu - (P - Q)^{-1}(d + \varrho\, z(a)) - \varrho(P - Q)^{-1} F(p_{\nu-1,1}, \ldots, p_{\nu-1,n})(x_\nu - a) = \\ &= Ax_\nu + a - Aa - \varrho(P - Q)^{-1} F(p_{\nu-1,1}, \ldots, p_{\nu-1,n})(x_\nu - a)\,, \end{aligned}$$

což je (4).

b) Vztah (5) plyne indukcí přímo ze vztahu (4).

Lemma 2. *Platí*

(8) a) $x_{\nu+1} - x_\nu = A(x_\nu - x_{\nu-1}) - \varrho(P - Q)^{-1} F(p_{\nu-1,1}, \ldots, p_{\nu-1,n}) \,.\, (x_\nu - x_{\nu-1})$,

kde

$$p_{\nu-1,k} = \xi_{\nu-1,k} x_\nu + (1 - \xi_{\nu-1,k})\, x_{\nu-1}\,, \quad 0 < \xi_{\nu-1,k} < 1,\ k = 1, \ldots, n\,;$$

(9) b) *pro* $\nu > \mu \geqq 0$ *platí*

$$x_{\nu+1} - x_\nu = A^{\nu-\mu}(x_{\mu+1} - x_\mu) - \varrho \sum_{i=\mu+1}^{\nu} A^{\nu-i}(P - Q)^{-1} F(p_{i-1,1}, \ldots, p_{i-1,n}) \,.\, (x_i - x_{i-1})\,,$$

kde

$$\boldsymbol{p}_{i-1,k} = \xi_{i-1,k}\boldsymbol{x}_i + (1 - \xi_{i-1,k})\,\boldsymbol{x}_{i-1}\,, \quad 0 < \xi_{i-1,k} < 1, \; k = 1, \dots, n\,.$$

Důkaz. a) Z věty o přírůstku funkce plyne

$$\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_\nu) = \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_{\nu-1}) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}_{\nu-1,1}, \dots, \boldsymbol{p}_{\nu-1,n})\,(\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{x}_{\nu-1})\,, \tag{10}$$

kde

$$\boldsymbol{p}_{\nu-1,k} = \xi_{\nu-1,k}\boldsymbol{x}_\nu + (1 - \xi_{\nu-1,k})\,\boldsymbol{x}_{\nu-1}\,, \quad 0 < \xi_{\nu-1,k} < 1\,, \quad k = 1, \dots, n\,.$$

Protože z (3) dále plyne

$$-(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q})^{-1}\,(\boldsymbol{d} + \varrho\,\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_{\nu-1})) = \boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\nu-1}\,, \tag{11}$$

dostaneme z (3), (10), (11)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{\nu+1} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\nu - (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q})^{-1}\,(\boldsymbol{d} + \varrho\,\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_\nu)) = \\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\nu - (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q})^{-1}\,(\boldsymbol{d} + \varrho\,\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_{\nu-1})) - \varrho(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q})^{-1}\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}_{\nu-1,1}, \dots, \boldsymbol{p}_{\nu-1,n})\,. \\ &\quad .\,(\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{x}_{\nu-1}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_\nu + \boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{\nu-1} - \varrho(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q})^{-1}\,. \\ &\quad .\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}_{\nu-1,1}, \dots, \boldsymbol{p}_{\nu-1,n})\,(\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{x}_{\nu-1})\,, \end{aligned}$$

což je (8).

b) Vztah (9) plyne opět indukcí přímo ze vztahu (8).

Zaveďme nyní normu vztahy

$$\|\boldsymbol{x}\| = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|\,, \quad \|\boldsymbol{A}\| = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,,$$

kde $\boldsymbol{x} = (x_i)$, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$.

Lemma 3. *Buď $\boldsymbol{B}$ matice, jejíž vlastní čísla λ_i splňují nerovnost $\Lambda = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i| < 1$ a zvolme $\varepsilon > 0$ tak, že $q = \Lambda + \varepsilon < 1$. Buď $\boldsymbol{S}_\varepsilon$ regulární matice taková, že platí $\boldsymbol{S}_\varepsilon\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}_\varepsilon^{-1} = \boldsymbol{J}_\varepsilon$, přičemž $\boldsymbol{J}_\varepsilon$ je matice lišící se od kanonického Jordanova tvaru matice $\boldsymbol{B}$ jen tím, že místo jedniček nad diagonálou jsou všude čísla $\frac{1}{2}\varepsilon$. Označíme-li $K = \|\boldsymbol{S}_\varepsilon\|\;\|\boldsymbol{S}_\varepsilon^{-1}\|$, pak pro libovolné přirozené číslo ν platí nerovnost*

$$\|\boldsymbol{A}^\nu\| \leqq Kq^\nu\,. \tag{12}$$

Důkaz lemmatu 3 neprovádíme, neboť je přímým důsledkem obecnějšího lemmatu 2 v práci [4].

Zaveďme ještě tato označení:

a) $\mathrm{K}[\boldsymbol{z}, \mu]$ značí množinu bodů $\boldsymbol{x}$, pro něž je $\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}\| \leqq \frac{1}{2}\mu$;

b) $d_\nu = \|\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu\|$ (oprava ν-té aproximace);

c) $\delta_\nu = \|\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{a}\|$ (chyba ν-té aproximace).

Platí pak tato věta:

Věta 1. *Buď* $\mathbf{x}_0$ *bod,* λ *kladné číslo a* $\|(\mathbf{P} - \mathbf{Q})^{-1}\| = p$. *Pro všechna* $\mathbf{x} \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$ *nechť je* $\|\mathsf{F}(\mathbf{x})\| \leqq M$. *Je-li*

$$|\varrho|\, p\, M\left(1 + \frac{Kq}{1 - q}\right) < \frac{1}{2},$$

kde čísla K *a* q *příslušná matici* $\mathbf{A} = (\mathbf{P} - \mathbf{Q})^{-1}\, \mathbf{Q}'$ *jsou definována lemmatem 3, buď* ν_0 *přirozené číslo takové, že platí*

$$P = Kq^{\nu_0} + |\varrho|\, p\, M\left(1 + \frac{Kq}{1 - q}\right) < \frac{1}{2}. \tag{13}$$

Je-li

$$d_0 \leqq \min\left(\frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)}, \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)\,(Kq + |\varrho|\, pM)^{\nu_0 - 1}}\right), \tag{14}$$

potom posloupnost $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ *definovaná vztahem* (3) *konverguje k jistému bodu* $\mathbf{a} \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, *jež je jediným řešením soustavy* (1) *v* $\mathsf{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$. *Pro chybu platí následující odhady*:

(15) a) $\delta_\nu < P\delta_l$, *kde* $\delta_l = \max\limits_{i=\nu-1,\ldots,\nu-\nu_0} \delta_i$; b) *je-li* $k\nu_0 \leqq \nu \leqq (k + 1)\,\nu_0 - 1$, *pak*

$$\delta_\nu < P^k \delta_m\,, \quad \text{kde } \delta_m = \max_{i=0,\ldots,\nu_0-1} \delta_i\,; \tag{16}$$

$$\text{c) } \delta_\nu < \frac{P}{1 - P} \sum_{j=\nu-\nu_0}^{\nu-1} d_j\,. \tag{17}$$

Důkaz. Matice $\mathbf{A} = (\mathbf{P} - \mathbf{Q})^{-1}\, \mathbf{Q}'$ má podle lemmatu 3 a lemmatu 4 práce [2] vlastní čísla v absolutní hodnotě menší než 1. Můžeme tedy nalézti čísla K, q mající vlastnosti dané lemmatem 3.

