Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

POZNÁMKA K NĚKTERÝM VLASTNOSTEM TĚTIVOVÉHO ČTYŘÚHELNÍKA

BOHUMIL VESELSKÝ, Brno

(Došlo dne 14. září 1960)

V práci je pomocí komplexně sdružených souřadnic dokazováno několik vět z geometrie čtyřúhelníka, kterých bude použito ke studiu některých vlastností orthocentrické přímky čtyrstranu v dalším článku.

Komplexně sdružené souřadnice x, y bodu v rovině jsou definovány rovnicemi

$$x = X + iY, \quad y = X - iY,$$

kde X, Y jsou kartézské souřadnice uvažovaného bodu.

Jestliže body A_i jsou vrcholy tětivového čtyřúhelníka, pak kružnici tomuto čtyřúhelníku opsanou zvolme za jednotkovou a souřadnice bodů A_i označme t_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Elementární symetrické funkce komplexních jednotek t_i označme σ_i, $i = 1, 2, 3, 4$.

Body A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, z nichž žádné tři neleží v přímce, uspořádáme do dvou skupin po dvou, což lze zřejmě provésti trojím způsobem, a každému z těchto uspořádání přiřadíme určitý index p z hodnot $p = 1, 2, 3$. Pro stručnější vyjadřování nazveme přímky, které procházejí dvojicemi z daných bodů tak, že jejich průsečíkem není žádný z bodů A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, *protější.*

Zvolme postupně vždy jedno z uvedených uspořádání bodů A_i, $i = 1, 2, 3, 4$ a v bodech téže dvojice vztyčme kolmice na přímku, která jimi prochází. Průsečíky těchto kolmic s protější přímkou k spojnici uvažované dvojice označme ${}^pA'_i$, $i = 1, 2, 3, 4$; $p = 1, 2, 3$. Potom platí tato věta, v níž označení bodů ${}^pA'_i$ má význam právě uvedený.

Věta 1. *Jestliže body A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, z nichž žádné tři neleží v přímce a pro něž platí, že z přímek, které procházejí dvojicemi z těchto bodů, žádné dvě protější přímky nejsou na sebe kolmé, leží na kružnici, potom body ${}^pA'_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ pro pevné p z hodnot $p = 1, 2, 3$ příslušející určitému výběru dvojic z bodů A_i, leží na kružnici. Středy těchto kružnic leží na přímce, která prochází středem kružnice, na níž dané body A_i leží.*

Důkaz. Uvažujme na příklad uspořádání bodů A_i, $i = 1, 2, 3, 4$ do dvojic A_1, A_2; A_3, A_4 a tomuto uspořádání přiřaďme index $p = 1$. Zvolíme-li souřadnicový systém tak, aby kružnice, na níž tyto body leží byla jednotková a označíme-li t_i komplexní jednotky příslušející bodům A_i a souřadnice bodů ${}^1A'_i$ jako ${}^1a'_i$, kde $i = 1, 2, 3, 4$ a dále

$$t_1t_2 + t_3t_4 = Q_1 \neq 0\,,$$

jak plyne z druhého předpokladu věty, potom

$${}^1a'_1 = \frac{\sigma_3 - 2t_1t_3t_4}{Q_1}\,, \quad {}^1a'_2 = \frac{\sigma_3 - 2t_2t_3t_4}{Q_1}\,, \quad {}^1a'_3 = \frac{\sigma_3 - 2t_1t_2t_3}{Q_1}\,,$$

$${}^1a'_4 = \frac{\sigma_3 - 2t_1t_2t_4}{Q_1}\,.$$

Tyto body leží na kružnici o rovnici

(1) $$\left(x - \frac{\sigma_3}{Q_1}\right)\left(y - \frac{\sigma_1}{Q_1}\right) = \frac{4\sigma_4}{Q_1}\,.$$

Označíme-li

$$Q_2 = t_1t_4 + t_2t_3\,, \quad Q_3 = t_1t_3 + t_2t_4\,,$$

pak je

$$\bar{Q}_p = \frac{Q_p}{\sigma_4}\,, \quad p = 1, 2, 3\,.$$

Středy kružnic tvaru (1) leží na přímce

$$-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}x + y = 0\,,$$

která, jak je vidět, prochází počátkem souřadnic, což je střed kružnice, na níž body A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, leží.

