Časopis pro pěstování matematiky

Bohumil Veselský

O orthocentrické přímce čtyrstranu

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 87 (1962), No. 3, 257--262

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117430

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATEMATIKY

Vydává Matematický ústav ČSAV, Praha

SVAZEK 87 * PRAHA 24. VIII. 1962 * ČÍSLO 3

O ORTHOCENTRICKÉ PŘÍMCE ČTYRSTRANU

BOHUMIL VESELSKÝ, Brno

(Došlo dne 4. ledna 1960)

V práci jsou popsány některé vlastnosti orthocentrické přímky čtyrstranu tvořeného vhodně vybranými skupinami čtyř přímek ze stran a diagonál rovinného čtyřúhelníka a souvislost orthocentrických přímek takových čtyrstranů s orthocentrem tětivového čtyřúhelníka.

Čtyrstranem budeme rozuměti skupinu čtyř přímek, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí týmž bodem. Je-li v rovině dána skupina čtyř přímek splňující definici čtyrstranu, pak průsečíky každých dvou přímek nazveme *vrcholy* čtyrstranu a spojnici dvou vrcholů, která do dané skupiny nepatří, nazveme *diagonálou* čtyrstranu. *Diagonální úsečkou* nazveme úsečku na diagonále, jejíž koncové body jsou vrcholy dané skupiny.

J. STEINER uvádí (Ges. Werke 1, str. 128), že orthocentra trojúhelníků tvořených vždy třemi stranami čtyrstranu, leží na téže, tzv. orthocentrické přímce čtyrstranu. Definici čtyrstranu rozšíříme pro případ skupiny čtyř přímek, z nichž právě dvě jsou rovnoběžné a řádné tři neprocházejí týmž bodem. Pro tuto skupinu budeme orthocentrickou přímkou rozuměti kolmici spuštěnou na rovnoběžky z průsečíku zbývajících dvou přímek.

Věta 1. *Nechť je v rovině dána skupina čtyř přímek splňující definici čtyrstranu. Kružnice opsané nad diagonálními úsečkami jako průměry jsou koaxiální a jejich společná chordála je orthocentrickou přímkou daného čtyrstranu.*

Důkaz. Označme vrcholy dané skupiny jako A, B, C, D, P, Q (viz obr. 1). Nechť O_1 značí orthocentrum trojúhelníka $\triangle AQD$. Paty kolmic spuštěných na strany trojúhelníka $\triangle AQD$ z vrcholů A, Q, D označme A_1, Q_1, D_1 v tomto pořadí. Nechť $k_i (i = 1, 2, 3)$ jsou kružnice opsané nad diagonálními úsečkami jako průměry. Trojúhelníky $\triangle O_1A_1D$, $\triangle O_1D_1A$ jsou podobné, z čehož plyne

$$\overline{O_1A_1} \cdot \overline{O_1A} = \overline{O_1D_1} \cdot \overline{O_1D} . \tag{1}$$

Také trojúhelníky $\triangle O_1Q_1D$, $\triangle O_1D_1Q$ jsou podobné. Máme tedy

$$\overline{O_1D} \cdot \overline{O_1D_1} = \overline{O_1Q_1} \cdot \overline{O_1Q} . \tag{2}$$

Spojením rovnic (1) a (2) dostáváme

$$(3) \qquad \overline{O_1A_1} \,.\, \overline{O_1A} = \overline{O_1D} \,.\, \overline{O_1D_1} = \overline{O_1Q_1} \,.\, \overline{O_1Q} \,.$$

Bod A_1 resp. D_1 resp. Q_1 je bodem kružnice k_1 resp. k_2 resp. k_3, protože jest $\sphericalangle AA_1C = \frac{1}{2}\pi$ resp. $\sphericalangle DD_1B = \frac{1}{2}\pi$ resp. $\sphericalangle PQ_1Q = \frac{1}{2}\pi$. Rovnice (3) tedy vyjadřuje že mocnost bodu O_1 ke kružnicím k_i ($i = 1, 2, 3$) je stejná, je tedy bod O_1 buď potenčním středem nebo bodem společné chordály kružnic k_i ($i = 1, 2, 3$).

