Václav Polák

Одна проблема, касающаяся выпуклых многогранников

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 87 (1962), No. 2, 169--179

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117424`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

ОДНА ПРОБЛЕМА, КАСАЮЩАЯСЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

ВАЦЛАВ ПОЛАК (Václav Polák), Брно

(Поступило в редакцию 29/IV 1960 г.)

Профессором К. Коутским было мне дано задание исследовать выпуклые многогранники в E_n, у которых существуют некоторые из $(n-1)$-шаров $K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}$ (K_m касается всех m-мерных граней многогранника). В работе показано, что в E_n существует лишь конечное число (вплоть до подобия) выпуклых многогранников, у которых существуют первые три $(n-1)$-шара, причем первых два концентричны. Поставлена проблема отыскания всех этих многогранников.

1

Определение 1. Пусть Π — выпуклый многогранник в евклидовом пространстве E_3 такой, что существуют: описанный шар (т. е. проходящий через все вершины), приписанный шар (касающийся всех ребер) и вписанный (касающийся всех граней). Обозначим эти шары по очереди через K_0, K_1, K_2 и их центры через S_0, S_1, S_2. Мы скажем, что Π — *многогранник типа* (S), если $S_0 \equiv S_1$.

Замечание 1. Все ребра многогранника типа (S) одной и той же длины. Все его грани — правильные выпуклые многоугольники.

Замечание 2. Выпуклый многогранник является правильным (все грани и вершины правильного многогранника конгруэнтны[1]), если и только если он принадлежит типу (S) и все три его шара K_0, K_1, K_2 концентричны.

Замечание 3. Ко всякой вершине многогранника типа (S) прилегает грань, являющаяся не более чем 5-угольником. (Пусть у какой-либо вершины лежат грани, являющиеся по крайней мере 6-угольниками. Согласно замечанию 1 каждая грань представляет собой правильный многоугольник. Угол между двумя соседними ребрами правильного n-угольника равен для $n \geqq 6$ по меньшей мере 120°. Так как у каждой вершины расположены хотя бы три грани, то сумма углов, определенных всеми парами соседних ребер при нашей вершине равна по крайней мере $3 \cdot 120° = 360°$, что невозможно, ибо сумма этих углов

[1]) См. [2], стр. 5.

при вершине выпуклого многогранника должна быть меньше 360°.) Если многогранник Π принадлежит типу (S), то выпуклой оболочкой вершин всех его 3-, 4- и 5-угольников являестя многогранник Π.

Теорема 1. *Многогранников типа* (S) *имеется* (*вплоть до подобия*) *конечное количество.*

Для доказательства теоремы воспользуемся несколькими леммами.

Лемма 1. *Пусть дан единичный шар. Тогда существует концентричный с ним шар K так, что каждый выпуклый многогранник, грани которого являются правильными выпуклыми многоугольниками, причем указанный единичный шар вписан в этот многогранник, содержится внутри шара K.*

Доказатеьлство. Пусть шар с указанными свойствами не существует. Тогда существуют многогранники с приведенными в лемме свойствами и такие, что хоть одна их вершина достаточно удалена от указанного единичного шара. Так как углы между двумя соседними ребрами больше или равны 60° (ибо грани — правильные многоугольники), то у таких многогранников некоторые ребра лежат достаточно далеко от вписанного единичного шара, т. е. некоторые их двугранные углы достаточно малы. (Двугранный угол — это угол, образованный двумя соседними гранями; его внутренние точки лежат внутри многогранника. Величины таких углов мы считаем положительными.)

Доказательство будет завершено, если мы докажем, что у выпуклых многогранников, грани которых — правильные выпуклые многоугольники, и которые обладают вписанным шаром, не может быть ни одного сколь угодно малого двугранного угла. Очевидно, можно ограничиться рассмотрением лишь таких многогранников, все ребра которых единичной длины. Итак, пусть Π — многогранник с указанными свойствами и пусть при его ребре $\overline{XY}$ имеется подходящий достаточно малый двугранный угол (образованный гранями a_1, a_2). Хоть одна из граней a_1, a_2 является треугольником. (Пусть p, соотв. q, $a_1 \neq p \neq a_2$, $a_1 \neq q \neq a_2$, есть грань, исходящая из вершины X, соотв. Y. Если $\sphericalangle(a_1, a_2)$ достаточно мал, то и вписанный шар K_2 достаточно мал, и если ни одна из граней a_1, a_2 не является треугольником, то грани p, q не могут, очевидно, одновременно касаться шара K_2, что противоречит допущению.) Пусть, напр., a_1 — треугольник, $a_1 = (XYZ)$. Так как K_2 достаточно мал и касается всех граней, то K_2 лежит достаточно близко к точке Z.

