Časopis pro pěstování matematiky

Anton Kotzig

Об одном методе исследования конечных графов

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 87 (1962), No. 4, 477--488

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117455

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ

АНТОН КОЦИГ (Anton Kotzig), Братислава

(Поступило в редакцию 22/VIII 1961 г.)

В работе (прочитанной автором в качестве сообщения на семинаре в Либлице) рассматривается метод исследования конечных графов, состоящий в выводе и использовании следствий, вытекающих из выполнения двух простых условий, накладываемых на исследуемое свойство графов некоторого класса. Оказывается, что результаты, выведенные относительно удовлетворяющих данным условиям свойств, облегчают путь для раскрытия новых знаний. Здесь же поставлены новые проблемы, обещающие принести интересные результаты.

1. Под графом во всей работе мы будем понимать конечный граф, содержащий по меньшей мере две вершины.

Сущность метода исследования графов, о котором мы хотим говорить, состоит в том, что нами будут выведены следствия, вытекающие из простейших условий, налагаемых на некоторое свойство графов, принадлежащих некоторому классу графов (например, целому классу всех конечных графов, содержащих не менее двух вершин). От класса рассматриваемых графов $\mathfrak{G}$ мы потребуем следующее: если граф G принадлежит $\mathfrak{G}$, то всякий подграф графа G, содержаший все его вершины, также принадлежит $\mathfrak{G}$. После этого нами будет показано, что выведенные результаты, касающиеся очень многих и существенных свойств графов, часто сокращают путь к раскрытию более глубоких знаний в отношении того или иного конкретного свойства графа. Будем говорить, что некоторое свойство V, имеющее смысл для всех графов из $\mathfrak{G}$, является *T-свойством*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(1) никакой регулярный граф нулевого порядка (т. е. никакой граф, содержащий одни только вершины и несодержащий никаких ребер) не обладает свойством V,

(2) пусть множества вершин графов G_1, G_2 равны между собой и пусть G_1 – подграф графа G_2; тогда, если G_1 обладает свойством V, то G_2 также обладает свойством V.

Приведем несколько примеров для T-свойств:

для неориентированных графов

(α) свойство быть связным,

(β) свойство содержать линейный множитель,

(γ) свойство содержать гамильтоновскую линию;

для ориентированных графов

(δ) свойство, что для любых двух вершин u, v существует путь из вершины u в вершину v.

Пусть с этого момента имеем некоторое твердо выбранное T-свойство графов из $\mathfrak{G}$, удовлетворяющее условиям (1), (2), и пусть G — произвольный граф. Определим функцию $\tau(G)$ (зависящую от выбора T-свойства) следующим образом:

I. $\tau(G) = 0$, если G не обладает T-свойством,

II. $\tau(G) = k$ (k — натуральное число), если (а) G обладает T-свойством, а после устранения из графа G произвольных менее чем k ребер получится всегда граф, обладающий T-свойством; (б) после устранения некоторых k ребер из графа G получиться граф, не обладающий T-свойством.

Определение t-множества и t-ребра: Если $\tau(G) = k$ и H — такое множество k ребер графа G, что после устранения из графа G всех его ребер получается граф, не обладающий T-свойством, то H называется t-множеством графа G (в случае $\tau(G) = 0$ t-множеством будет только пустое множество).

Пусть h — произвольное ребро графа G и пусть G' — граф, получающийся из G после устранения ребра h. Будем говорить, что h является t-ребром в графе G (или же t-ребром графа G) тогда и только тогда, когда выполняется: $\tau(G) \neq \tau(G')$.

Примечание 1. Из условия (1) для T-свойства сразу же вытекает следующее: пусть G — произвольный граф с m ребрами; тогда имеет место неравенство: $\tau(G) \leqq m$.

Лемма 1. *Пусть G — произвольный граф, h — произвольное его ребро и G' — граф, получающийся из G после устранения ребра h; тогда $\tau(G) \geqq \tau(G')$.*

Доказательство. Если G' обладает T-свойством, то им обладает также граф G (смотри условие (2) для T-свойства); наоборот: если G не обладает T-свойством, то им не обладает также граф G'. Иначе: $\tau(G) = 0 \Rightarrow \tau(G') = 0$.