Proveďme nyní tuto konstrukci: Zvolme postupně vždy jedno uspořádání bodů A_i do dvojic a z bodů, které patří téže dvojici spusťme kolmice na společné protější přímky a jejich paty označme ${}^pA_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, $p = 1, 2, 3$, kde opět index p přísluší určitému uspořádání bodů A_i. O vzájemné poloze bodů ${}^pA_i$, kde i, p probíhají předepsané hodnoty, mluví následující věta:

Věta 2. *Body A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, z nichž žádné tři neleží v přímce, jsou vrcholy tětivového čtyřúhelníka, právě když body ${}^pA_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, pro pevné p z hodnot $p = 1, 2, 3$ leží na kružnici. Tyto kružnice jsou soustředné a jejich společný střed je orthocentrem čtyřúhelníka $A_1 \ldots A_4$.*

Důkaz. Nechť body A_i, $i = 1, 2, 3, 4$ jsou vrcholy tětivového čtyřúhelníka a nechť kružnice tomuto čtyřúhelníku opsaná je jednotková. Body A_i uspořádáme po dvou na příklad takto: $A_1, A_2; A_3, A_4$ a tomuto uspořádání přiřadíme index $p = 1$. Potom souřadnice bodů ${}^1A_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ budou

$$ {}^1a_1 = \frac{1}{2}\left(t_1 + t_3 + t_4 - \frac{t_3t_4}{t_1}\right), \quad {}^1a_2 = \frac{1}{2}\left(t_2 + t_3 + t_4 - \frac{t_3t_4}{t_2}\right), $$

$$ {}^1a_3 = \frac{1}{2}\left(t_1 + t_2 + t_3 - \frac{t_1t_2}{t_3}\right), \quad {}^1a_4 = \frac{1}{2}\left(t_1 + t_2 + t_4 - \frac{t_1t_2}{t_4}\right). $$

Tyto body leží na kružnici o rovnici

$$ \left(x - \frac{\sigma_1}{2}\right)\left(y - \frac{\sigma_3}{2\sigma_4}\right) = \frac{1}{4\sigma_4} Q_1^2, \tag{2} $$

jejíž střed je bod

$$ x = \frac{\sigma_1}{2}, $$

což je orthocentrum čtyřúhelníka A_i. Poloha tohoto středu je však na výběru dvojic z daných bodů A_i nezávislá, tedy kružnice, popsaným dvojicím příslušející, jsou soustředné.

Rozborem rovnice (2) najdeme podmínky, kdy tyto soustředné kružnice po dvou splývají nebo se redukují na bod.

V případě, že je

$$ Q_1 = t_1t_2 + t_3t_4 = 0, $$

což se dá přepsati do tvaru

$$ \frac{1}{t_1t_2} = -\frac{1}{t_3t_4}, $$

je poloměr kružnice nulový. Z podmínky $Q_1 = 0$ vidíme, že to nastane v případě kolmosti dvou protějších stran čtyřúhelníka (nebo diagonál). V případě kolmosti dvou sousedních stran jsou i zbývající dvě strany na sebe kolmé. Označení lze vždy voliti tak, aby dvojice kolmých stran byly strany A_1A_2, A_1A_4, což lze vyjádřiti vztahem $t_1t_2 = -t_1t_4$ a také, jak již bylo uvedeno $t_2t_3 = -t_3t_4$.

