Václav Alda

O vlastních hodnotách diferenciálních rovnic $Mf = \lambda Nf$

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 87 (1962), No. 4, 399--403

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117450

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

# O VLASTNÍCH HODNOTÁCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC $Mf = \lambda Nf$

VÁCLAV ALDA, Liberec

(Došlo dne 5. prosince 1960)

V práci se dokazuje úplnost soustavy vlastních funkcí diferenciální okrajové úlohy $Mf = \lambda Nf$. Na rozdíl od [1] se nepotřebuje, aby operátor $N$ byl positivní, zato řád $M - 2$ musí být větší nebo roven dvojnásobku řádu $N$.

**1.** Důkaz existence nekonečně mnoha vlastních hodnot diferenciální rovnice

$$Mf = \lambda Nf\,, \tag{1}$$

kde $M$, $N$ jsou symetrické diferenciální operátory řádu resp. $m$, $n$ je v [1]. Metoda, tam použitá pochází od E. KAMKEHO; předpokládá se, že $M$, $N$ jsou positivní operátory a nedokazuje se úplnost soustavy vlastních funkcí.

Kromě toho je v [1] metodou integrálních rovnic podán důkaz, včetně úplnosti systému vlastních funkcí, pro operátor $N$ zvláštního tvaru („Eingliedklasse").

Ukážeme, že metody kompaktních operátorů je možno použít i pro obecnější pravou stranu. Při tom nebude třeba předpokládat, že operátor $N$ je positivní, zato bude k vedení důkazu zapotřebí, aby řád $N \leqq 1/2$ (řád $M - 2$).

Pro úplnost poznamenejme, že pro libovolné samoadjungované operátory je dokázaná úplnost soustavy „vlastních funkcí" v [2] pomocí teorie distribucí.

**2.** Interval, ve kterém budeme hledat řešení rovnice (1) nechť je $\langle 0, 1\rangle$. Operátory $M$, $N$ nechť mají tvar:

$$M = p_0 \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} + \dots, \quad N = q_0 \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} + \dots, \tag{2}$$

kde $p_0, \dots, q_0, \dots$ jsou spojité funkce v $\langle 0, 1\rangle$, $p_0(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \langle 0, 1\rangle$. Pro verifikaci samoadjungovanosti potřebujeme i derivabilitu funkcí $p_0, \dots, q_0, \dots$, což nebudeme zvláště uvádět; dále bude derivabilita $p_0, \dots$ potřebná pro existenci derivací Greenovy funkce.

Pro řešení rovnice (1) nechť jsou předepsány okrajové podmínky

$$U_1 f = U_2 f = \dots = U_m f = 0\,, \tag{3}$$

kde $U_i f$ jsou lineární výrazy v $f(0), \dots, f^{(m-1)}(0), f(1), \dots, f^{(m-1)}(1)$. Za těchto okrajových podmínek nechť jsou operátory $M$, $N$ symetrické.

Konečně budeme předpokládat, že okrajová úloha

$$(4_1) \qquad Mf = 0\,,$$

$$(4_2) \qquad U_1 f = \ldots = U_m f = 0$$

má jen triviální řešení $f = 0$.

Potom úloha

$$(5) \qquad Mf = \varphi\,, \quad U_1 f = \ldots = U_m f = 0$$

má řešení $f(x) = \int_0^1 G(x, t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t$, což budeme psát $f = M^{-1}\varphi$.

Rovnice (1) je potom

$$f = \lambda M^{-1} N f\,.$$

$\mathfrak{H}$ nechť je prostor funkcí $f$ s $\int_0^1 |f(t)|^2\, \mathrm{d}t < \infty$. V něm vezmeme lineární varietu $\mathfrak{M}$ těch funkcí, které mají $m$-tou derivaci integrovatelnou v kvadrátě a vyhovují okrajovým podmínkám $(4_2)$. $\mathfrak{M}$ je hustá v $\mathfrak{H}$.

**3.** Připomeňme, že funkce $G(x, t)$ má spojité derivace

$$\frac{\partial^{\nu+\nu'} G(x, t)}{\partial x^\nu\, \partial t^{\nu'}}$$

pro $\nu + \nu' \leqq m - 2$ a $x, t \in \langle 0, 1 \rangle$.

**4.** Předpokládejme nakonec, že $M$ je kladný operátor, tj.

$$(Mf, f) > 0 \quad \text{pro} \quad f \in \mathfrak{M},\ f \neq 0\,.$$

Zavedeme v $\mathfrak{M}$ skalární součin $[f, g] = (Mf, g)$. Tím dostaneme v $\mathfrak{M}$ novou normu – $M$-normu. Vzhledem k existenci positivního operátoru $M^{-1}$ je ovšem $M$ positivně definitní a tedy úplný obal $\mathfrak{M}_1$ v $M$-normě lin. variety $\mathfrak{M}$ je částí $\mathfrak{H}$.