Предположим, что $\tau(G) = k > 0$. Пусть $h_1, h_2, \ldots, h_k$ — такие ребра из G, что после их устранения из графа G возникает граф G'', не обладающий T-свойством. Пусть G''' — граф, содержащий все элементы, общие графам G', G''. Граф G''' — подграф графа G''; справедливо также, что G''' имеет одни и те же вершины, что и граф G''. Поскольку G'' не обладает T-свойством, то им не обладает — в силу разъясненного — ни граф G'''. Значит, $\tau(G''') = 0$. Поэтому достаточно устранить из графа G' по крайней мере k ребер для образования графа G''', не обладающего T-свойством. Из этого следует $\tau(G') \leqq k = \tau(G)$, что и требовалось доказать.

Примечание 2. Из леммы 1 сразу же вытекает, что в определении t-ребра мы могли потребовать выполнение $\tau(G) > \tau(G')$ вместо требуемого $\tau(G) \neq \tau(G')$. Другим следствием леммы 1 является справедливость следующего утверждения: если G_1 — подграф графа G_2, а множества вершин графов G_1, G_2 совпадают, то $\tau(G_1) \leqq \tau(G_2)$.

Лемма 2. *Пусть G — произвольный граф, h — произвольное его ребро, и G' — граф, получающийся из графа G после устранения из него ребра h. Если h является t -ребром графа G, то справедливо $\tau(G) = 1 + \tau(G')$, если же h не является t-ребром в G, то справедливо $\tau(G) = \tau(G')$.*

Доказателство. Пусть $\tau(G') = j$. После устранения некоторых j ребер из графа G' получится граф G'', который не обладает T-свойством. Граф G'' можно получить из графа G путем истранения из него, кроме указанных j ребер, еще и ребра h. Поэтому $j \leqq \tau(G) \leqq j + 1$. Из $\tau(G) < \tau(G')$ сразу же вытекает $\tau(G) = j + 1 = 1 + \tau(G')$, а если h не является t-ребром, то, очевидно, должно выполняться $\tau(G) = \tau(G') = j$. Это доказывает лемму.

Лемма 3. *Пусть G_0 — произвольный граф. Если $\tau(G_0) = 0$, то G_0 не содержит никакого t-ребра, а если $\tau(G_0) = k > 0$, то число t-ребер в G_0 равно по меньшей мере k.*

Доказательство. Справедливость первого из утверждений очевидна. Предположим, что $\tau(G_0) = k > 0$. Пусть $h_1, h_2, \ldots, h_k$ — ребра некоторого t-множества графа G_0. Обозначим через G_i граф, который получится из графа G_0 после устранения из него ребер $h_1, h_2, \ldots, h_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Имеют место соотношения:

$$\tau(G_{k-1}) \leqq 1 + \tau(G_k), \tau(G_{k-2}) \leqq 1 + \tau(G_{k-1}), \ldots, \tau(G_0) \leqq 1 + \tau(G_1)\,.$$

Отсюда:

$$\tau(G_0) \leqq k + \tau(G_k)\,.$$

Известно однако, что $\tau(G_k) = 0$; $\tau(G_0) = k$; значит, знак $<$ ни в коем случае не может появиться. Из этого непосредственно следует, что каждое из ребер $h_1, h_2, \ldots, h_k$ является t-ребром. Это и доказывает лемму.

Лемма 4. *Всякое ребро t-множества является t-ребром графа и всякое t-ребро принадлежит по меньшей мере одному t-множеству графа.*

Доказателство. Доказательство леммы следует непосредственно из доказателства леммы 3.

Лемма 5. *Пусть G_0 — произвольный граф такой, что выполняется $\tau(G_0) > 0$, и пусть g — произвольное ребро из G_0, не являющееся t-ребром. Обозначим через G_1 граф, который получится из G_0 после устранения ребра g. Пусть*

h — произвольное t-ребро графа G_0. Имеет место утверждение: h является t-ребром также в графе G_1.

Примечание 3. Однако, может наступить случай, что некоторое ребро графа G_1 из леммы 5 не является t-ребром в G_0, но является t-ребром в G_1 (см., например, примечание 12 на стр. 45 в [2]).

Доказателство леммы 5. Пусть G_2 — граф, получающийся из G_1 устранением ребра h и пусть G_1' — граф, получающийся из G_0 устранением ребра h.

Согласно предположению выполняется: $\tau(G_1') = \tau(G_0) - 1$; $\tau(G_1) = \tau(G_0)$. Но $\tau(G_2) \leqq \tau(G_1') = \tau(G_0) - 1$. Если бы h не было t-ребром графа G_1, это означало бы, что $\tau(G_2) = \tau(G_1) = \tau(G_0)$, то противоречит выведенному нами раньше. Поэтому h есть t-ребро графа G_1. Доказательство закончено.