Provedeme-li stejnou úvahu např. pro orthocentrum O_2 trojúhelníka $\triangle ABP$, zjistíme, že opět jeho mocnost ke kružnicím k_i ($i = 1, 2, 3$) je stejná. Existují dva body mající stejnou mocnost ke kružnicím k_i ($i = 1, 2, 3$), musí tedy existovati společná chordála těchto kružnic, což je ovšem spojnice bodů O_1, O_2. Tato přímka je podle uvedeného Steinerova tvrzení orthocentrickou přímkou čtyrstranu.

Popsaná úvaha se nedá aplikovat v případě, že např. $\sphericalangle ADC = \frac{1}{2}\pi$. S bodem D splynou orthocentra O_1 resp. O_2 trojúhelníků $\triangle AQD$ resp. $\triangle DCP$. Bod D je však společným bodem kružnic k_i ($i = 1, 2, 3$), jak plyne z předpokladu $\sphericalangle ADC = \frac{1}{2}\pi$, tedy tímto bodem musí procházet společná chordála uvedených kružnic.

Snadno se vidí, že i pro rozšířenou definici čtyrstranu bude tvrzení věty platit. Nechť dvojice rovnoběžných stran jsou spojnice vrcholů A, B; C, D. Budeme ovšem uvažovat pouze chordálu kružnic k_i ($i = 1, 2$) opsaných nad diagonálními úsečkami AC, BD.

Uvažujme podobné trojúhelníky

$$\triangle PC_1C \sim \triangle PB_1B \,, \quad \triangle PCD \sim \triangle PBA \,,$$

kde $B_1(C_1)$ je průsečík kolmice vedené bodem $B(C)$ na stranu AD.

Platí vztahy

$$\overline{PD} : \overline{PA} = \overline{PC} : \overline{PB} \,, \quad \overline{PC_1} : \overline{PB_1} = \overline{PC} : \overline{PB} \,.$$

Z rovnosti pravých stran těchto rovnic plyne

$$\overline{PD} : \overline{PA} = \overline{PC_1} : \overline{PB_1}$$

a tedy

$$\overline{PD} \,.\, \overline{PB_1} = \overline{PC_1} \,.\, \overline{PA} \,.$$

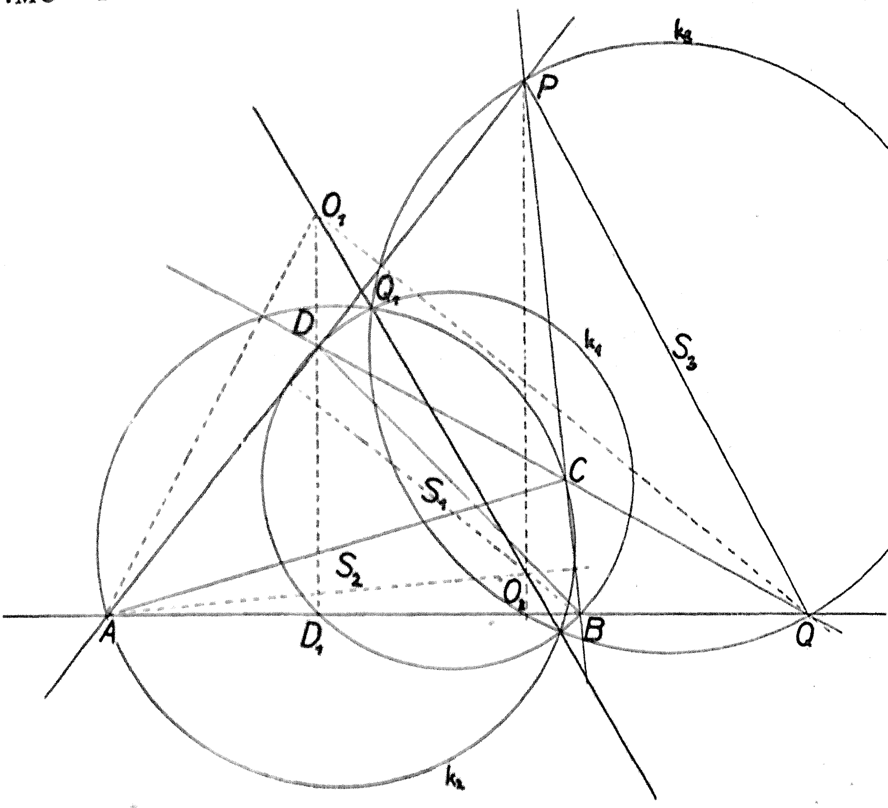
Body D, B_1 (C_1, A) jsou však průsečíky přímky AB s kružnicí k_1 (k_2). Předcházející rovnice tedy vyjadřuje, že bod P je bodem chordály kružnic k_1, k_2. Středná obou uvažovaných kružnic je rovnoběžná s dvojicí rovnoběžných stran a chordála těchto kružnic je kolmá na střednou, tedy kolmá na rovnoběžné strany. Na této chordále opět leží orthocentra obou uvažovaných trojúhelníků, je tedy opět orthocentrickou přímkou daného čtyrstranu.