I. Nejprve dokážeme indukcí, že $\mathbf{x}_i \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$ a

$$d_{i-1} \leqq \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)\,(Kq + |\varrho| pM)^{\nu_0 - i}}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, \nu_0$.

Pro $i = 1$ platí nerovnost $d_0 \leqq \lambda/[2(\nu_0 + 1)\,(Kq + |\varrho| pM)^{\nu_0 - 1}]$ podle předpokladu (14). Podle předpokladu (14) též platí

$$d_0 \leqq \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)} \leqq \frac{\lambda}{2}$$

a tedy $\mathbf{x}_1 \in \mathsf{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$.

Předpokládejme, že jsme již dokázali, že $\mathbf{x}_i \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$ a že platí

$$d_{i-1} \leqq \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)(Kq + |\varrho| pM)^{\nu_0 - i}} \tag{18}$$

pro $i = 1, 2, \ldots, \nu_0 - 1$. Potom je $\mathbf{p}_{i-1,k} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$, $i = 1, 2, \ldots, \nu_0 - 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$ a z (8) (lemma 2) plyne tedy nerovnost

$$d_i \leqq (Kq + |\varrho| pM)\, d_{i-1}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu_0 - 1\,. \tag{19}$$

Z (18) a (19) plyne pro $i = \nu_0 - 1$

(20)

$$d_{\nu_0 - 1} \leqq (Kq + |\varrho| pM)\, d_{\nu_0 - 2} \leqq (Kq + |\varrho| pM) \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)(Kq + |\varrho| pM)} = \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)}\,.$$

Nerovnost (18) tedy platí i pro $i = \nu_0$.

Je-li $Kq + |\varrho| pM \geqq 1$, je podle (18) a (20) $d_{i-1} \leqq \lambda/[2(\nu_0 + 1)]$ pro $i = 1, \ldots, \nu_0$, takže

$$\|\mathbf{x}_{\nu_0} - \mathbf{x}_0\| \leqq \|\mathbf{x}_{\nu_0} - \mathbf{x}_{\nu_0 - 1}\| + \|\mathbf{x}_{\nu_0 - 1} - \mathbf{x}_{\nu_0 - 2}\| + \ldots + \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| =$$
$$= d_{\nu_0 - 1} + d_{\nu_0 - 2} + \ldots + d_0 \leqq \nu_0 \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)} = \frac{\nu_0}{\nu_0 + 1} \frac{\lambda}{2} < \frac{\lambda}{2}$$

a tedy $\mathbf{x}_{\nu_0} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$. Je-li $Kq + |\varrho| pM < 1$, je podle (19) $d_i < d_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, \nu_0 - 1$, takže $d_{\nu_0 - 1} < d_{\nu_0 - 2} < \ldots < d_1 < d_0$ a tedy

$$\|\mathbf{x}_{\nu_0} - \mathbf{x}_0\| \leqq d_{\nu_0 - 1} + \ldots + d_0 < \nu_0 \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)} < \frac{\lambda}{2}\,.$$

Také v tomto případě je $\mathbf{x}_{\nu_0} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$. Tím je důkaz tvrzení proveden.

II. Nyní dokážeme úplnou indukcí, že $\mathbf{x}_\nu \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$ pro $\nu \geqq \nu_0 + 1$. Protože $\mathbf{x}_i \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, \lambda]$, $i = 1, \ldots, \nu_0$, platí podle (9) (kde položíme $\nu = \nu_0$, $\mu = 0$)

$$d_{\nu_0} \leqq [Kq^{\nu_0} + |\varrho| pM(1 + \sum_{i=1}^{\nu_0 - i} Kq^{\nu_0 - 1})]\, d_m < P d_m\,,$$

kde $d_m = \max\limits_{i=0,\ldots,\nu_0 - 1} d_i$. Je však

$$\|\mathbf{x}_{\nu_0 + 1} - \mathbf{x}_0\| \leqq \|\mathbf{x}_{\nu_0 + 1} - \mathbf{x}_{\nu_0}\| + \|\mathbf{x}_{\nu_0} - \mathbf{x}_0\| < P d_m + \frac{\lambda}{2} < \lambda\,,$$

neboť $P < \frac{1}{2}$ a $d_m \leqq \lambda$, takže $\mathbf{x}_{\nu_0 + 1} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$.

Předpokládejme nyní, že $\mathbf{x}_{\nu_0 + 2}, \ldots, \mathbf{x}_\nu \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$. Podle (9) je zřejmě

$$d_\nu < P d_{l_1}\,, \quad \text{kde} \quad d_{l_1} = \max_{i = \nu - 1, \ldots, \nu - \nu_0} d_i\,,$$
$$d_{l_1} < P d_{l_2}\,, \quad \text{kde} \quad d_{l_2} = \max_{i = l_1 - 1, \ldots, l_1 - \nu_0} d_i\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d_{l_s} < P d_m\,, \quad \text{kde} \quad d_m = \max_{i = 0, \ldots, \nu_0 - 1} d_i\,.$$

Je tedy

$$d_\nu < Pd_{l_1} < P^2 d_{l_2} < \ldots < P^s d_{l_s} < P^{s+1} d_m .$$

Přitom je zřejmo, že je-li $k\nu_0 \leqq \nu \leqq (k+1)\nu_0 - 1$, pak $s + 1 \geqq k$ a tedy

(21) $$d_\nu < P^{s+1} d_m \leqq P^k d_m .$$

Odtud plyne

$$\|\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_0\| \leqq \|\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu\| + \|\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{x}_{\nu-1}\| + \ldots + \|\boldsymbol{x}_{\nu_0+1} - \boldsymbol{x}_{\nu_0}\| +$$
$$+ \|\boldsymbol{x}_{\nu_0} - \boldsymbol{x}_0\| < \nu_0 P^k d_m + \nu_0 P^{k-1} d_m + \ldots + \nu_0 P d_m + \frac{\lambda}{2} =$$
$$= \nu_0 d_m \sum_{i=1}^{k} P^i + \frac{\lambda}{2} < \nu_0 d_m + \frac{\lambda}{2} < \nu_0 \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)} + \frac{\lambda}{2} < \lambda .$$

Je tedy $\boldsymbol{x}_{\nu+1} \in \mathrm{K}[\boldsymbol{x}_0, 2\lambda]$, takže $\boldsymbol{x}_\nu \in \mathrm{K}[\boldsymbol{x}_0, 2\lambda]$, $\nu \geqq \nu_0 + 1$, což jsme měli dokázat.