Определение T_k-графа: Пусть k — некоторое натуральное число. О графе G будем говорить, что он является T_k-графом тогда и только тогда, когда $\tau(G) = k$ и когда всякое ребро является его t-ребром.

Теорема 1. *Пусть для графа G имеет место $\tau(G) = k > 0$, и пусть j — произвольное натуральное число $\leqq k$; тогда существует по меньшей мере один T_j-граф, являющийся подграфом графа G и содержащий все его вершины.*

Доказательство. I. Докажем сначала, что существует T_k-граф G_k^*, являющийся подграфом графа G и содержащий все вершины из G. Если G содержит одни только t-ребра, то, очевидно, $G = G_k^*$ и есть искомый граф. Предположим, что в G существует ребро, не являющееся его t-ребром. Образуем последовательность содержащих все вершины из $G = G_0$ подграфов $G_0, G_1, \ldots, G_s$ графа G следующим образом: пусть $i = 0, 1, \ldots$; граф G_{i+1} образуется из графа G_i путем устранения из последнего произвольного одного такого ребра, которое не является t-ребром. Если же G_i не содержит больше такого ребра (т. е. если G_i содержит одни только t-ребра), то полагаем $G_i = G_s$, и на этом подграфе наша последовательность заканчивается. Очевидно, будет $\tau(G_0) = \tau(G_1) = \ldots$ $\ldots = \tau(G_s) = k$, и, кроме того: G_s содержит одни t-ребра. Иными словами, $G_s = G_k^*$ и есть искомый T_k-граф.

II. Пусть $0 < j < k$. Докажем, что существует T_j-граф G_j^*, содержащий все вершины из G, являющийся подграфом графа G. Пусть G_k^* — произвольный T_k-граф, являющийся подграфом графа G и содержащий все его вершины и пусть $G^{(1)}$-граф, получающийся из G_k^* в результате устранения произвольного одного (фиксированного) ребра. Имеет место: $\tau(G^{(1)}) = k - 1$. Согласно части I существует T_{k-1}-граф, являющийся подграфом графа $G^{(1)}$ (а, значит, также подграфом графа G) и содержащий все вершины из $G^{(1)}$ (а, значит, также все вершины из G).

Если этот T_{k-1}-граф содержит хотя бы одно ребро, т. е. если $k - 1 > 0$, то путем устранения одного ребра можно образовать граф $G^{(2)}$, для которого выполняется $\tau(G^{(2)}) = k - 2$ и можно найти T_{k-2}-граф, содержащий все вершины из G и являющийся его подграфом. Повторением указанного процесса получим T_j-графы с требуемыми свойствами для всех $j = k - 1, k - 2, \ldots, 1$. Доказательство закончено.

Лемма 6. *Пусть G^* — произвольный T_k-граф (k — произвольное натуральное число), тогда никакой собственный подграф графа G_*, содержащий все вершины из G^*, не является T_k-графом.*

Доказательство очевидно.

Лемма 7. *Пусть G — произвольный граф, в котором $\tau(G) = k > 0$. Произвольный T_k-граф, являющийся подграфом графа G и содержащий все его вершины, содержит все ребра каждого t-множества графа G.*

Доказательство. Пусть $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$ — произвольное t-множество графа G и пусть F_i — граф, образованный из G путем устранения ревра $h_i \in H$; ($i = 1, 2, \ldots, k$). Очевидно, выполняется $\tau(F_i) = k - 1$, и в графе F_i не существует подграфа, являющегося T_k-графом и содержащего все вершины из G. Из этого следует, что всякий рассматриваемый T_k-граф содержит ребро h_i; и поскольку h_i — произвольное ребро из H и H — произвольное t-множество графа G, то справедливость леммы становится очевидной.

Лемма 8. *Пусть G — произвольный T_k-граф. Всякое ребро из G является ребром хотя бы одного t-множества графа G.*

Доказательство. Пусть G' — граф, получающийся из G путем устранения произвольного его ребра h. Поскольку h есть t-ребро графа G (см. определение T_k-графа), то выполняется (согласно лемме 2) равенство: $\tau(G') = k - 1$. Согласно определению функции $\tau(G')$ существует t-множество H' графа G', содержащее $k - 1$ ребер. Из сказанного следует, что $H = H' \cup \{h\}$ есть t-множество графа G, содержащее ребро h. Это и доказывает лемму.

При исследовании T_k-графа с точки зрения конкретного свойства T существенную роль может сыграть двухместное отношение $\varDelta$ в множестве всех ребер графа, определение которого дается дальше. Но проделаем сначала подготовительный шаг.