Pomocí tohoto výsledku lze velmi jednoduše dokázat tvrzení vyslovené L. Kosmákem v práci [1].

Věta 2. *Nechť body A, B, C, D nejsou vrcholy rovnoběžníka a nechť žádné tři z nich neleží na téže přímce. Pak tyto body leží na kružnici právě tehdy, když ortho-*

centrická přímka čtyrstranu o vrcholech A, B, C, D buď prochází průsečíkem diagonál, nebo neprotínají-li se tyto diagonály, je s nimi rovnoběžná.

Důkaz. Nechť body A, B, C, D leží na kružnici. Vhodným označením lze docíliti toho, aby diagonály byly přímky spojující body A, C a B, D. Označíme průsečík diagonál jako bod M. Mocnost bodu M ke kružnici opsané čtyřúhelníku $ABCD$ je $\overline{AM}\,.\,\overline{MC} = \overline{BM}\,.\,\overline{MD}$.



Obr. 1.

V souhlasu s označením předcházející věty je však levá strana této rovnice vyjádřením mocnosti bodu M ke kružnici k_1 a pravá strana mocností bodu M ke kružnici k_2. Rovnost obou výrazů však znamená, že bod M je bodem chordály kružnic k_1, k_2, tedy, vzhledem k předcházející větě, bodem orthocentrické přímky čtyrstranu o diagonálách AC, BD.

Nechť naopak orthocentrická přímka prochází průsečíkem diagonál. Protože však je chordálou kružnic k_1, k_2, je $\overline{AM}\,.\,\overline{MC} = \overline{BM}\,.\,\overline{MD}$, kde M opět značí průsečík diagonál. Tato rovnice však vyjadřuje, že body A, B, C, D leží na kružnici, c. b. d.

Nechť body A, B, C, D v rovině jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníka. Uvažujme skupinu přímek tvořenou stranami a diagonálami tohoto čtyřúhelníka. Protějšími přímkami k některému z vrcholů budeme rozumět přímky z uvažované skupiny, které tímto bodem neprocházejí. Body A, B, C, D uspořádáme do dvou skupin po dvou. Toto uspořádání lze zřejmě provésti trojím způsobem. Zvolme jedno z těchto uspořádání a z bodů, které patří téže dvojici, spusťme kolmice na společné protější přímky. Paty těchto kolmic označme A_i, B_i, C_i, D_i, $i = 1, 2, 3$, kde index i patří vždy jednomu výběru dvojic z bodů A, B, C, D.

Z věty 2 práce [2] plyne

$$\overline{A_iA_j} = \overline{B_iB_j} = \overline{C_iC_j} = \overline{D_iD_j}\,, \quad i \neq j\,, \quad i, j = 1, 2, 3\,.$$

Nechť je dán čtyřúhelník $ABCD$. Je známo, že spojnice vrcholů čtyřúhelníka s orthocentry protějších trojúhelníků se protínají v jednom bodě. Tento průsečík se nazývá *orthocentrum tětivového čtyřúhelníka*. Simsonovy přímky trojúhelníků protějších vrcholům tětivového čtyřúhelníka se podle předcházejícího protínají v jednom bodě, a protože každá z nich prochází středem úsečky spojující vrchol čtyřúhelníka s orthocentrem protějšího trojúhelníka a protože v tětivovém čtyřúhelníku jsou tyto středy totožné, je zřejmě průsečík Simsonových přímek orthocentrem a tedy i společný střed kružnic k_i, $i = 1, 2, 3$ je orthocentrem tětivového čtyřúhelníka.

