Časopis pro pěstování matematiky

Florin Constantinescu

Relations entre les coefficients de deux polynômes dont les racines se séparent

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 89 (1964), No. 1, 1--4

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117483

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY
Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha
SVAZEK 89 * PRAHA 21. II. 1964 * ČÍSLO 1

RELATIONS ENTRE LES COEFFICIENTS DE DEUX POLYNÔMES DONT LES RACINES SE SÉPARENT

FLORIN CONSTANTINESCU, Cluj (Roumanie)

(Reçu le 2 novembre 1960)

Les conditions nécessaires sont données pour que les racines de deux polynômes aux racines réelles, soient séparées.

Dans ce qui suit nous allons considérer uniquement des polynômes aux coefficients réels ayant toutes les racines réelles. Nous disons que les racines de deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ se séparent, si, entre deux racines consécutives du polynôme $P(x)$, il existe une seule racine du polynôme $Q(x)$, et entre deux racines consécutives du polynôme $Q(x)$, il existe une seule racine du $P(x)$.

Nous pouvons avoir seulement les deux cas suivants:

a) Les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ sont du même degré,

b) les degrés des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ diffèrent d'une unité.

Nous allons nous situer seulement dans le cas a), tout en observant que les démonstrations données peuvent aussi se faire d'une manière absolument analogue pour le cas b).

Nous observons que pour $Q(x)$ nous pouvons prendre en particulier la dérivée $P'(x)$, parce que les racines des polynômes $P(x)$ et $P'(x)$ se séparent.

Soient

$$(1)\quad \begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n\,, \quad a_n > 0\,,\\ Q(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n\,, \quad b_n > 0 \end{aligned}$$

deux polynômes ayant toutes les racines réelles.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les racines du polynôme $P(x)$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ les racines du polynôme $Q(x)$. Pour fixer les idées, nous supposons avoir

$$(2)\qquad \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \ldots < \alpha_{n-1} < \beta_{n-1} < \alpha_n < \beta_n\,.$$

Lemme. *Si les racines des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ se séparent, alors l'équation*

$$(3)\qquad R(x) \equiv \lambda\, P(x) + \mu\, Q(x) = 0$$

a toutes les racines réelles, quels que soient λ et μ réels.

Nous observons que la suite

$$R(\beta_1), R(\beta_2), \ldots, R(\beta_n)$$

présente seulement des variations de signe, donc l'équation a seulement des racines réelles.

Donnons à λ et μ, à tour de rôle, les valeurs

$$\lambda = b_1, b_2, \ldots, b_{n-1} \; ; \quad \mu = -a_1, -a_2, \ldots, -a_{n-1} \, .$$

Au polynôme $R(x)$, il manqueront consécutivement les coëfficients des termes en $x, x^2, \ldots, x^{n-1}$. Puisque $R(x)$ a toutes les racines réelles, cela veut dire que nous avons

$$(4) \qquad \begin{aligned} &(b_1 a_0 - a_1 b_0)(b_1 a_2 - a_1 b_2) < 0 \, , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(b_k a_{k-1} - a_k b_{k-1})(b_k a_{k+1} - a_k b_{k+1}) < 0 \, , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &(b_{n-1} a_{n-2} - a_{n-1} b_{n-2})(b_{n-1} a_n - a_{n-1} b_n) < 0 \, . \end{aligned}$$

Mais $a_{n-1}/a_n = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, $b_{n-1}/b_n = -\sum_{i=1}^{n} \beta_i$, donc $a_{n-1}/a_n > b_{n-1}/b_n$, ou bien

$$(5) \qquad b_{n-1} a_n - a_{n-1} b_n < 0 \, .$$

Des relations (4), nous déduisons

$$(6) \qquad \begin{aligned} &b_{n-1} a_{n-2} - a_{n-1} b_{n-2} > 0 \, , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &b_k a_{k-1} - a_k b_{k-1} > 0 \, , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &b_1 a_0 - b_0 a_1 > 0 \, , \end{aligned}$$

ou bien, sous une autre forme,

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} a_{k-1}, & a_k \\ b_{k-1}, & b_k \end{vmatrix} > 0 \, , \quad k = 1, 2, \ldots, n \, .$$

Ainsi nous avons obtenu le

Théorème 1. *Si les racines des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ sont réelles et se séparent, alors entre les coefficients de ces polynômes on a les relations* (7).