Определение отношения $\varLambda$. Двухместное отношение $\varLambda$ в множестве ребер графа G определим следующим образом: ребра g_1, g_2 из G находятся в отношении $\varLambda$ (записывается $g_1 \varLambda g_2$), если $g_1 = g_2$ или если существует t-множество графа G, содержащее и g_1, и g_2.

Определение отношения $\varDelta$. Двухместное отношение $\varDelta$ в множестве ребер графа G определим с помощью отношения $\varLambda$ следующим образом: ребро f_1 из G находится в отношении $\varDelta$ с ребром f_2 (записывается $f_1 \varDelta f_2$), если существует последовательность ребер $g_1, g_2, \ldots, g_n$ ($n > 1$) такая, что $g_1 = f_1$; $g_n = f_2$; $g_1 \varLambda g_2, g_2 \varLambda g_3, \ldots, g_{n-1} \varLambda g_n$.

Теорема 2. *Отношение Δ есть отношение эквивалентности, и поэтому существует одно и только одно такое разбиение $\mathfrak{H}_G^\Delta$ множества ребер графа G на классы ребер, что произвольных два ребра из G принадлежат одному и тому же классу разбиения $\mathfrak{H}_G^\Delta$ тогда и только тогда, когда они находятся в отношении Δ.*

Доказательство. Отношение Δ — рефлексивно. В самом деле, пусть h — произвольное ребро из G. Положим $g_1 = h$; $g_2 = h$. Согласно определению отношения Λ имеет место: $g_1 \Lambda g_2$ и, согласно определению отношения Δ, из этого следует $g_1 \Delta g_2$, или же: $h \Delta h$. Очевидно, отношение Λ симметрично. Из этого следует, что симметричным будет также отношение Δ. Транзитивность отношения Δ непосредственно вытекает из его определения. Это и доказывает теорему.

2. Чтобы лучше показать объем и разнообразие применений рассматриваемого метода, разберем теперь вкратце некоторые конкретные случаи T-свойства.

Случай 1. Граф обладает T-свойством, если он связный. Всякий T_k-граф G обладает тогда, очевидно, следующими свойствами: (I) G-связный граф и остается связным после устранения произвольных $k - 1$ его ребер; (II) G теряет свойство (I) после устранения произвольного одного его ребра. Свойства и способ построения T_k-графов (для этого случая определения T-свойства) более подробно исследуются (в частности, для $k = 2$) в работе [1]; там T_k-граф называется основой k-того порядка. Разбиение $\mathfrak{H}_G^\Delta$ (определяемое теоремой 2) тогда является (при произвольном k) разбиением множества ребер графа G на классы ребер отдельных членов графа. t-множествами графа являются сечения минимальной мощности (в смысле работ [2] и [12]). Минимальным подграфом G' графа G (где $\tau(G) = k$), содержащим все вершины из G и удовлетворяющим условию $\tau(G') = k$, будет всегда некоторый T_k-граф, который можно найти, например, по методу, использованному при доказательстве теоремы 1. Отыскание такого подграфа G' может сыграть важную роль при решении задач об оптимальных системах сообщения (смотри, например, заключение работы [1]). Сравнительно хорошо исследованы уже раньше T_k-графы для случая $k = 1$. Это — основы графа (смотри, напр., основную работу Кенига по теории графов [9]). Значением T_1-графов для построения композиционных базисов некоторых графов занимается, например, также работа [7], значение T_1-графов для решения названных оптимальных систем сообщения рассматривается также в новейшей работе [8], являющейся продолжением уже очень обширной в настоящее время литературы по указанной проблематике.

Случай 2. Пусть G — произвольный граф и пусть $u \neq v$ — две вершины, которые в графе G соединены. В множестве всех подграфов, содержащих все вершины из G, определим T-свойство следующим образом: подграф G' графа G обладает T-свойством тогда и только тогда, когда вершины u, v в графе G' соединены. Изучением T_k-графов и некоторых их свойств при таком определении T-свойства занимается часть работы [2]; результаты ее в указанном направлении развиты в работе Ю. Босака (см. [4]). Оказывается, для всякого T_k-графа существует такая система $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ путей, соединяющих вершины u, v, что каждое ребро T_k-графа принадлежит одному и только одному пути системы, а также, что система не может содержать больше, чем k таких путей. Ряд результатов, полученных при изучении графов с помощью описанного метода, служил основой для исследования регулярной связности графов (смотри работу [2]). По сути дела теми же методами был найден целый ряд новых фактов, относящихся к ориентированным графам (см. [5]).