III. Dokážeme, že posloupnost $\{\boldsymbol{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ konverguje. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$ a přirozené číslo k takové, že $2\nu_0 d_m P^k \leqq \varepsilon$. Dokážeme, že pro libovolná čísla ν, μ pro která platí $\nu \geqq k\nu_0$, $\mu \geqq k\nu_0$ platí $\|\boldsymbol{x}_\mu - \boldsymbol{x}_\nu\| \leqq \varepsilon$. Buď např. $\mu > \nu$ a l, r buďte přirozená čísla, pro která $l\nu_0 \leqq \nu \leqq (l+1)\nu_0 - 1$, $r\nu_0 \leqq \mu \leqq (r+1)\nu_0 - 1$. Pak platí podle (21)

$$\|\boldsymbol{x}_\mu - \boldsymbol{x}_\nu\| \leqq \|\boldsymbol{x}_\mu - \boldsymbol{x}_{\mu-1}\| + \|\boldsymbol{x}_{\mu-1} - \boldsymbol{x}_{\mu-2}\| + \ldots + \|\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu\| <$$
$$< \nu_0 P^r d_m + \nu_0 P^{r-1} d_m + \ldots + \nu_0 P^l d_m = \nu_0 d_m P^l (1 + P + \ldots + P^{r-l}) <$$
$$< 2\nu_0 d_m P^l \leqq 2\nu_0 d_m P^k \leqq \varepsilon .$$

Posloupnost $\{\boldsymbol{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ je tedy cauchyovská. Protože $\mathrm{K}[\boldsymbol{x}_0, 2\lambda]$ je uzavřená, omezená množina, $\boldsymbol{x}_\nu \in \mathrm{K}[\boldsymbol{x}_0, 2\lambda]$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, existuje $\boldsymbol{a} \in \mathrm{K}[\boldsymbol{x}_0, 2\lambda]$, že posloupnost $\{\boldsymbol{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ konverguje a je $\lim_{\nu\to\infty} \boldsymbol{x}_\nu = \boldsymbol{a}$.

IV. O bodu $\boldsymbol{a}$ nyní dokážeme, že je řešením soustavy (1). Z (3) postupně plyne

$$(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{x}_{\nu+1} = \boldsymbol{Q}'\boldsymbol{x}_\nu = -\,\boldsymbol{d} - \varrho\,\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_\nu),$$
$$(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{x}_{\nu+1} - (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{x}_\nu + (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{Q}'\boldsymbol{x}_\nu = -\,\boldsymbol{d} - \varrho\,\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_\nu),$$

(22) $$(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q})(\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu) = -\,(\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}_\nu + \boldsymbol{d} + \varrho\,\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_\nu)),$$

(23) $$\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu = -\,(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q})^{-1}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}_\nu + \boldsymbol{d} + \varrho\,\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_\nu)).$$

Podle (21) je tedy

(24) $$\|\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}_\nu + \boldsymbol{d} + \varrho\,\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_\nu)\| \leqq \|\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}\|\,\|\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu\| .$$

V důsledku spojitosti funkcí f_i, $i = 1, \ldots, n$ a (24) je tedy

$$\|\boldsymbol{D}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} + \varrho\,\boldsymbol{z}(\boldsymbol{a})\| = \lim_{\nu\to\infty} \|\boldsymbol{D}\boldsymbol{x}_\nu + \boldsymbol{d} + \varrho\,\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_\nu)\| = 0 ,$$

čili $\boldsymbol{D}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} + \varrho\,\boldsymbol{z}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$. Bod $\boldsymbol{a}$ je tedy řešením soustavy (1).

V. Odhady pro chybu (15) a (16) plynou z lemmatu 1. Z (5) zřejmě plyne

$$
\begin{aligned}
(15) \qquad & \delta_\nu < P\delta_{l_1}, \quad \text{kde} \quad \delta_{l_1} = \max_{i=\nu-1,\ldots,\nu-\nu_0} \delta_i, \\
& \delta_{l_1} < P\delta_{l_2}, \quad \text{kde} \quad \delta_{l_2} = \max_{i=l_1-1,\ldots,l_1-\nu_0} \delta_i, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \delta_{l_s} < P\delta_m, \quad \text{kde} \quad \delta_m = \max_{i=0,\ldots,\nu_0-1} \delta_i.
\end{aligned}
$$

Je tedy

$$\delta_\nu < P\delta_{l_1} < P^2\delta_{l_2} < \ldots < P^s\delta_{l_s} < P^{s+1}\delta_m.$$

Je-li $k\nu_0 \leqq \nu \leqq (k+1)\nu_0 - 1$, pak $s + 1 \geqq k$ a platí nerovnost obdobná nerovnosti (21):

$$\delta_\nu < P^{s+1}\delta_m \leqq P^k\delta_m,$$

což je odhad (16). Odhad (17) plyne z (15) a z trojúhelníkové nerovnosti. Pro δ_i, kde $i = \nu - 1, \ldots, \nu - \nu_0$ zřejmě platí

$$\delta_i \leqq \delta_\nu + \sum_{j=i}^{\nu-1} d_j \leqq \delta_\nu + \sum_{j=\nu-\nu_0}^{\nu-1} d_j$$

a protože je $\delta_l = \max_{i=\nu-1,\ldots,\nu-\nu_0} \delta_i$, je

$$\delta_l \leqq \delta_\nu + \sum_{j=\nu-\nu_0}^{\nu-1} d_j. \tag{24}$$

Z (15) a (24) tedy postupně plyne

$$\delta_\nu < P\delta_\nu + P\sum_{j=\nu-\nu_0}^{\nu-1} d_j, \quad \delta_\nu < \frac{P}{1-P}\sum_{j=\nu-\nu_0}^{\nu-1} d_j,$$

což je odhad (17).

VI. Dokážeme, že $\boldsymbol{a}$ je jediným řešením v $K[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$. Kdyby $\boldsymbol{a}' \neq \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}' \in K[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$ bylo řešení, platilo by zřejmě $\delta'_{k\nu_0} = \|\mathbf{x}_{k\nu_0} - \boldsymbol{a}'\| < P^k\delta'_m$, kde $\delta'_m = \max_{i=0,\ldots,\nu_0-1} \delta'_i$ a tedy vybraná posloupnost $\{\mathbf{x}_{k\nu_0}\}_{k=0}^{\infty}$ by konvergovala k $\boldsymbol{a}'$, což je spor. Tím je věta 1 úplně dokázána.