Z předcházejících úvah plyne jednoduchá konstrukce orthocentra tětivového čtyřúhelníka, která je vyjádřena následující větou:

Věta 3. *Konvexní čtyřúhelník je tětivový, právě když kolmice spuštěné ze středů stran na strany protější se protínají v jednom bodě. Tento průsečík je orthocentrem uvažovaného čtyřúhelníka.*

Důkaz. Je-li čtyřúhelník tětivový, pak z kružnic k_i, $i = 1, 2, 3$ nebudeme uvažovat tu, na které leží paty kolmic spuštěné z dvojic vrcholů, jejichž protější přímky jsou diagonálami čtyřúhelníka. Z konstrukce středu zbývajících dvou kružnic plyne ihned tvrzení věty.

Obráceně je opět tvrzení důsledkem věty 2 práce [2].

Uvedených výsledků použijeme k důkazu následující věty:

Věta 4. *Nechť body A, B, C, D nejsou vrcholy rovnoběžníka a nechť žádné tři z nich neleží v přímce. Body A, B, C, D leží na kružnici, právě když se orthocentrické přímky čtyrstranů o vrcholech A, B, C, D protínají v jednom bodě, který jest orthocentrem čtyřúhelníka $ABCD$.*

Důkaz. V souhlasu s označením obr. 2 je

$$\mathit{12} \parallel \mathit{1'2'}\,; \quad \mathit{23} \parallel \mathit{2'3'}\,; \quad \mathit{31} \parallel \mathit{3'1'}\,,$$

protože

$$\mathit{12} \perp AD\,, \ \mathit{1'2'} \perp AD\,; \quad \mathit{23} \perp AC, \ \mathit{2'3'} \perp AC\,; \quad \mathit{31} \perp CD, \ \mathit{3'1'} \perp CD\,.$$

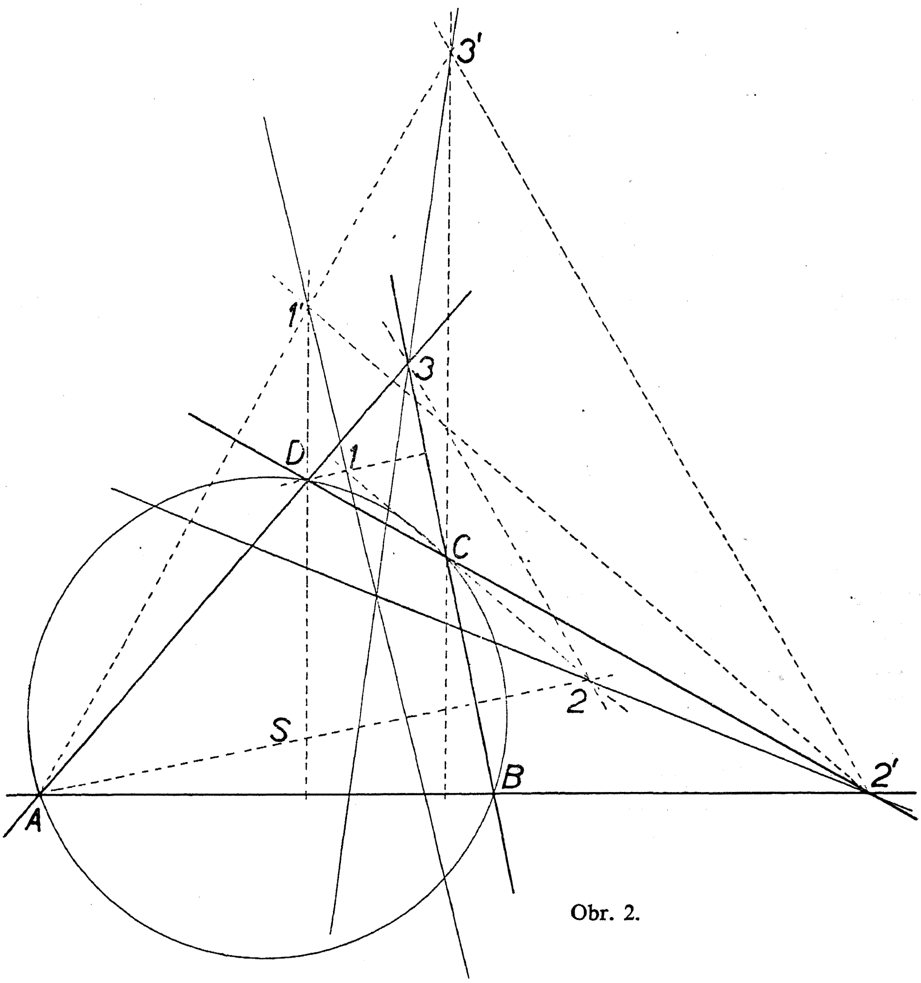
Trojúhelníky $\triangle\,\mathit{123}$, $\triangle\,\mathit{1'2'3'}$ jsou stejnolehlé. Spojnice odpovídajících si bodů $\mathit{1}$, $\mathit{1'}$ a $\mathit{2}$, $\mathit{2'}$ se protnou ve středu stejnolehlosti $\mathit{0}$.