Случай 3. Ориентированный граф $\vec{G}$ обладает T-свойством, если для любых двух его вершин $u \neq v$ существует путь, направленный из вершины u в вершину v. Такие графы подробно рассматривал Й. Седлачек в работе [3] и получил для них ряд интересных результатов (граф с определенным таким образом T-свойством называет Й. Седлачек хорошо ориентированным графом). T_1-граф, являющийся подграфом хорошо ориентированного графа $\vec{G}$ и содержащий все его вершины, является минимальным хорошо ориентированным подграфом графа $\vec{G}$, содержащим все вершины из $\vec{G}$. Если мы требуем, чтобы граф $\vec{F}$ был „экономно" и хорошо ориентированным в том смысле, что после устранения произвольного ребра h он перестанет быть хорошо ориентированным, то мы требуем не что иное, как то, чтобы $\vec{F}$ был T_1-графом (это по поводу заметки под чертой 13 на стр. 207 в работе Седлачека [3]). Привлекательным и обещающим интересные результаты кажется изучение свойств и строения не только T_1-графов, но и T_2-графов, T_3-графов и т. д. и специально таких T_k-графов, для которых разбиение $\mathfrak{H}^{\Delta}_{\vec{G}}$ содержит единственный класс.

Случай 4. Граф G обладает T-свойством, если он имеет хотя бы один линейный множитель. Более подробным изучением графов с только что определенным T-свойством занимается работа [6]. Произвольный T_1-граф, являющийся подграфом графа G и содержащий все вершины из G, есть не что иное, как линейный множитель графа G. Например, для T_k-графов при $k > 1$ имеет место следующее: Всякий T_k-граф имеет ненулевое ядро (ядро в смысле работы [6]). Относительно простым являются регулярные T_k-графы, т. е. такие T_k-графы, в которых все вершины имеют один и тот же порядок. Например, регулярный T_2-граф должен быть таким, что каждая его компонента является окружностью с четным числом вершин. Класс регулярных T_3-графов совпадает с классом всех регулярных графов третьего порядка без мостов. Дело в том, что Т. Шенбергер в [10] доказал следующее: *в произвольном регулярном графе третьего порядка, не содержащем мост, существует линейный множитель даже тогда, когда из него устраняются произвольных два его ребра.* Поскольку, кроме того, всякий мост регулярного графа третьего порядка принадлежит каждому линейному множителю (а, значит, после устранения моста образуется граф, не содержащий никакого линейного множителя), то справедливость приведенного утверждения становится очевидной. Я полагаю, что справедливо также следующее: произвольный регулярный граф n-ого порядка, каждая компонента которого регулярно связна (в смысле работы [2]) и содержит четное число вершин, есть T_n-граф. Доказательство этого утверждения, равно как и построение опровергающего его примера до сих пор не сделано. Данное утверждение относится к той области теории графов, которая до

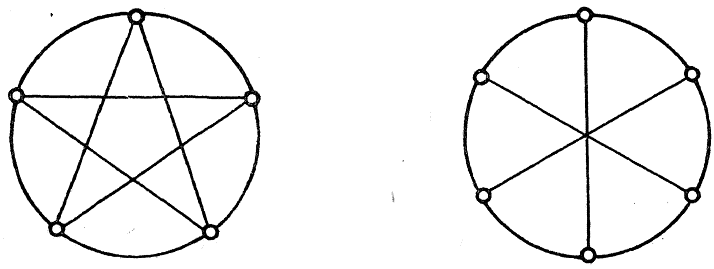

Рис. 1.

сих пор очень мало развита и которая, с другой стороны, обещает принести еще много нового. Исследование свойств и строения T_k-графа может дать интересные результаты.

Случай 5. Граф обладает T-свойством, если существует хотя бы одна гамилтоновская линия графа G. Проблематика гамильтоновских линий графа — как это подчеркивается многими авгорами (смотри, например, Д. Кениг [9], К. Берж [15]) — является одной из найменее разработанных областей. Поэтому изучение T_k-графов для приведенного только что определения представляется довольно обещающим. Очень простыми являются T_1-графы. Дело в том, что всякий T_1-граф, являющийся подграфом графа G и содержащий все его вершины, есть гамильтоновская линия графа G. T_2-графы уже довольно сложны. Для примера T_2-графа может служить граф n-гранной пирамиды (где n — произвольное натуральное число больше двух) или же граф куба, правильного пятиугольного додекаэдра. Шагом вперед в этой области явилось бы уже одно описание строения всех таких T_2-графов, которые являются регулярными графами третьего порядка. До сих пор данная проблематика рассмотрена только для некоторого специального класса таких графов в работе [11].