Z těchto rovnic vyplývá

$$ (t_1t_2 + t_3t_4)^2 = (t_1t_4 + t_2t_3)^2, $$

což vyjadřuje, že poloměry příslušných kružnic jsou stejné; tedy tyto dvě kružnice splývají.

Důkaz této věty opačným směrem je přímým důsledkem předcházející věty 1. Silnější podmínky, které jsou ve vzpomenuté větě kladeny na vzájemnou polohu bodů A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, zřejmě nijak neomezují správnost důkazu.

K zajímavým výsledkům o vzájemné poloze bodů ${}^pA_i$, ${}^pA'_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, $p = 1, 2, 3$ dojdeme i tehdy, jestliže index i zvolíme pevně a p necháme probíhat příslušné hodnoty. Body ${}^pA_i$, $p = 1, 2, 3$ pro pevné i leží na přímce, která je Simpsonovou přímkou trojúhelníka protějšího vrcholu A_i pro příslušné zvolené i. Tyto přímky jsou ve vztahu, který je vyjádřen následující větou (viz [1]):

Věta 3. *Simsonovy přímky trojúhelníků protějších vrcholům tětivového čtyřúhelníka se protínají v jeho orthocentru.*

Důkaz. Simsonova přímka trojúhelníka protějšího k vrcholu $A_i(t_i)$ jde patami kolmic spuštěných z tohoto bodu na jeho strany, které byly v předcházejícím označeny ${}^pA_i$, $p = 1, 2, 3$, i pevné z hodnot $i = 1, 2, 3, 4$. Její rovnice je

$$(3) \qquad -\frac{t_i x}{s_3} + y = \frac{s_2}{2s_3} + \frac{1}{2t_i} - \frac{s_1 t_i}{2s_3} - \frac{t_i^2}{2s_3}, \quad i = 1, 2, 3, 4\,.$$

Společným bodem těchto přímek je bod

$$x = \frac{\sigma_1}{2},$$

což je orthocentrum čtyřúhelníka.

O vzájemné poloze bodů ${}^pA'_i$, $p = 1, 2, 3$ pro pevné i platí

Věta 4. *Jestliže body A_i, $i = 1, 2, 3, 4$ jsou vrcholy tětivového čtyřúhelníka, pak body ${}^pA'_i$, $p = 1, 2, 3$ pro pevně zvolené i leží na přímce. Tyto přímky se protínají ve středu kružnice čtyřúhelníku opsané.*

Důkaz. Body ${}^pA'_i$ tvaru

$${}^1a'_i = \frac{\sigma_3 - \dfrac{2\sigma_4}{t_k}}{Q_1}, \quad {}^2a'_i = \frac{\sigma_3 - \dfrac{2\sigma_4}{t_k}}{Q_2}, \quad {}^3a'_i = \frac{\sigma_3 - \dfrac{2\sigma_4}{t_k}}{Q_3},$$

kde Q_1, Q_2, Q_3 mají význam uvedený ve větě 2 a t_k je souřadnice bodu A_k, kde A_k je druhý bod dvojice vrcholů čtyřúhelníka, do které jsme zařadili bod A_i, leží na přímkách

$$-\frac{\sigma_1 - 2t_k}{\sigma_3 - \dfrac{\sigma_4}{t_k}}\, x + y = 0\,, \quad k = 1, 2, 3, 4\,,$$

které procházejí počátkem souřadnic, což však je střed kružnice čtyřúhelníku opsané.

V této souvislosti uveďme ještě řešení problému, který položil prof. KAREL KOUTSKÝ a který zní:

Co je geometrickým místem bodů, pro něž platí, že paty kolmic spuštěných z nich na přímky čtyrstranu leží na kružnici.