O operátoru $N$ předpokládejme, že je řádu $n \leqq \frac{1}{2}m - 1$ a za jeho definiční obor považujeme množinu $\mathfrak{M}$.

Platí toto:

**Lemma 1.** *Je-li $N$ symetrický na $\mathfrak{M}$, pak $M^{-1}N$ je v $M$-normě rovněž symetrický.*

To plyne z následujícího řetězce rovnic, platných pro $f, g \in \mathfrak{M}$:

$$[M^{-1}Nf, g] = (MM^{-1}Nf, g) = (Nf, g) = (f, Ng) = [f, M^{-1}Ng]\,.$$

Dále platí:

**Lemma 2.** *Je-li $N$ na $\mathfrak{M}$ symetrický a $2n \leqq m - 2$, pak operátor $M^{-1}N$ je v $M$-normě symetrický kompaktní operátor.*

Důkaz. Předně je $NM^{-1}N$ kompaktní. Je totiž

$$M^{-1}N f(x) = \int_0^1 G(x, t) \left( \sum_{\nu=0}^{n} q_\nu \frac{\mathrm{d}^\nu}{\mathrm{d}t^\nu} f(t) \right) \mathrm{d}t\,.$$

Integrál $\int_0^1 G(x, t)\, N f(t)\, \mathrm{d}t$ je pro každé $x \in \langle 0, 1 \rangle$ skalární součin $(N f(t), \overline{G(x, t)})$.

Nyní je $\overline{G(x, t)} = G(t, x)$, protože okrajová úloha (5) je samoadjungovaná, a proto $\int_0^1 \ldots = (Nf, G(., x))$.

Funkce $G(., x)$ má spojité derivace do řádu $m - 2$ a vyhovuje okrajovým podmínkám (jako funkce prvního argumentu).

Položme pro zvolené $x$

$$\gamma_1 = G(., x)(1 - \omega), \quad \gamma_2 = G(., x)\,\omega,$$

kde $\omega$ je třídy $C^\infty$, má dostatečně malý nosič a v okolí bodu $x$ je $\omega(t) = 1$.

$\gamma_1$ má derivaci spojitou do řádu $n$ a vyhovuje okrajovým podmínkám $(4_2)$. Proto $\gamma_1 \in \mathfrak{M}$ a tedy $(Nf, \gamma_1) = (f, N\gamma_1)$.

$\gamma_{2h}$ nechť je regularisovaná $\gamma_2$ s dostatečně malým parametrem $h$. Potom $\gamma_{2h} \in \mathfrak{M}$.

Nyní $\gamma_2^{(v)}$ pro $v \leqq m - 2$ jsou spojité a nosič $\gamma_2$ leží uvnitř $(0, 1)$, a proto $\gamma_{2h}^{(v)} \to \gamma_2^{(v)}$ stejnoměrně v $\langle 0, 1\rangle$ pro $v \leqq m - 2$.

Jednak je $(Nf, \gamma_{2h}) \to (Nf, \gamma_2)$; na druhé straně platí

$$(Nf, \gamma_{2h}) = (f, N\gamma_{2h}) = \int_0^1 f(t)\,\overline{\sum q_v \gamma_{2h}^{(v)}}\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 f(t)\,\overline{\sum q_v \gamma_2^{(v)}}\,\mathrm{d}t = (f, N\gamma_2)$$

vzhledem k našemu předpokladu o $n$, $m$.

Z toho dostáváme

$$(Nf, G(., x)) = (Nf, \gamma_1 + \gamma_2) = (f, NG(., x)) =$$
$$= \int_0^1 f(t)\,\overline{\sum q_v \frac{\partial^v}{\partial t^v} G(t, x)}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t) \sum \bar{q}_v \frac{\partial^v}{\partial t^v} G(x, t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Zde, a rovněž v dalším, činíme předpoklad $f \in \mathfrak{M}$. To stačí, neboť $\mathfrak{M}$ je v $\mathfrak{H}$ hustá a pro ostatní $f \in \mathfrak{H}$ to plyne ze spojitosti.