Случай 6. Граф обладает T-свойством, если он не плоский. Очевидно, T_1-графами в таком случае будут графы, одна компонента которых гомеоморфна с одним из двух графов Куратовского (эти графы показаны на рис. 1) и всякая следующая компонента (если такая существует) состоит из единственной (изолированной) вершины. Значение $\tau(G)$ указывает минимальное число ребер, которые следует устранить из графа G, чтобы получился плоский граф. Интересную возможность расширения результатов обещает изучение структуры и свойств T_k-графов уже для $k = 2$.

Очевидно, T_2-графом является всякий граф, одна из компонент которого гомеоморфна с графом, получающимся из графа Куратовского путем присоединения к каждому его ребру еще одного соединяющего те же вершины ребра, а остальные компоненты этого графа содержат уже только изолированные вершины.

Если под классом $\mathfrak{G}$ понимать только класс таких графов, в которых произвольные две вершины соединяются по крайней мере одним ребром, то задача

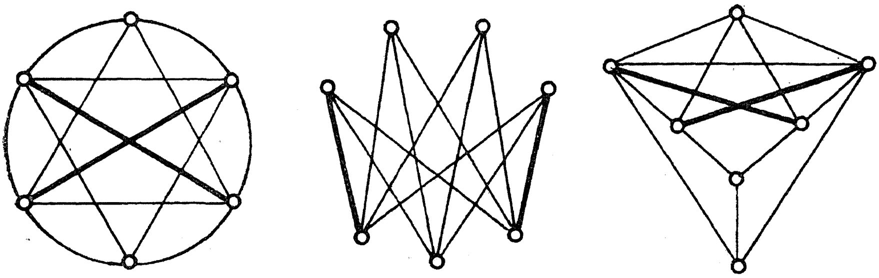

Рис. 2.

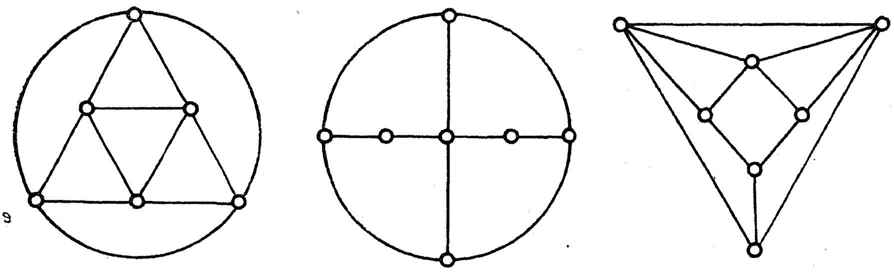

Рис. 3.

найти хотя бы найболее простые T_2-графы становится значительно труднее. Наиболее простые (содержащие наименьшее число вершин) T_2-графы – это графы, изображенные на рис. 2 (единственный граф с шестью вершинами получится из комплектного графа с шестью вершинами после устранения одного ребра). В каждом из этих графов отмечено также одно t-множество (ребра его изображены жирными линиями). Соответствующий плоский граф, получающийся после устранения ребер t-множества из T_2-графа изображен на рис. 3.

Читатель легко убедится, что после устранения произвольного одного ребра любого из числа изображенных на рис. 2 графов получится всегда граф, не являющийся плоским.

Легко доказывается, что произвольный комплектный граф с n вершинами (где $n \geqq 5$) есть T_k-граф, причем $k = \binom{n-3}{2}$.

Рассматриваемый случай можно обобщить путем определения T-свойства следующим образом: граф обладает T-свойством, если его нельзя „реализовать" в пространстве P (где P может, например, быть поверхностью тороида и т. д.).

Случай 7. Граф обладает T-свойством, если при окраске его вершин нам не хватит n красок (здесь имеется в виду такая окраска вершин графа n красками, при которой всякие две вершины, соединенные в графе ребром, окрашены в различный цвет). В проблематике окраски графов в указанном смысле важные результаты получили, например, Г. Рингель (смотри, напр., его книгу [13]), Дирак (в целой серии статей). Толчком для многих работ, посвященных изучению строения и свойств T_k-графов (при общем k) послужили лекции и рефераты Г. Хайоша (смотри, напр., [16]). Можно ожидать, что новые результаты в этой области приблизят решение уже свыше 100 лет открытой знаменитой проблемы „четырех красок" (об этой проблеме смотри, например, [14]).