Poznámka 2. Podmínka (14) vyžaduje výpočet čísla d_0, tj. výpočet další aproximace $\mathbf{x}_1$. Podle (23) je však pro $\nu = 0$

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = -(\mathbf{P} - \mathbf{Q})^{-1}(\mathbf{D}\mathbf{x}_0 + \mathbf{d} + \varrho\,\mathbf{z}(\mathbf{x}_0)). \tag{25}$$

Z (25) plyne, že $d_0 \leqq p\|\mathbf{D}\mathbf{x}_0 + \mathbf{d} + \varrho\,\mathbf{z}(\mathbf{x}_0)\|$. Označíme-li $\mathbf{l}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{d} + \varrho\,\mathbf{z}(\mathbf{x})$, pak podmínku (14) lze zřejmě nahradit podmínkou

$$\|\mathbf{l}(\mathbf{x}_0)\| \leqq \frac{1}{p}\min\left(\frac{\lambda}{2(\nu_0+1)}, \frac{\lambda}{2(\nu_0+1)(Kq + |\varrho|pM)^{\nu_0-1}}\right), \tag{26}$$

která je sice poněkud silnější, ale nevyžaduje výpočet další aproximace $\boldsymbol{x}_1$. V případě, že aproximace $\boldsymbol{x}_0$ je řešením příslušné soustavy lineárních rovnic $\boldsymbol{Dx} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{o}$, je $\boldsymbol{Dx}_0 + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{o}$, takže podmínka (26) se redukuje na podmínku

$$(27) \qquad |\varrho| \, \|\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_0)\| \leqq \frac{1}{p} \min \left(\frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)}, \frac{\lambda}{2(\nu_0 + 1)(Kq + |\varrho| pM)^{\nu_0 - 1}} \right).$$

III

Všimněme si nyní zvláště případu, kdy positivně definitní symetrická matice $\boldsymbol{D}$ splňuje podmínku

$$d_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |d_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n$$

a matice $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ jsou definovány jako v poznámce 1. Ukážeme, že podmínky konvergence jsou pak jednodušší. Nejprve dokážeme pomocnou větu.

Lemma 4. *Platí*

$$(28) \quad \text{a)} \ \boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{Q}'(\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{a}) - \varrho \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}_{\nu,1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\nu,n}) \, . \, (\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{a}),$$

kde

$$\boldsymbol{p}_{\nu,k} = \xi_{\nu,k} \boldsymbol{x}_\nu + (1 - \xi_{\nu,k}) \boldsymbol{a}, \quad 0 < \xi_{\nu,k} < 1, \quad k = 1, \ldots, n;$$

$$(29) \quad \text{b)} \ \boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu = \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu) + \boldsymbol{P}^{-1} \boldsymbol{Q}'(\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{x}_{\nu-1}) - \varrho \boldsymbol{P}^{-1} \, . \, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}_{\nu-1,1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\nu-1,n}) (\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{x}_{\nu-1}),$$

kde

$$\boldsymbol{p}_{\nu-1,k} = \xi_{\nu-1,k} \boldsymbol{x}_\nu + (1 - \xi_{\nu-1,k}) \boldsymbol{x}_{\nu-1}, \quad 0 < \xi_{\nu-1,k} < 1, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Důkaz. a) Z (3) plyne

$$(30) \qquad \boldsymbol{Px}_{\nu+1} - \boldsymbol{Qx}_{\nu+1} = \boldsymbol{Q}'\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{d} - \varrho \, \boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_\nu).$$

V důsledku (7) plyne z (30)

$$(31) \quad \boldsymbol{Px}_{\nu+1} = \boldsymbol{Qx}_{\nu+1} + \boldsymbol{Q}'\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{d} - \varrho \, \boldsymbol{z}(\boldsymbol{a}) - \varrho \, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}_{\nu,1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\nu,n}) (\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{a}).$$

Podle (1) je však

$$(32) \qquad (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}) \boldsymbol{a} - \boldsymbol{Q}'\boldsymbol{a} = - \boldsymbol{d} - \varrho \, \boldsymbol{z}(\boldsymbol{a}).$$

Z (31) a (32) tedy plyne

$$\boldsymbol{Px}_{\nu+1} = \boldsymbol{Qx}_{\nu+1} + \boldsymbol{Q}'\boldsymbol{x}_\nu + (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q}) \boldsymbol{a} - \boldsymbol{Q}'\boldsymbol{a} - \varrho \, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}_{\nu,1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\nu,n}) (\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{a})$$

čili

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{Q}'(\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{a}) - \varrho \, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}_{\nu,1}, \ldots, \boldsymbol{p}_{\nu,n}) (\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{a}),$$

což je (28).

b) Z (3) plyne

$$(P - Q)\, x_{\nu+1} = Q' x_\nu - d - \varrho\, z(x_\nu)\,. \tag{33}$$

V důsledku (10) plyne ze (33)

$$(P - Q)\, x_{\nu+1} = Q' x_\nu - d - \varrho\, z(x_{\nu-1}) - \varrho\, F(p_{\nu-1,1}, \ldots, p_{\nu-1,n})\,(x_\nu - x_{\nu-1})\,.$$

Podle (3) je však

$$- d - \varrho\, z(x_{\nu-1}) = (P - Q)\, x_\nu - Q' x_{\nu-1}$$

a tedy

$$(P - Q)\, x_{\nu+1} = Q' x_\nu + (P - Q)\, x_\nu - Q' x_{\nu-1} - \varrho\, F(p_{\nu-1,1}, \ldots, p_{\nu-1,n})\,.\,(x_\nu - x_{\nu-1})\,,$$

$$P(x_{\nu+1} - x_\nu) = Q(x_{\nu+1} - x_\nu) + Q'(x_\nu - x_{\nu-1}) - \varrho\, F(p_{\nu-1,1}, \ldots, p_{\nu-1,n})\,.\,(x_\nu - x_{\nu-1})\,,$$

což je (29).