Čtyrstran určuje parabolu, jejímiž tečnami jsou přímky čtyrstranu. Zvolme souřadnicový systém tak, aby ohnisko paraboly bylo počátkem souřadnic a bod souměrně sdružený k ohnisku podle řídící přímky paraboly byl bod o souřadnici 1. Rovnice takové paraboly je pak tvaru

$$x = \frac{1}{(1 + t)^2}, \quad t \neq -1$$

a rovnice její tečny v bodě o komplexním parametru t_1 je

$$x = \frac{1}{(1 + t_1)(1 + t)}, \quad t_1 \neq -1, \quad t \neq -1.$$

Rovnice přímek čtyrstranu lze tedy psáti

$$x = \frac{1}{(1 + t_i)(1 + t)}, \quad t_i \neq -1, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

což je možné s použitím rovnic komplexně sdruženým k těmto upravit vyloučením parametru t na tvar

$$t_i x + y = \frac{t_i}{1 + t_i}.$$

Nechť bod $Z(z)$ v rovině má vlastnost požadovanou v úloze. Kolmice vedené tímto bodem na přímky čtyrstranu mají rovnice

$$-t_i x + y = -t_i z + \bar{z}$$

a jejich paty jsou body

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + t_i} - \frac{\bar{z}}{t_i} + z\right).$$

Tyto body mají ležet na kružnici, což je splněno, právě když platí

$$\begin{vmatrix}
2z\bar{z} + \frac{t_1}{(1 + t_1)^2} - t_1 z^2 - \frac{1}{t_1}\bar{z}^2 ; & \frac{1}{1 + t_1} - \frac{\bar{z}}{t_1} + z ; & \frac{t_1}{1 + t_1} - t_1 z + \bar{z} ; & 1 \\
2z\bar{z} + \frac{t_2}{(1 + t_2)^2} - t_2 z^2 - \frac{1}{t_2}\bar{z}^2 ; & \frac{1}{1 + t_2} - \frac{\bar{z}}{t_2} + z ; & \frac{t_2}{1 + t_2} - t_2 z + \bar{z} ; & 1 \\
2z\bar{z} + \frac{t_3}{(1 + t_3)^2} - t_3 z^2 - \frac{1}{t_3}\bar{z}^2 ; & \frac{1}{1 + t_3} - \frac{\bar{z}}{t_3} + z ; & \frac{t_3}{1 + t_3} - t_3 z + \bar{z} ; & 1 \\
2z\bar{z} + \frac{t_4}{(1 + t_4)^2} - t_4 z^2 - \frac{1}{t_4}\bar{z}^2 ; & \frac{1}{1 + t_4} - \frac{\bar{z}}{t_4} + z ; & \frac{t_4}{1 + t_4} - t_4 z + \bar{z} ; & 1
\end{vmatrix} = 0.$$

Tato rovnice dá po úpravě

$$z^2\bar{z} - \bar{z}^2 z + z\bar{z}\frac{1}{\sigma}(2 + \sigma_1 - \sigma_3 - 2\sigma_4) - z\frac{\sigma_4}{\sigma} + \bar{z}\frac{1}{\sigma} = 0,$$

kde

$$\sigma = 1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4,$$

čímž je rovnice hledaného geometrického místa nalezena.

Uveďme ještě tuto rovnici v obvyklých kartézských souřadnicích, které čtenáři ihned poskytnou představu o tvaru této křivky:

(4)