Литература

[1] *А. Коциг:* Об основах графа порядка высшего, чем первого. Časopis pro pěst. mat., *86* (1961), 288—307.

[2] *A. Kotzig*: Súvislosť a pravidelná súvislosť konečných grafov. Bratislava 1956.

[3] *J. Sedláček*: O konečných orientovaných grafech. Časopis pro pěst. mat., *82* (1957), 195—215.

[4] *J. Bosák*: O istej triede orientovaných grafov. Mat. fyz. časopis *XII* (1962), 81—84.

[5] *A. Kotzig*: Beitrag zur Theorie der endlichen gerichteten Graphen. Wissenschaftliche Zeitschrift Univ. Halle, Math.-Nat. *X*/1, 1961, 118—125.

[6] *A. Kotzig*: Z teórie konečných grafov s lineárnym faktorom I—III. Mat. fyz. časopis, *IX* (1959), 73—91, 136—159; *X* (1960), 205—215.

[7] *A. Kotzig*: Význam kostry grafu pre konštrukciu kompozičných báz istých čiastočných grafov. Mat. fyz. časopis, *VI* (1956), 68—77.

[8] *A. Kotzig*: Súvislé podgrafy s minimálnou hodnotou v konečnom súvislom grafe. Časopis pro pěst. mat., *86* (1961), 1—6.

[9] *D. König*: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig 1936.

[10] *T. Schönberger*: Ein Beweis des Petersenschen Graphensatzes. Acta Litt. ac Sc. (Sectio Math.), Szeged 1934, 51—57.

[11] *A. Kotzig*: Konštrukcia hamiltonovských grafov tretieho stupňa. Časopis pro pěst. mat.

[12] *A. Kotzig*: O istých rozkladoch grafu. Mat. fyz. časopis, *V* (1955), 144—151.

[13] *G. Ringel*: Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen. Berlin 1959.

[14] *A. Errera*: Une vue d'ensemble sur le problem de quatre couleurs. Rendiconti del sem. mat., vol. *11*. Torino 1951—52.

[15] *C. Berge*: Théorie des graphes et ses applications. Paris 1958.

[16] *G. Hajós*: Über eine Konstruktion nicht *n*-färbbarer Graphen. Wissenschaftliche Zeitschrift Univ. Halle, Math.-Nat., *X*/1, 1961, 116—117.

Resumé

O ISTEJ METÓDE SKÚMANIA KONEČNÝCH GRAFOV

ANTON KOTZIG, Bratislava

V práci sa rozoberá metóda skúmania konečných grafov, ktorá spočíva v tom, že sa vyvodzujú a využívajú dôsledky, ktoré vyplývajú z týchto dvoch jednoduchých podmienok kladených na skúmanú vlastnosť (nazvime ju *T-vlastnosť*) grafov istej triedy $\mathfrak{G}$: (1) graf neobsahujúci žiadnu hranu nemá T-vlastnosť; (2) nech grafy G_0, G_1 majú rovnaké množiny uzlov a nech G_0 je podgraf grafu G_1; ak G_0 má T-vlastnosť, potom aj G_1 má T-vlastnosť. Od triedy grafov $\mathfrak{G}$ sa žiada, aby mala túto vlastnosť: ak graf G patrí do $\mathfrak{G}$, potom do $\mathfrak{G}$ patrí každý taký podgraf grafu G, ktorý obsahuje všetky uzly z G.

Ak istá konkrétna T-vlastnosť splňuje podmienky (1), (2), možno v množine $\mathfrak{G}$ definovať funkciu $\tau(G)$ (závislú na voľbe vlastnosti T) takto: (I) $\tau(G) = 0$ ak graf G z $\mathfrak{G}$ nemá T-vlastnosť; (II) $\tau(G) = k$ (k je prirodzené číslo), ak graf G má T-vlastnosť a aj po odstránení ľubovoľných menej než k hrán vznikne vždy graf, ktorý má T-vlastnosť, avšak po odstránení istých k hrán z grafu G vznikne graf, ktorý už nemá T-vlastnosť. Nech $G \in \mathfrak{G}$ je ľubovoľný graf a nech G' je graf, ktorý z neho vznikne odstránením istej jeho hrany h. Hrana h sa nazýva t-hranou v grafe G, ak je $\tau(G') \neq \tau(G)$.