Věta 2. *Buď* $0 < m \leqq d_{ii}$, $i = 1, \ldots, n$ *a*

$$q_{11} = 0\,, \qquad \frac{1}{d_{11}} \sum_{j=2}^{n} |d_{1j}| = q_{1,2}\,, \tag{34}$$

$$\frac{1}{d_{ii}} \sum_{j=1}^{i-1} |d_{ij}| = q_{i,1}\,, \quad \frac{1}{d_{ii}} \sum_{j=i+1}^{n} |d_{ij}| = q_{i,2}\,, \quad i = 2, \ldots, n-1\,,$$

$$\frac{1}{d_{nn}} \sum_{j=1}^{n-1} |d_{nj}| = q_{n,1}\,, \quad q_{n,2} = 0\,,$$

přičemž platí $q_{i,1} + q_{i,2} < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. *Buď dále* x_0 *bod a* λ *kladné číslo. Pro libovolné* $x \in K[x_0, 2\lambda]$ *nechť platí nerovnost* $\|F(x)\| \leqq M$ *a nechť*

$$Q = \max_{i=1,\ldots,n} \frac{q_{i,2} + \dfrac{|\varrho| M}{m}}{1 - q_{i,1}} < 1\,,$$

$$\frac{d_0}{1 - Q} \leqq \lambda\,. \tag{35}$$

Potom existuje bod $a \in K[x_0, 2\lambda]$ *takový, že posloupnost* $\{x_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ *definovaná vztahem* (3) (*matice* P, Q *jsou přitom definovány v poznámce* 1) *konverguje a je* $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = a$. *Bod* a *je pak jediným řešením soustavy* (1) *v* $K[x_0, 2\lambda]$. *Pro chybu pak platí odhady*

$$\delta_{\nu+1} \leqq Q \delta_\nu\,, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots\,; \tag{36}$$

$$\delta_\nu \leqq \frac{1}{1 - Q}\, d_\nu\,, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots\,; \tag{37}$$

$$\delta_\nu \leqq \frac{Q}{1 - Q}\, d_{\nu-1}\,, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots\,. \tag{38}$$

Důkaz. I. Dokážeme úplnou indukcí, že $d_{\nu+1} \leqq Q d_\nu$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ Protože $d_0 < d_0/(1 - Q) \leqq \lambda$, je $\boldsymbol{x}_1 \in \mathsf{K}[\boldsymbol{x}_0, 2\lambda]$, $\boldsymbol{p}_{0,k} \in \mathsf{K}[\boldsymbol{x}_0, 2\lambda]$, $k = 1, \ldots, n$. Podle (29) (lemma 4) pak platí

$$|x_{2,i} - x_{1,i}| \leqq q_{i,1}\|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1\| + q_{i,2}\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\| + \frac{|\varrho|M}{m}\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\|$$

pro každé $i = 1, \ldots, n$. Buď i_0 to přirozené číslo, pro které je $|x_{2,i_0} - x_{1,i_0}| = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_{2,i} - x_{1,i}|$. Potom je

$$d_1 \leqq q_{i_0,1} d_1 + \left(q_{i_0,2} + \frac{|\varrho|M}{m}\right) d_0$$

a tedy

$$d_1 \leqq \frac{q_{i_0,2} + \dfrac{|\varrho|M}{m}}{1 - q_{i_0,1}} d_0 \leqq Q d_0 .$$

Předpokládejme nyní, že $d_i \leqq Q d_{i-1}$, $i = 1, \ldots, \nu$. Je tedy $\boldsymbol{x}_{i+1} \in \mathsf{K}[\boldsymbol{x}_0, 2\lambda]$, $\boldsymbol{p}_{i,k} \in \mathsf{K}[\boldsymbol{x}_0, 2\lambda]$, $i = 1, \ldots, \nu$, $k = 1, \ldots, n$, neboť

$$\|\boldsymbol{x}_{i+1} - \boldsymbol{x}_0\| \leqq \|\boldsymbol{x}_{i+1} - \boldsymbol{x}_i\| + \|\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_{i-1}\| + \ldots + \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\| \leqq$$
$$\leqq Q^i d_0 + \ldots + Q d_0 + d_0 < \frac{d_0}{1 - Q} \leqq \lambda .$$

Podle (29) (lemma 4) je tedy

$$d_{\nu+1} \leqq Q d_\nu . \tag{39}$$

Nerovnost (39) tedy platí pro všechna $\nu = 0, 1, 2, \ldots$. Z (39) plyne

$$\|\boldsymbol{x}_{\nu+2} - \boldsymbol{x}_0\| \leqq \|\boldsymbol{x}_{\nu+2} - \boldsymbol{x}_{\nu+1}\| + \|\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu\| + \ldots + \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0\| =$$
$$= d_{\nu+1} + d_\nu + \ldots + d_0 \leqq Q^{\nu+1} d_0 + Q^\nu d_0 + \ldots + d_0 < \frac{d_0}{1 - Q} \leqq \lambda .$$

Tím jsme dokázali, že je $\boldsymbol{x}_\nu \in \mathsf{K}[\boldsymbol{x}_0, 2\lambda]$ pro $\nu = 1, 2, \ldots$.

II. Protože množina $\mathsf{K}[\boldsymbol{x}_0, 2\lambda]$ je uzavřená a omezená, existuje bod $\boldsymbol{a} \in \mathsf{K}[\boldsymbol{x}_0, 2\lambda]$, jež je hromadným bodem posloupnosti $\{\boldsymbol{x}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$. Protože je $d_{\nu+1} \leqq Q d_\nu$, je $\lim\limits_{\nu\to\infty} d_\nu = 0$ a tedy k libovolně zvolenému číslu $\varepsilon > 0$ existuje ν_0 tak, že $d_{\nu_0}/(1 - Q) \leqq \varepsilon$. Dokážeme, že pro libovolné $\nu \geqq \nu_0$, $\mu \geqq \nu_0$, $\mu > \nu$, platí $\|\boldsymbol{x}_\mu - \boldsymbol{x}_\nu\| \leqq \varepsilon$. Je totiž

$$\|\boldsymbol{x}_\mu - \boldsymbol{x}_\nu\| \leqq \|\boldsymbol{x}_\mu - \boldsymbol{x}_{\mu-1}\| + \|\boldsymbol{x}_{\mu-1} - \boldsymbol{x}_{\mu-2}\| + \ldots + \|\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{x}_\nu\| \leqq$$
$$\leqq Q^{\mu-\nu-1} d_\nu + Q^{\mu-\nu-2} d_\nu + \ldots + d_\nu < \frac{d_\nu}{1 - Q} \leqq \varepsilon .$$

Posloupnost $\{\boldsymbol{x}_\nu\}_{\nu=0}^\infty$ je tedy cauchyovská a protože $\boldsymbol{a}$ je jejím hromadným bodem, je $\lim\limits_{\nu\to\infty} \boldsymbol{x}_\nu = \boldsymbol{a}$.

Stejným způsobem, jako v části IV důkazu věty 1 se dokáže, že bod $\boldsymbol{a}$ je řešením soustavy (1).