Если a_2 не является треугольником, $a_2 = (XYU \ldots V)$, $U \neq V$, то двугранный угол при ребре $\overline{YU}$ (между гранями a_2, a_3) достаточно мал и, следовательно (согласно предыдущему рассуждению), a_3 является треугольником (третью его вершину мы обозначим через T, так что $a_3 = (YUT)$). Так как $\sphericalangle(\overline{YZ}, \overline{YT}) < 60°$, имеем $T \equiv Z$. Но тогда a_2 будет 4- или 5-угольником. Оба случая, однако, исключаются, так как в обоих случаях двугранные углы при ребрах $\overline{XY}, \overline{YU}$ не могли бы быть достаточно малыми.

Пусть a_2 — треугольник, $a_2 = (XYZ')$. Пусть $a_3 = (ZYU\ldots)$ — грань, соседняя с гранью a_1 при ребре $\overline{ZY}$. Так как шар K_2 достаточно мал и лежит достаточно близко к точкам Z, Z', то двугранный угол при ребре $\overline{YU}$ (между гранями a_3, a_4) достаточно мал. По предыдущему, a_3, a_4 — треугольники и, очевидно, $a_3 = (ZYU)$, $a_4 = (Z'YU)$. Аналогично и далее. При вершинах Z, Z' лежат только треугольники (при каждом из них не больше пяти треугольников). Возможны, самое больше, три случая: В обеих вершинах Z, Z' сходятся три, четыре или пять ребер. Во всех трех случаях двугранный угол при ребре $\overline{XY}$ не был бы достаточно малым, что противоречит условию. Лемма доказана.

Лемма 2. *Множество радиусов шаров K_0 всех многогранников типа* (S), *в которые вписан единичный шар, ограничено сверху.*

Доказательство. Шар K_2 является по условию единичным шаром. По лемме 1 существует концентричный с ним шар K так, что все рассматриваемые многогранники лежат целиком внутри шара K. Пусть наше утверждение несправедливо. Тогда можно из рассматриваемых многогранников выделить последовательность $\{\Pi^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ так, что радиусы соответствующих шаров $K_0^{(i)}$ беспредельно возрастают. Начиная с некоторого индекса каждый шар $K_0^{(i)}$ пересечет шар K по окружности, определяющей на шаре $K_0^{(i)}$ шаровой сегемнт, на котором лежат все вершины многогранника $\Pi^{(i)}$. Итак, шаровой сегмент седержит наш единичный шар K_2. Это, однако, невозможно, так как высоты шаровых сегментов образуют нулевую последовательность. Утверждение доказано.

Лемма 3. *Пусть $0 < h < 1$ — произвольное число. Тогда существует лишь конечное число неконгруэнтных многогранников типа* (S), *которые вписаны в единичный шар, и длины ребер которых $\geqq h$.*

Доказательство. Обозначим множество рассматриваемых многогранников через $\mathfrak{P}$. Так как длина ребер ограничена снизу положительным числом, существует натуральное число n так, что грани многогранников из $\mathfrak{P}$ будут не больше чем n-угольниками. Кроме того, существует число $p > 0$ так, что площадь каждой грани не меньше p. Так как поверхность каждого многогранника из $\mathfrak{P}$ ограничена сверху числом 4π (поверхность единичного шара), существует натуральное число N так, что число вершин любого многогранника из $\mathfrak{P}$ не превышает N. Итак, в множестве $\mathfrak{P}$ существует лишь конечное число неизоморфных друг другу многогранников. (Два многогранника изоморфны, если существуют взаимно однозначные отображения между его вершинами, ребрами и гранями так, что паре инцидентных элементов соответствует пара инцидентных же элементов.) По теореме Коши о выпуклых многогранниках (два изоморфных выпуклых многогранника, соответственные грани которых конгруэнтны, являются и сами конгруэнтными) два изоморфных многогранника из $\mathfrak{P}$ конгруэнтны. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Без ограничения общности можно предположить, что шар K_0 (с центром S_0) — единичный. Пусть наша теорема не-справедлива. Тогда существует последовательность $\{\Pi^{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ многогранников типа (S) такая, что никакие два из них не конгруэнтны и $K_0^{(i)} \equiv K_0$. Без ограничения общности можно предположить, что центры $S_2^{(i)}$ соответственных вписанных шаров лежат на фиксированном отрезке $\overline{S_0X}$, где X — фиксированная точка на шаре K_0, и что существует точка $S_2 \in \overline{S_0X}$ так, что $S_2^{(i)} \to S_2$.