Dans le cas b) *où les degrés des polynômes diffèrent d'une unité, au lieu des relations* (7) *nous obtenons* (*pour* $b_{n-1} > 0$)

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} a_{k-1}, & a_k \\ b_{k-1}, & b_k \end{vmatrix} < 0 \, , \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \, .$$

Le théorème 1 peut être énoncé analoguement dans ce cas-là aussi. En prenant $Q(x) \equiv P'(x)$, nous obtenons

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} a_{k-1}, & a_k \\ k a_k, & (k+1)\, a_{k+1} \end{vmatrix} < 0 \, , \quad k = 1, 2, \ldots, n-1 \, ,$$

ou

$$(10) \qquad k a_k^2 > (k + 1)\, a_{k-1} a_{k+1} \,.$$

Les relations (10) sont des conditions nécessaires pour que les racines du polynôme $P(x)$ soient toutes réelles, et sont connues sous le nom de „relations de De Gua".

Observons encore, qu'après une translation $x' = X + x$, la propriété de séparations des racines subsiste. Mais nous avons

$$P(X + x) = P(x) + X \frac{P'(x)}{1!} + \ldots + X^{n-1} \frac{P^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + X^n \frac{P^{(n)}(x)}{n!},$$

$$Q(X + x) = Q(x) + X \frac{Q'(x)}{1!} + \ldots + X^{n-1} \frac{Q^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} + X^n \frac{Q^{(n)}(x)}{n!}.$$

Ici nous pouvons appliquer les relations (7), et nous obtenons

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{(k-1)!} P^{(k-1)}(x), & \frac{1}{k!} P^{(k)}(x) \\ \frac{1}{(k-1)!} Q^{(k-1)}(x), & \frac{1}{k!} Q^{(k)}(x) \end{vmatrix} > 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,,$$

ou

$$\begin{vmatrix} P^{(k-1)}(x), & P^{(k)}(x) \\ Q^{(k-1)}(x), & Q^{(k)}(x) \end{vmatrix} > 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Théorème 2. *Si les racines des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ sont réelles et se séparent, alors l'équation*

$$P^{(k-1)}(x)\, Q^{(k)}(x) - Q^{(k-1)}(x)\, P^{(k)}(x) = 0$$

n'a aucune racine réelle.

Výtah

RELACE MEZI KOEFICIENTY DVOU POLYNOMŮ, JEJICHŽ KOŘENY SE ODDĚLUJÍ

F. Constantinescu, Cluj

Nechť $P(x)$ a $Q(x)$ jsou dva polynomy tvaru (1). Potom platí následující věta.

Věta 1. *Jestliže kořeny polynomů $P(x)$ a $Q(x)$ jsou reálné a oddělují se, pak mezi koeficienty těchto polynomů platí relace (7). V případě, že jeden z polynomů má stupeň o jedničku menší než druhý, je nutno nahradit relace (7) relacemi (8).*

Резюме

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ДВУХ ПОЛИНОМОВ, КОРНИ КОТОРЫХ ОТДЕЛЯЮТСЯ

Ф. КОНСТАНТИНЕСКУ (F. Constantinescu), Клюж.

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – два полинома вида (1). Тогда имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Если корни полиномов $P(x)$ и $Q(x)$ – вещественные и отделяются, то между коэффициентами этих полиномов имеют место соотношения* (7). *В случае, когда степени этих полиномов отличаются на единицу, вместо* (7) *выполняются соотношения* (8).