III. Protože $\boldsymbol{x}_\nu \in K[\boldsymbol{x}_0, 2\lambda]$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots$, plyne z (28) (lemma 4), že

$$|x_{\nu+1,i} - a_i| \leqq q_{i,1}\|\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{a}\| + q_{i,2}\|\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{a}\| + \frac{|\varrho|M}{m}\|\boldsymbol{x}_\nu - \boldsymbol{a}\|.$$

Je-li pro i_0 $|x_{\nu+1,i_0} - a_{i_0}| = \max_{i=1,\ldots,n} |x_{\nu+1,i} - a_i|$, platí

$$\delta_{\nu+1} \leqq q_{i_0,1}\delta_{\nu+1} + q_{i_0,2}\delta_\nu + \frac{|\varrho|M}{m}\delta_\nu, \quad \delta_{\nu+1} \leqq \frac{q_{i_0,2} + \frac{|\varrho|M}{m}}{1 - q_{i_0,1}}\delta_\nu \leqq Q\delta_\nu,$$

což je odhad (36). Z trojúhelníkové nerovnosti a z (36) plyne

$$\delta_\nu \leqq \delta_{\nu+1} + d_\nu \leqq Q\delta_\nu + d_\nu$$

čili

$$\delta_\nu(1 - Q) \leqq d_\nu, \quad \delta_\nu \leqq \frac{1}{1 - Q} d_\nu,$$

což je odhad (37). Podle (37) a (39) dále plyne

$$\delta_\nu \leqq \frac{Q}{1 - Q} d_{\nu-1},$$

což je odhad (38).

IV. Kdyby v $K[\boldsymbol{x}_0, 2\lambda]$ existovalo řešení $\boldsymbol{a}' \neq \boldsymbol{a}$, stejně jako v části III bychom dokázali, že $\delta'_{\nu+1} = \|\boldsymbol{x}_{\nu+1} - \boldsymbol{a}'\| \leqq Q\delta'_\nu$, čili $\lim_{\nu\to\infty} \boldsymbol{x}_\nu = \boldsymbol{a}'$, což je spor.

Poznámka 3. Volíme-li za počáteční aproximaci $\boldsymbol{x}_0$ přesné řešení soustavy lineárních rovnic $\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d} = \boldsymbol{o}$, a označíme-li $\|(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q})^{-1}\| = p$, můžeme podmínku (35) opět nahradit (viz poznámku 2) silnější podmínkou

$$\frac{p|\varrho|\,\|\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_0)\|}{1 - Q} \leqq \lambda \tag{40}$$

nevyžadující však již výpočet aproximace $\boldsymbol{x}_1$.

IV

Vhodnost metody si ověříme na numerickém příkladě.

Příklad. Řešme soustavu rovnic

$$6x + y - 2z + \frac{x^2y^2}{50} = 0,$$

$$x + 5y - 3z + 1 - \frac{xz}{60} = 0,$$

$$-2x - 3y + 7z - 20 + \frac{y^2z}{100} = 0.$$

Matice

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 6, & 1, & -2 \\ 1, & 5, & -3 \\ -2, & -3, & 7 \end{pmatrix}$$

je symetrická a positivně definitní. Za počáteční aproximaci $\mathbf{x}_0$ zvolíme řešení soustavy lineárních rovnic

$$6x + y - 2z = 0\,, \quad x + 5y - 3z + 1 = 0\,, \quad -2x - 3y + 7z - 20 = 0\,,$$

které je $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 4$ a budeme postupovat podle poznámky 1. Zvolme $\lambda = 0{,}5$, $\varrho = 1$ a ověřme, zda jsou splněny předpoklady věty 2. Zřejmě je $m = 5$. Dále je $q_{1,1} = 0$, $q_{1,2} = \frac{1}{2}$, $q_{2,1} = \frac{1}{5}$, $q_{2,2} = \frac{3}{5}$, $q_{3,1} = \frac{5}{7}$, $q_{3,2} = 0$ a podmínka $q_{i,1} + q_{i,2} < 1$, $i = 1, 2, 3$ je splněna. Snadno se dále zjistí, že $p = \frac{55}{210} \doteq 0{,}262$, $M = 0{,}6$, $Q \doteq 0{,}9 < 1$, $\|\mathbf{z}(\mathbf{x}_0)\| = 0{,}16$ a platí přitom

$$\frac{p|\varrho|\,\|\mathbf{z}(\mathbf{x}_0)\|}{1 - Q} \doteq 0{,}42 < 0{,}5 = \lambda\,.$$

Předpoklady věty 2 jsou tedy splněny, takže řešení leží v intervalu $0{,}5 \leqq x \leqq 1{,}5$, $1{,}5 \leqq y \leqq 2{,}5$, $3{,}5 \leqq z \leqq 4{,}5$.

Postupné aproximace počítáme pak podle vzorců

$$x_{\nu+1} = -\frac{1}{6}\,y_\nu + \frac{1}{3}\,z_\nu - \frac{1}{6}\,\frac{x_\nu^2 y_\nu^2}{50}\,,$$

$$y_{\nu+1} = -\frac{1}{5}\,x_{\nu+1} + \frac{3}{5}\,z_\nu - \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\,\frac{x_\nu z_\nu}{60}\,,$$

$$z_{\nu+1} = \frac{2}{7}\,x_{\nu+1} + \frac{3}{7}\,y_{\nu+1} + \frac{20}{7} - \frac{1}{7}\,\frac{y_\nu^2 z_\nu}{100}\,.$$

TABULKA

ν	x_ν	y_ν	z_ν	d_ν	δ_ν odhad (37)	δ_ν odhad (38)
0	1	2	4	0,019 8096	0,198 0960	
1	0,986 6667	2,016 0000	3,980 1904	0,010 3037	0,103 0370	0,178 2864
2	0,977 5414	2,005 6963	3,972 9152	0,004 4433	0,044 4330	0,092 7333
3	0,977 2086	2,001 2530	3,971 1932	0,001 0896	0,010 8960	0,039 9897
4	0,977 4405	2,000 1634	3,970 9034	0,000 1904	0,001 9040	0,009 8064
5	0,977 5333	1,999 9730	3,970 8746	0,000 0221	0,000 2210	0,001 7136
6	0,977 5554	1,999 9526	3,970 8767	0,000 0038	0,000 0380	0,000 1989
7	0,977 5592	1,999 9534	3,970 8786	0,000 0010	0,000 0100	0,000 0342
8	0,977 5596	1,999 9544	3,970 8790			0,000 0090

Pro orientaci uvádíme prvních 8 aproximací v tabulce. Ve čtvrtém sloupci jsou uvedeny hodnoty d_ν, v pátém sloupci odhady pro δ_ν vypočtené podle (37) a v šestém sloupci odhady pro δ_ν vypočtené podle (38). V našem případě je

$$\delta_\nu \leqq 10 d_\nu\,, \tag{37}$$

$$\delta_\nu \leqq 9 d_{\nu-1}\,. \tag{38}$$

Literatura

[1] *A. M. Ostrowski*: Solution of Equations and Systems of Equations. Academic Press, New York and London 1960.