По лемме 3 длины ребер h_i многогранников $\Pi^{(i)}$ образуют нулевую последовательность.

Очевидно, $S_2 \neq X$, ибо в противном случае радиусы шаров $K_2^{(i)}$ образовали бы нулевую последовательность, что противоречит лемме 2.

Пусть S_2 лежит между X, S_0. Тогда шары $K_2^{(i)}$ стремятся к шару с центром в S_2, проходящему через точку X (это следует из замечания 3 и из соотношения $h_i \to 0$). Отсюда следует (опять из замечания 3), что все вершины многогранников $\Pi^{(i)}$ для достаточно больших i лежат достаточно близко к точке X, что противоречит обстоятельству, что $\Pi^{(i)}$ содержат шары $K_2^{(i)}$.

Итак, пусть $S_2 \equiv S_0$. Так как $h_i \to 0$, по замечанию 3 будет $K_2^{(i)} \to K_0$. Без ограничения общности (в силу замечания 2) можно предположить что всегда $S_2^{(i)} \neq S_0$. Для достаточно больших i грани, образованиые 3-, 4- и 5-угольниками, достаточно малы. Очевидно, образованные n-угольниками грани многогранника $\Pi^{(i)}$ касаются шара $K_2^{(i)}$ только в точках некоторой окружности (мы обозначим ее через $k_n^{(i)}$), которая лежит на шаре $K_2^{(i)}$, и плоскость которой перпендикулярна прямой S_0X. Из замечания 3 следует, что хоть одна из окружностей $k_3^{(i)}$, $k_4^{(i)}$, $k_5^{(i)}$ существует. Итак, для достаточно больших i вершины многогранника $\Pi^{(i)}$ лежат достаточно близко к окружностям $k_3^{(i)}$, $k_4^{(i)}$, $k_5^{(i)}$ и, следовательно, $\Pi^{(i)}$ не содержит весь шар $K_2^{(i)}$; это — противоречие. Теорема 1 доказана.

2

В последующем изложении мы займемся обобщением теоремы 1 на пространства любой размерности. Обобщением понятия выпуклого многогранника для n-мерного евклидова пространства E_n является n-мерный многогранник Π_n.[2]) Многогранник возникает как пересечение конечного количества замкнутых полупространств, причем это пересечение должно быть ограниченным и должно содержать хоть одну внутреннюю точку. Граница множества Π_n состоит из конечного числа выпуклых $(n-1)$-мерных многогранников Π_{n-1}. Мы их называем гранями многогранника, а также $(n-1)$-мерными гранями. Грани этих последних являются, далее, $(n-2)$-мерными многогранниками Π_{n-2}. Они носят название $(n-2)$-мерных граней многогранника Π_n. Можно ввести и общее понятие k-мерной грани Π_k многогранника Π_n, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ (многогранники Π_0 представляют собой вершины, Π_1 — ребра, а Π_n — сам многогранник). Трехмерные многогранники суть выпуклые многогранники.

---

[2]) См. [2], стр. 127.