Dôležitým novozavedeným pojmom je *T_k-graf*, ktorý je definovaný takto: nech k je isté prirodzené číslo; graf $G \in \mathfrak{G}$ je T_k-graf práve vtedy, keď je $\tau(G) = k$ a keď každá hrana z G je t-hranou v G.

Dokazuje se táto veta: *Nech v grafe G platí $\tau(G) = k > 0$ a nech j je ľubovoľné číslo prirodzené $\leqq k$, potom existuje aspoň jeden T_j-graf, ktorý je podgrafom grafu G a obsahuje všetky jeho uzly. Ak G^* je ľubovoľný T_k-graf, potom žiadny vlastný podgraf grafu G^* obsahujúci všetky uzly z G^* nie je T_k-graf.*

Dokazuje sa ďalej, že ľubovoľný taký T_k-graf, ktorý je podgrafom grafu G (kde $\tau(G) = k > 0$) a ktorý obsahuje všetky jeho uzly, obsahuje všetky t-hrany grafu G. Definujú sa a študujú ohľadne T-vlastnosti isté binárne relácie v množine hrán grafu.

V ďalšom sa rozoberá sedem konkrétnych prípadov T-vlastnosti: Graf G má T-vlastnosť, keď (1) G je súvislý graf, (2) G je podgrafom daného grafu G', obsahuje všetky jeho uzly a isté dva pevne zvolené uzly v G súvisia, (3) G je orientovaný graf a k ľubovoľným dvom jeho uzlom u, v existuje v grafe G dráha smerujúca z u do v, (4) v G existuje aspoň jeden lineárny faktor, (5) existuje hamiltonovská čiara grafu, (6) G nie je rovinný graf, (7) chromatické číslo grafu G je väčšie než n (n je dané prirodzené číslo).

Summary

ON CERTAIN INVESTIGATIVE METHOD FOR THE FINITE GRAPHS

ANTON KOTZIG, Bratislava

The paper is concerned with a method of studying finite graphs, based on the deduction and the exploitation of the consequences following from two simple conditions lain on the investigated property (we shall call it the T-property) of the graphs of certain class $\mathfrak{G}$: (1) a graph without edges does not have the T-property; (2) if the graphs G_0, G_1 have identical vertices and G_0 is a subgraph of the graph G_1 then G_1 has the T-property if G_0 has the T-property. As for the class $\mathfrak{G}$ of graphs, it is required to have the following property: if a graph G belongs to $\mathfrak{G}$, then each subgraph of the graph G which contains every vertex of G also belongs to $\mathfrak{G}$.

If some concrete T-property satisfies conditions (1) and (2), it is possible to define a function $\tau(G)$ (dependent on the choice of the T-property) on the set $\mathfrak{G}$ thus: (I) $\tau(G) = 0$ if the graph $G \in \mathfrak{G}$ does not have the T-property; (II) $\tau(G) = k$ (k is a positive integer) if G has the T-property and if on cancelling any $n < k$ edges a graph with the T property is obtained, but after cancelling certain k edges from the graph G a graph without the T-property is obtained. Let there be given an arbitrary $G \in \mathfrak{G}$ and let G' be the graph obtained from G by cancelling some edge h. The edge h we shall call a t-edge in the graph G if $\tau(G) \neq \tau(G')$.

An important newly introduced notion is that of a *T_k-graph* which is defined thus: Let k be a positive integer; a graph G is a T_k-graph if and only if $\tau(G) = k$ and if any edge of G is a t-edge in G.

The following theorem is proved: *Let for a graph G, $\tau(G) = k > 0$ and let j be a positive integer $\leqq k$; then there exists at least one T_j-graph which is a subgraph of the graph G and which contains all the vertices of G. If G^* is a T_k-graph, then no proper subgraph of the graph G^* which contains every vertex of G^* is not a T_k-graph.*

Further it is proved that every T_k-graph which is the subgraph of the graph G (where $\tau(G) = k > 0$) and which contains all vertices of G also contains all t-edges of the graph G. Concerning the T-property there are defined certain binary relations in the set of the edges of the graph.

Next, seven concrete cases of T-properties are studied: A graph G has the T-property if (1) G is a connected graph; (2) G is a subgraph of a given graph G', it contains all vertices of G' and certain two fixed vertices are connected in G; (3) G is an oriented graph and to any two of its vertices u, v there exists in G a directed path from u to v; (4) there exists at least one linear factor in G; (5) there exists a Hamiltonian circuit of the graph G; (6) G is not a planar graph; (7) the chromatic number of the graph G is greater than n (n is a given positive integer).