Body A, B, C, D nechť leží na kružnici. Podle věty 2 prochází orthocentrická přímka průsečíkem diagonál, což je bod $\mathit{3}$. Spojnice bodů $\mathit{3}$, $\mathit{3'}$, což však je třetí orthocentrická přímka, musí procházeti bodem $\mathit{0}$, jak plyne ze stejnolehlosti.

Naopak z existence středu stejnolehlosti *0* plyne, že bod *3* musí ležet na spojnici *03'*, což však znamená, že orthocentrická přímka prochází průsečíkem diagonál. Podle věty 2 leží tedy body *A*, *B*, *C*, *D* na kružnici.

Pomocí věty 2 práce [2] a uvedených vlastností Simsonových přímek je snadno patrna zbývající část tvrzení věty.

V případě, že právě dvě strany čtyřúhelníka *ABCD* jsou rovnoběžné, orthocentrické přímky dvou z popsaných čtyrstranů splynou a tvrzení je evidentní.



Obr. 2.

Literatura

[1] *L. Kosmák*: Charakterisace tětivových a tečnových mnohoúhelníků, Čas. pro pěst. matematiky *80* (1955), 454–461.

[2] *B. Veselský*: Poznámka k některým vlastnostem tětivového čtyřúhelníka, Čas. pro pěst. matematiky, *87* (1962).

ОБ ОРТОЦЕНТРИЧЕСКОЙ ПРЯМОЙ ЧЕТЫРЕХСТОРОННИКА

ВОГУМИЛ ВЕСЕЛЬСКИЙ (Bohumil Veselský), Брно

Ортоцентрической прямой четырехсторонника мы назовем прямую, на которой лежат ортоцентры треугольников, образованных тройками прямых из сторон четырехсторонника. Главные результаты работы содержатся в следующих двух теоремах:

Пусть в плоскости дана совокупность четырех прямых, удовлетворяющая определению четырехсторонника. Окружности, описанные над диагональными отрезками, нак над диаметрами, имеют общую ось а их общая радикальная ось является ортоцентрической прямой данного четырехсторонника.

Пусть точки A, B, C, D не являются вершинами параллелограмма и пусть никакие три из них не лежат на одной прямой. Точки A, B, C, D лежат на окружности, если и только если ортоцентрические прямые четырехсторонников с вершинами в этих точках пересекаются в одной точке, являющейся ортоцентром данного четырехугольника.

ON THE ORTHOCENTRIC LINE OF A 4-LINE

Bohumil Veselský, Brno

An orthocentric line of a 4-line is the line, on which there lie the orthocenters of triangles whose sides are the lines of the 4-line. The main results of this paper are included in following two theorems:

Consider a set of four lines in a plane which is a 4-line. The circles, whose diameters are the diagonal segments, are coaxial and their radical axis is the orthocentric line of the given 4-line.

Let A, B, C, D be points on a plane, which are not vertices of a parallelogram and let no line pass through any three of them. The points A, B, C, D lie on a circle if and only if the orthocentric lines of 4-lines with vertices in these points intersect in a single point, which is the orthocenter of the given quadrangle.