Tibor Šalát

O množinách vzdialeností lineárnych diskontinuí. II.

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 87 (1962), No. 4, 489--491

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117456

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

# O MNOŽINÁCH VZDIALENOSTÍ LINEÁRNYCH DISKONTINUÍ, II

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

(Došlo dňa 8. septembra 1961)

Tento článok je stručným dodatkom k práci [1] a úzko nadväzuje na práce [2], [3].

V práci [2] sú o známej Cantorovskej množine $C$ dokázané nasledujúce dve vety:

**Veta I.** *Pre všetky $d \in C$ s výnimkou bodov spočetnej množiny platí: K číslu $d$ existuje nekonečne mnoho mohutnosti kontinua dvojíc $(x, y) \in C \times C$ tak, že $y - x = d$.*

**Veta II.** *Existuje hustá množina $H \subset \langle 0, 1 \rangle - C$ tak, že ku každému $d \in H$ existuje nekonečne veľa mohutnosti kontinua dvojíc $(x, y) \in C \times C$ tak, že $y - x = d$.*

Poznamenajme, že z vety 1 práce [1] vyplýva pre množinu $C$ a pre množiny ešte obecnejšej štruktúry nasledujúca značne ostrejšia veta než je veta II. Dôkaz nasledujúcej vety sa dostane snadným prehĺbením dôkazu vety 1 z práce [1].

**Veta 1.** *Nech $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad s kladnými členmi a nech*

$$R_n < a_n \leqq 2R_n \ (n = 1, 2, 3, \ldots), \quad \left(R_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}\right).$$

*Označme znakom $W$ množinu všetkých tých reálných čísel $x$, ktoré možno vyjadriť vo tvare*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, \ \varepsilon_n = 1 \quad alebo \quad -1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

*Nech $|W| = 0$ ($|M|$ značí Lebesgueovskú mieru množiny $M$).*

Tvrdenie. *Skoro všetky čísla $d \in \langle 0, 2A \rangle$ majú nasledujúcu vlastnosť: K číslu $d$ existuje nekonečne veľa mohutnosti kontinua dvojíc $(x, y) \in W \times W$ tak, že $|x - y| = d$.*

Spôsobom úplne rovnakým, akým sa v práci [1] dokazuje veta 3, dá sa ukázať nasledujúci dôsledok vety 1, ktorý je značným zostrením vety II.

**Veta 2.** *Pre skoro všetky $d \in \langle 0, 1 \rangle$ platí: K číslu $d$ existuje nekonečne mnoho mohutnosti kontinua dvojíc $(x, y) \in C \times C$ tak, že $|y - x| = d$.*

Poznámka. Teda ona množina $H$, ktorá sa spomína vo vete II, môže byť zvolená tak, že $|H| = 1$ (a je teda hustá v $\langle 0, 1\rangle$).

V práci [1] bolo ukázané (veta 1 časť a)), že ak $A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentný rad s kladnými členmi a ak

$$(1) \qquad 0 < a_n \leqq 2R_n = 2\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

potom množina $W$ definovaná prv má vlastnosť $S_2$ vzhľadom na interval $\langle 0, 2A\rangle$, tj. ku každému $d \in \langle 0, 2A\rangle$ existuje $(x, y) \in W \times W$ tak, že $|x - y| = d$. Pomocou istého výsledku práce [3] ukážeme teraz, že pri istom obmedzení je podmienka (1) aj nutná k tomu, aby množina $W$ mala vlastnosť $S_2$ vzhľadom na interval $\langle 0, 2A\rangle$.

**Veta 3.** *Nech* $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n \geqq \ldots, a_n > 0 (n = 1, 2, 3, \ldots), A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$. *Nech* $W$ *má predošlý význam.*

Tvrdenie. *Nutná a postačujúca podmienka k tomu, aby ku každému* $d \in \langle 0, 2A\rangle$ *existovala dvojica* $(x, y) \in W \times W$ *s vlastnosťou* $|x - y| = d$, *je, aby platilo* (1).

Dôkaz. Že uvedená podmienka je postačujúca, bolo ukázané v [1]. Ukážeme, že je aj nutná. Definujme na množine $W$ funkciu $y = T(x) = 2^{-1}(x + A)$. Táto funkcia zobrazuje $W$ na $M$, $M$ je množina z práce [3] všetkých tých čísel $z$, ktoré majú tvar

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n a_n, \; \eta_n = 0 \text{ alebo } 1; \; (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ak ku každému $d \in \langle 0, 2A\rangle$ existujú $x_1, x_2 \in W$ tak, že $|x_1 - x_2| = d$ (zvoľme $x_1 \geqq x_2$, teda $x_1 - x_2 = d$), potom $T(x_1), T(x_2) \in M, T(x_1) - T(x_2) = d/2$ a podľa výsledku J. F. Randolpha (pozri [3]), platí (1). Tým je dôkaz vety skončený.

## *Literatúra*


[1] *T. Šalát*: О множествах расстояний линейных дисконтинуумов, I. Čas. pro pěst. mat. *87* 1962), 4—16.

[2] *N. C. Bose Majumdar*: On the distance set of the Cantor "middle third" set. Bull. Calcutta Math. Soc., *51* (1959), 93—102.

[3] *J. F. Randolph*: Some properties of sets of the Cantor type. Jour. Lond. Math. Soc., *XVI* (1941), 38—42.

## Резюме

## О МНОЖЕСТВАХ РАССТОЯНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКОНТИНУУМОВ, II

ТИБОР ШАЛАТ (Tibor Šalát), Братислава

Эта работа является дополнением к работе [1]. Автор сравнивает в ней результаты работы [1] с результатами работы [2]. С помощью работы [3] доказана следующая теорема (теорема 3):

**Теорема.** *Пусть*

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n \geqq \ldots, a_n > 0 \, (n = 1, 2, 3, \ldots), A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty .$$

*Пусть W значит множество всех тех x, которые можно выразуть в виде*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n ; \quad \varepsilon_n = 1 \quad \text{или} \quad -1 \; (n = 1, 2, 3, \ldots) .$$

*Тогда множество W имеет свойство $S_2$ (смотри* [1]) *в том и только в том случае, когда*

$$0 < a_n \leqq 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) .$$

## Zusammenfassung

## ÜBER DIE MENGEN DER ENTFERNUNGEN DER LINEAREN DISKONTINUEN, II

Tibor Šalát, Bratislava

Diese Arbeit ist eine Ergänzung der Arbeit [1]. Der Verfasser vergleicht hier die Ergebnisse der Arbeit [1] mit den Ergebnissen von [2] und mit Hilfe der Arbeit [3] beweist den folgenden Satz (Satz 3):

**Satz.** *Es sei* $a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n \geqq \ldots, a_n > 0 \, (n = 1, 2, 3, \ldots), A = \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$

*Es bedeute W die Menge aller derjenigen x, welche die Form*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n, \; \varepsilon_n = 1 \text{ oder } -1 \; (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

*haben. Dann hat die Menge W die Eigenschaft $S_2$ (siehe* [1]) *dann und nur dann, wenn*

$$0 < a_n \leqq 2 \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

*ist.*