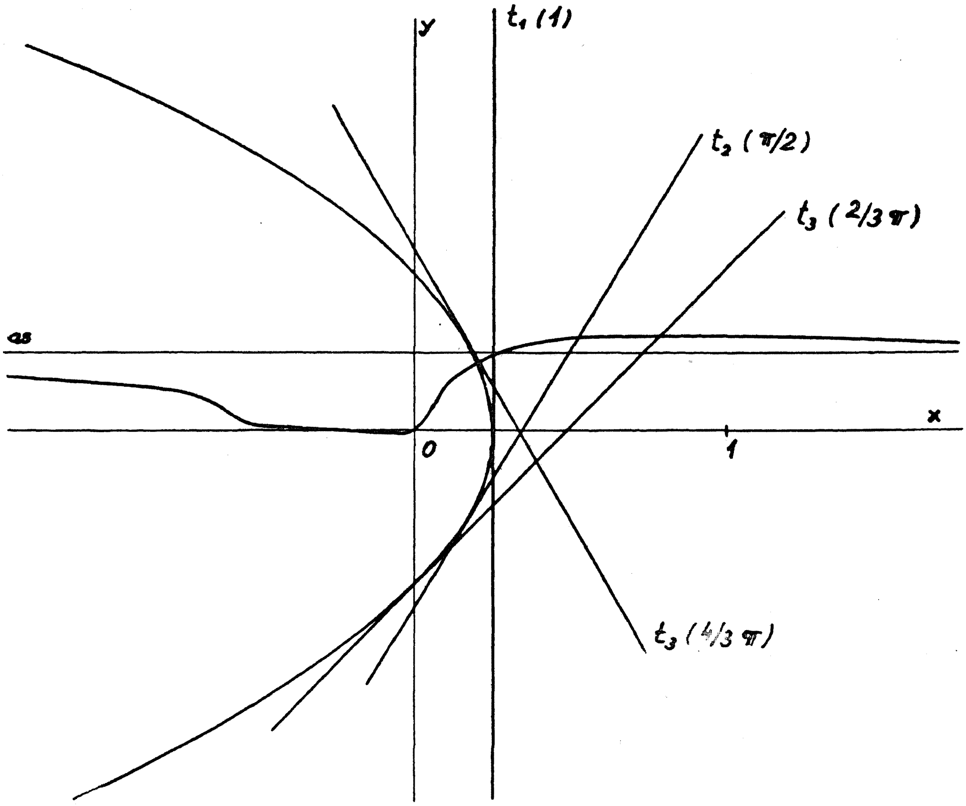
$$y^3 + x^2 y - (x^2 + y^2)\frac{i}{2\sigma}(2 + \sigma_1 - \sigma_3 - 2\sigma_4) - x\frac{i(1 - \sigma_4)}{2\sigma} + y\frac{1 + \sigma_4}{2\sigma} = 0.$$

Všechny koeficienty této rovnice jsou reálné, protože platí

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{\sigma_3}{\sigma_4}, \quad \bar{\sigma}_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_4}, \quad \bar{\sigma}_3 = \frac{\sigma_1}{\sigma_4}, \quad \bar{\sigma}_4 = \frac{1}{\sigma_4}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_4}.$$

Na obrázku 1 je jednoduchý příklad této křivky pro čtyrstran tvořený tečnami paraboly v bodech s komplexními parametry

$$t_1 = 1, \quad t_2 = i, \quad t_3 = \tfrac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \quad t_4 = \tfrac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}).$$



Obr. 1.

Elementární symetrické funkce σ_i, $i = 1, 2, 3, 4$ pak nabývají hodnot

$$\sigma_1 = 2 + i, \quad \sigma_2 = 2(1 + i), \quad \sigma_3 = 1 + 2i, \quad \sigma_4 = i, \quad \sigma = 6(1 + i)$$

a rovnice (4) je tvaru

$$12y^3 + 12x^2y - 3(x^2 + y^2) - x + y = 0.$$

Literatura

[1] *A. O. Konnully*: Orthocentre of a Cyclic Polygon. The Math. Students *XI* (1943), 1–2, p. 28–30.