[2] *M. Šisler*: O jedné iterační metodě řešení soustav nelineárních rovnic I. Čas. pro pěst. mat., *86*, 1961, 439–461.

[3] *M. Šisler*: O jedné iterační metodě řešení soustav nelineárních rovnic II. Čas. pro pěst. mat., *87*, 1962, 81–93.

[4] *M. Šisler*: O řešení soustav nelineárních rovnic, Čas. pro pěst. mat., *88*, 1963.

Резюме

ОБ ОДНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ПРИБЛИЗИТЕЛЬНО ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

МИРОСЛАВ ШИСЛЕР (Miroslav Šisler), Прага

В работе доказываются некоторые достаточные условия для сходимости одного итерационного метода для вычисления действительного решения системы n уравнений с n неизвестными. Об уравнениях предполагаем, что они в сущности линейные, но они имеют нелинейный член, малый в окрестности решения сответствующей системы линейных уравнений.

Пусть задана система (1), где $\boldsymbol{D}$ — действительная матрица порядка n, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d}$ — действительные векторы-столбцы с координатами x_i, d_i, $i = 1, \ldots, n$ и $\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x})$ вектор-столбец с координатами $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)$, где $f_1, \ldots, \ldots, f_n$ — действительные функции n действительных переменных, имеющие непрерывные первые частные производные в окрестности действительного решения системы (1), и ϱ — известная постоянна. Пусть, далее, матрица $\boldsymbol{D}$ симметрическая и положительно определенная (если $\boldsymbol{D}$ несимметрична, то можем взять эквивалентную систему $\boldsymbol{D}'\boldsymbol{D}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}'\boldsymbol{d} + \varrho\boldsymbol{D}'\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$, где $\boldsymbol{D}'$ — транспонированная матрица; матрица $\boldsymbol{D}'\boldsymbol{D}$ — симметрическая и положительно определенная). Матрицу $\boldsymbol{D}$ напишим в виде $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q} - \boldsymbol{Q}'$, где $\boldsymbol{P}$ — положительно определенная, симметрическая матрица. $(\nu + 1)$-ая аппроксимация при исследованном методе определяется формулой

$$\boldsymbol{x}_{\nu+1} = (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q})^{-1}\,\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{x}_\nu - (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{Q})^{-1}(\boldsymbol{d} + \varrho\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x}_\nu))\,.$$

Из этого определения вытекает, что если мы положим $\mathbf{D} = (d_{ij})$, $\mathbf{P} = (p_{ij})$, $\mathbf{Q} = (q_{ij})$ и $p_{ii} = d_{ii}$ $(i = 1, \dots, n)$, $p_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, $q_{ij} = -d_{ij}$ $(i > j)$, $q_{ij} = 0$ $(i \leqq j)$, то исследованный итерационный метод является в сущности методом Гаусса-Зейделя, но вектор $\mathbf{d} + \varrho \mathbf{z}(\mathbf{x})$ не является здесь постоянным. При практическом вычислении мы, следовательно, можем применить схему $(3')$.

Введем теперь следующие обозначения: $\|\mathbf{x}\| = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$, $\|\mathbf{A}\| = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$, $\mathrm{K}[\mathbf{z}, \mu]$ — множество точек, для которых $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \leqq \frac{1}{2}\mu$. Главным результатом работы является теорема 1:

Пусть $\mathbf{x}_0$ *— точка,* λ *— положительное число и* $\|(\mathbf{P}-\mathbf{Q})^{-1}\| = p$. *Для всех* $\mathbf{x} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$ *пусть* $\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\| \leqq M$ $(\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (\partial f_i/\partial x_j(\mathbf{x}))$. *Возьмем теперь числа* K, q, $0 < K$, $0 < q < 1$ *(числа* K, q *определяет лемма 3), для которых имеет место неравенство* (12). *Если для натурального числа* ν_0 *имеют место неравенства* (13) *и* (14), *то последовательность* $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ *сходится к известной точке* $\mathbf{a} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$, *которая является тогда единственным решением системы* (1) *в* $\mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$. *Для погрешности найдены оценки* (15), (16), (17) *(здесь* $\delta_\nu = \|\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}\|$, $d_\nu = \|\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu\|$).

Неравенство (14) в теореме 1 можно, очевидно, заменить неравенством (26), где $\mathbf{l}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{d} + \varrho \mathbf{z}(\mathbf{x})$. Если начальная аппроксимация $\mathbf{x}_0$ является решением системы линейных уравнений $\mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{d} = \mathbf{o}$, то условие (26) сводится к условию (27).

В абзаце III исследуется один частный случай, когда имеет место неравенство $d_{ii} > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |d_{ij}|$, $i = 1, \dots, n$ и матрицы $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ определены выше описанным способом: $p_{ii} = d_{ii}$ $(i = 1, \dots, n)$, $p_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, $q_{ij} = -d_{ij}$ $(i > j)$, $q_{ij} = 0$ $(i \leqq j)$. Тогда имеет место теорема 2:

Пусть $0 < m \leqq d_{ii}$, $i = 1, \dots, n$ *и пусть имеют место неравенства* (34), *где* $q_{i,1} + q_{i,2} < 1$, $i = 1, \dots, n$. *Пусть, далее,* $\mathbf{x}_0$ *— точка и* λ *— положительное число. Для любого* $\mathbf{x} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$ *пусть имеют место неравенства* $\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\| \leqq M$,

$$Q = \max_{i=1,\dots,n} \frac{q_{i,2} + \dfrac{|\varrho|\, M}{m}}{1 - q_{i,1}} < 1\,, \quad \frac{d_0}{1 - Q} \leqq \lambda\,.$$

Тогда существует точка $\mathbf{a} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}, 2\lambda]$ *так, что* $\lim_{\nu \to \infty} \mathbf{x}_\nu = \mathbf{a}$. *Точка* $\mathbf{a}$ *является единственнмы решением системы* (1) *в* $\mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$. *Для погрешности найдены оценки* (36), (37), (38).

В абзаце IV показана вычислительная эффективность метода на численном примере.

Zusammenfassung

ÜBER EIN ITERATIONSVERFAHREN FÜR DIE LÖSUNG DER SYSTEME APPROXIMATIV LINEARER GLEICHUNGEN

MIROSLAV ŠISLER, Praha

In der Arbeit sind hinreichende Bedingungen für die Konvergenz eines Iterationsverfahrens für die Berechnung der reellen Lösung des Systems von n Gleichungen mit n Unbekannten bewiesen.