Nyní $(NM^{-1}Nf)(x)$ je

$$\sum_{v'=0}^{n} q_{v'}(x) \frac{\mathrm{d}^{v'}}{\mathrm{d}x^{v'}} \int_0^1 \left(\sum_{v=0}^{n} \bar{q}_v \frac{\partial^v}{\partial t^v} G(x, t)\right) f(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^1 \sum_{v'=0}^{n} \sum_{v=0}^{n} \overline{q_v(t)}\, q_{v'}(x) \frac{\partial^{v+v'}}{\partial t^v\,\partial x^{v'}} G(x, t) f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \Gamma(x, t) f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

kde $\Gamma$ je spojitou funkcí $(x, t)$.

Vezměme takovou posloupnost $\{f_n\}$, $f_n \in \mathfrak{M}$, aby byla omezená v $M$-normě. Protože je

$$(Mf, f) \geqq \gamma \|f\|^2\,, \quad \gamma > 0\,,$$

e $\|f_n\| \leqq k$ s vhodným $k$ a můžeme tedy předpokládat, že

$$NM^{-1}Nf_n \to \varphi \in \mathfrak{H}\,.$$

To ale znamená, že

$$\|NM^{-1}\,N(f_n - f_m)\| < \varepsilon$$

pro dostatečně velká $n$, $m$.

Nyní odhadněme $M$-normu $M^{-1} N(f_n - f_m)$. Její kvadrát je

$$(MM^{-1} N(f_n - f_m),\ M^{-1} N(f_n - f_m)) =$$
$$= (f_n - f_m,\ NM^{-1} N(f_n - f_m)) \leqq \|NM^{-1} N(f_n - f_m)\| \cdot \|f_n - f_m\| \leqq 2k\varepsilon\,.$$

Je tedy $\{M^{-1}Nf_n\}$ cauchyovská v $M$-normě a tedy konvergentní v $\mathfrak{M}_1$.

**5.** Aby $M^{-1}Nf \neq 0$ pro $f \neq 0$, je nutné a stačí, aby na $\mathfrak{M}$ bylo $Nf \neq 0$ pro $f \neq 0$.

Místo $Mf = \lambda Nf$ můžeme na $\mathfrak{M}$ psát $f = \lambda M^{-1}Nf$ nebo

$$M^{-1}Nf = \mu f\,. \tag{6}$$

Za podmínky prve uvedené není $\mu = 0$ vlastní hodnotou rovnice (6), takže (1) a (6) jsou ekvivalentní.

Z věty o vlastních hodnotách kompaktních symetrických operátorů a předchozího lemma plyne existence nekonečně mnoha vlastních hodnot a úplnost soustavy vlastních funkcí naší okrajové úlohy (v prostoru $\mathfrak{M}_1$ s $M$-metrikou).

Pro výpočet absolutní hodnoty $(n + 1)$-ní vlastní hodnoty slouží výrazy

$$\inf \frac{[u, u]}{|[M^{-1}Nu, u]|} = \inf \frac{(Mu, u)}{|(Nu, u)|}\,,$$

kde $u \in \mathfrak{M}_1$, za předpokladu $[u, \varphi_1] = \ldots = [u, \varphi_n] = 0$ a $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ je prvních $n$ vlastních funkcí.

Podmínky $[u, \varphi_1] = \ldots = 0$ se ovšem zapíší ve tvaru $(u, M\varphi_1) = \ldots = 0$. Protože $M\varphi_1 = \lambda_1 N\varphi_1, \ldots$ a $\lambda_1 \neq 0, \ldots$, můžeme prve napsané podmínky psát $(u, N\varphi_1) = = \ldots = 0$. Tím dostáváme známé vzorce.

### *Literatura*


[1] *Collatz L.*: Eigenwertaufgaben. Leipzig 1949.

[2] *Гельфанд I. M.-Шилов Г. E.*: Обобщеные функции. Вып. 3. Москва 1958.


## Резюме

## О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $Mf = \lambda Nf$


ВАЦЛАВ АЛЬДА (Václav Alda), Либерец



В работе дается доказательство полноты системы собственных функций дифференциального уравнения (1) при выполнении краевых условий (3). В отличие от [1] не требуется здесь, чтобы оператор $N$ был положительным, но зато надо предположить, что $m - 2 \geqq 2n$, где $m, n$ — порядки операторов $M$, $N$.

Summary

## ON EIGENVALUES OF THE DIFFERENTIAL EQUATION $Mf = \lambda Nf$

VÁCLAV ALDA, Liberec

In this paper a proof is given of completeness of the system of eigenfunctions of the differential equation (1) under boundary conditions (3). In comparison with [1], it is not required that $N$ be positive, but we require $m - 2 \geqq 2n$, where $m$, $n$ are the orders of $M$, $N$ respectively.