Резюме

ЗАМЕЧАНИЕ К НЕКОТОРЫМ СВОЙСТВАМ ВПИСАННОГО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

БОГУМИЛ ВЕСЕЛЬСКИЙ (Bohumil Veselský), Брно

Пусть даны точки A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Две прямые мы назовем *противолежащими*, если на них лежат все точки A_i. Данные точки мы подразделим на две группы по двум точкам и каждой группировке поставим в соответствие индекс p со значениями $p = 1, 2, 3$. Возьмем последовательно каждую из группировок точек A_i и в точках одной и той же пары проведем перпендикуляры к проходящей через них прямой, соотв. к противолежащей прямой. Точки пересечения этих перпендикуляров с прямой, противолежащей к соединяющей прямой рассматриваемой пары, мы обозначим через ${}^pA'_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ соотв. ${}^pA_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Тогда имеют место теоремы:

Теорема 1. *Пусть точки A_i обладают еще тем свойством, что из прямых, проходящих через пары этих точек, никакие две противолежащие не являются перпендикулярными друг другу. Если точки A_i лежат на окружности с центром в* S, *то точки ${}^pA'_i$, для фиксированного p из значений* $p = 1, 2, 3$, *лежат на окружности. Центры этих окружностей лежат на прямой, проходящей через точку* S.

Теорема 2. *Точки A_i лежат на окружности, если и только если точки ${}^pA_i$, для фиксированного p из значений* $p = 1, 2, 3$ *лежат на окружности. Эти окружности концентричны и их общий центр является ортоцентром четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$.*

Теорема 3. *Если точки A_i лежат на окружности, то точки ${}^pA_i$, для фиксированного i из значений* $i = 1, 2, 3, 4$, *лежат на прямых, пересекающихся в ортоцентре четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$.*

Теорема 4. *Если точки A_i лежат на окружности, то точки ${}^pA'_i$, для фиксированного i из значений* $i = 1, 2, 3, 4$, *лежат на прямых, пересекающихся в центре окружности, описанной вокруг четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$.*

В дальнейшем найдено геометрическое место точек, обладающих тем свойством, что основания перпендикуляров, опущенных из них на прямые четырехсторонника, лежат на окружности. Этот вопрос был поставлен проф. Карлом Коутским.

При доказательствах были использованы комплексно-сопряженные координаты.

Summary

A NOTE ON CERTAIN PROPERTIES OF INSCRIBED QUADRANGLES

BOHUMIL VESELSKÝ, Brno

Let there be given points A_i, $i = 1, 2, 3, 4$, of which no three are collinear. Two straight lines will be termed *opposite* if they contain all of these A_i. Let us group these points into two sets containing two points each; to each such grouping let us assign an index p, $p = 1, 2, 3$. In every grouping in turn, consider the straight lines through both points of each pair, perpendicular to the line connecting them, or to the opposite line, respectively. Denote by ${}^pA'_i$ and ${}^pA_i$ respectively $(i = 1, 2, 3, 4)$ the intersection of these perpendiculars with the line opposite that connecting the points of each pair.

Then the following theorems hold:

Theorem 1. *Assume that of the straight lines connecting pairs of points A_i, no two are perpendicular. If the points A_i are on a circle with center S, then for fixed $p = 1, 2, 3$ the points ${}^pA'_i$ lie on a circle. The centers of these circles are on a straight line passing through S.*

Theorem 2. *The points A_i are on a circle if and only if the points ${}^pA_i$ with fixed $p = 1, 2, 3$ are on a circle. These circles are concentric and their common center is the orthocenter of the quadrangle $A_1A_2A_3A_4$.*

Theorem 3. *If the points A_i lie on a circle, then the points ${}^pA_i$ with fixed $i = 1, 2, 3, 4$ lie on straight lines which intersect in the orthocenter of the quadrangle $A_1A_2A_3A_4$.*

Theorem 4. *If the points A_i lie on a circle, then the points ${}^pA'_i$ with fixed $i = 1, 2, 3, 4$ lie on straight lines which intersect in center of the circle circumscribed to the quadrangle $A_1A_2A_3A_4$.*

Next, there is determined the locus of points such that the bases of perpendiculars through them onto the lines of a quadrilateral lie on a circle. This problem was formulated by Prof. KAREL KOUTSKÝ.

Conjugate complex coordinates are used in the proofs.