Wir setzen voraus, das die Gleichungen im wessentlichen linear sind, d. h. dass sie ein nichtlineares, in der Umgebung der Lösung des zugehörigen Systems der linearen Gleichungen genügend kleines Glied enthalten.

Sei das System (1) gebeben. $\mathbf{D}$ ist hier eine reelle Matrix der Ordnung n, $\mathbf{x}$, $\mathbf{d}$ sind reelle Spaltenvektoren mit den Koordinaten x_i, d_i, $i = 1, \ldots, n$ und $\mathbf{z}(\mathbf{x})$ ist der Spaltenvektor mit den Koordinaten $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)$, wo $f_1, \ldots, f_n$ reelle Funktionen mit n reellen Veränderlichen sind, die in der Umgebung einer gewissen reellen Lösung $\mathbf{a}$ des Systems (1) stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Dabei ist ϱ eine Konstante. Ferner sei die Matrix $\mathbf{D}$ symmetrisch und positiv definit (falls $\mathbf{D}$ nichtsymmetrisch ist, können wir das ekvivalente System $\mathbf{D}'\mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{D}'\mathbf{d} + \varrho\mathbf{D}'\,\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$ betrachten, wo $\mathbf{D}'$ die transponierte Matrix bezeichnet; die Matrix $\mathbf{D}'\mathbf{D}$ ist dann symmetrisch und positiv definit).

Die Matrix $\mathbf{D}$ wird in der Form $\mathbf{D} = \mathbf{P} - \mathbf{Q} - \mathbf{Q}'$ geschrieben, wo die Matrix $\mathbf{P}$ positiv definit und symmetrisch ist. Die $(\nu + 1)$-ste Approximation bei unserem Iterationsverfahren wird mit Hilfe der Formel

$$\mathbf{x}_{\nu+1} = (\mathbf{P} - \mathbf{Q})^{-1}\,\mathbf{Q}'\mathbf{x}_\nu - (\mathbf{P} - \mathbf{Q})^{-1}\,(\mathbf{d} + \varrho\,\mathbf{z}(\mathbf{x}_\nu))$$

definiert. Falls speziell $\mathbf{D} = (d_{ij})$, $\mathbf{P} = (p_{ij})$, $\mathbf{Q} = (q_{ij})$, und $p_{ii} = d_{ii}$ $(i = 1, \ldots, n)$, $p_{ij} = 0$ $(i \neq j)$, $q_{ij} = -\,d_{ij}$ $(i > j)$, $q_{ij} = 0$ $(i \leqq j)$ ist, dann entspricht das so definierte Iterationsverfahren dem bekannten Gauss-Seidel-Iterationsverfahren für die Lösung der Systeme linearer Gleichungen, jedoch mit der Ausnahme, dass der Vektor $\mathbf{d} + \varrho\,\mathbf{z}(\mathbf{x})$ nicht konstant ist. Bei praktischer Berechnung können wir also das Schema (3') anwenden.

Führen wir jetzt folgende Bezeichnungen ein: $\|\mathbf{x}\| = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i|$, $\|\mathbf{A}\| = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ und $\mathrm{K}[\mathbf{z}, \mu]$ bezeichnet die Menge der Punkte, für die $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \leqq \frac{1}{2}\mu$ gilt. Das Hauptresultat der Arbeit ist der Satz 1:

Sei $\mathbf{x}_0$ ein Punkt, λ eine positive Zahl und $\|(\mathbf{P} - \mathbf{Q})^{-1}\| = p$. Für alle $\mathbf{x} \in \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$ *sei ferner* $\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\| \leqq M$ $(\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (\partial f_i/\partial x_j(\mathbf{x})))$. *Wählen wir jetzt die Zahlen K, q, $0 < K$, $0 < q < 1$ (die Zahlen K, q werden durch das Lemma 3 definiert) derart, dass die Ungleichung (12) gilt. Falls für eine natürliche Zahl ν_0 die Ungleichungen (13) und*

(14) *gelten, dann konvergiert die Folge* $\{\mathbf{x}_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ *zu einem Punkt* $\mathbf{a} \in K[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$ *und der Punkt* $\mathbf{a}$ *ist dann die einzige Lösung des Systems* (1) *in* $K[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$. *Dabei gelten die Fehlerabschätzungen* (15), (16), (17). (*Hier ist* $\delta_\nu = \|\mathbf{x}_\nu - \mathbf{a}\|$, $d_\nu = \|\mathbf{x}_{\nu+1} - \mathbf{x}_\nu\|$.)

Die Ungleichung (14) im Satz 1 kann man offenbar durch die Ungleichung (26), wo $\mathbf{l}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{d} + \varrho\, \mathbf{z}(\mathbf{x})$ ist, vertauschen. Falls die Anfangsapproximation $\mathbf{x}_0$ mit der genauen Lösung des zugehörigen linearen Systems $\mathbf{D}\mathbf{x} + \mathbf{d} = \mathbf{o}$ übereinstimmt, bekommen wir statt der Bedingung (26) die Bedingung (27).

Im Absatz III wird ein Spezialfall des oben definierten Verfahrens untersucht. Dabei setzen wir voraus, dass die Ungleichung $d_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |d_{ij}|$, $i = 1, \ldots, n$ gilt und dass die Matrizen $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ gerade so wie oben definiert sind:

$$p_{ii} = d_{ii}\ (i = 1, \ldots, n)\,, \quad p_{ij} = 0\ (i \neq j)\,, \quad q_{ij} = - d_{ij}\ (i > j)\,,$$
$$q_{ij} = 0\ (i \leqq j)\,.$$

Dann gilt der Satz 2:

Sei $0 < m \leqq d_{ii}$, $i = 1, \ldots, n$ *und es gelten die Ungleichungen* (34), *wo* $q_{i,1} + q_{i,2} < 1$, $i = 1, \ldots, n$ *ist. Ferner sei* $\mathbf{x}_0$ *ein Punkt und* λ *eine positive Zahl. Es gelten die Ungleichungen*

$$\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\| \leqq M\,, \quad Q = \max_{i=1,\ldots,n} \frac{q_{i,2} + \dfrac{|\varrho| M}{m}}{1 - q_{i,1}} < 1\,, \quad \frac{d_0}{1 - Q} \leqq \lambda$$

für alle $\mathbf{x} \in K[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$.

Dann existiert der Punkt $\mathbf{a} \in K[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$ *derart, dass* $\lim_{\nu \to \infty} \mathbf{x}_\nu = \mathbf{a}$ *ist. Der Punkt* $\mathbf{a}$ *ist dann die einzige Lösung des Systems* (1) *in* $K[\mathbf{x}_0, 2\lambda]$. *Dabei gelten die Fehlerabschätzungen* (36), (37), (38).

Im Absatz IV ist die numerische Wirksamkeit des Verfahrens an einem Beispiel gezeigt.