Так же для этих многогранников можно ввести понятие изоморфизма. Для выпуклых многогранников высших размерностей справедлива теорема Коши:

(1) *Пусть $n \geqq 3$ — натуральное число, Π_n, Π'_n — два n-мерных выпуклых изоморфных друг другу многогранника. Пусть все соответствующие друг другу грани конгруэнтны. Тогда конгруэнтны и многогранники Π_n, Π'_n.*

Однако, справедливо даже более сильное утверждение:

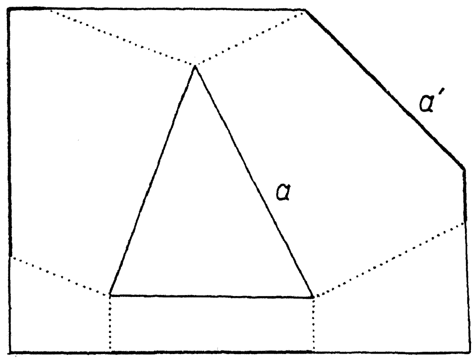

Рис. 1.

(2) *Пусть $n \geqq 4$ — натуральное число, Π_n, Π'_n — два n-мерных выпуклых многогранника, $A \in \Pi_n$, $A' \in \Pi'_n$ — две их вершины, являющиеся изоморфными.* (Две вершины изоморфны, если существуют взаимно однозначные отображения между гранями, исходящими из этих вершин, и между всеми их k-мерными гранями ($k = 0, 1, \ldots, n-2$) так, что паре инцидентных элементов соответствует пара инцидентных же элементов.) *Пусть соответственные грани конгруэнтны. Тогда и вершины A, A' конгруэнтны* (то есть, конгруэнтны множества, образованные указанными гранями).

Доказательства утверждений (1) и (2) приводятся в добавлении.[3])

Приведем еще одно утверждение:

(3) *Пусть Π_n, Π'_n — два выпуклых n-мерных многогранника, причем первый лежит целиком внутри второго. Тогда сумма $(n-1)$-мерных объемов всех граней первого многогранника меньше суммы $(n-1)$-мерных объемов всех граней второго.*

Доказательство проведем лишь для плоскости. Пусть P, P′ — два выпуклых многоугольника, первый внутри второго. Пусть a — одна из сторон многоугольника P. Спроектируем ее в направлении ее внешней нормали на многоугольник P′ (см. рис. 1). Эта проекция (мы ее обозначим через a') есть ломанная линия, длина которой не меньше длины стороны a. Спроектируем таким образом каждую сторону многоугольника P. Без ограничения общности можно допустить, что P обладает собственными вершинами (две соседние стороны лежат на различных прямых). Тогда соответственные ломанные линии a' на P′ дизъюнктны и не покрывают весь периметр многоугольника P′. Итак, ясно, что периметр этого многоугольника больше. Таким же образом утверждение доказывается и для общего случая любой размерности.

[3]) См. также [1], стр. 178.

Если для данного n-мерного выпуклого многогранника Π_n существует $(n-1)$-шар ($(n-1)$-шар есть геометрическое место точек в E_n, лежащих на равном расстоянии от некоторой фиксированной точки — его центра) так, что этот шар касается всех m-мерных граней многогранника, то этот $(n-1)$-шар мы обозначим через K_m (его центр через S_m) и скажем, что для многогранника Π_n существует его $(n-1)$-шар K_m. В последующих рассуждениях мы будем предполагать $n \geqq 3$.

Определение 2. Мы скажем, что выпуклый n-мерный ($n \geqq 3$) *многогранник* Π_n *принадлежит типу* (S), если существуют его $(n-1)$-шары K_0, K_1, K_2 и если первые два из них концентричны.

Следующее утверждение обобщает теорему 1 на случай любых размерностей:

Теорема 2. *Многогранников типа* (S) *имеется для каждой размерности* $n \geqq 3$ *конечное количество (вплоть до подобия).*

Прежде чем приступить к доказательству, мы проведем еще несколько предварительных рассуждений.

Замечание 4. Свойство (S) наследственно (т. е. каждая грань n-мерного ($n \geqq 4$) многогранника типа (S) также принадлежит типу (S)). Действительно, каждая грань Π_{n-1} лежит в гиперплоскости, пересекающей указанные $(n-1)$-шары K_0, K_1, K_2 многогранника Π_n в $(n-2)$-шарах, из которых первый проходит через все вершины многогранника Π_{n-1}, второй (концентричный с первым) касается всех его ребер, и третий всех его 2-мерных граней. Итак, Π_{n-1} принадлежит типу (S).

Замечание 5. Все ребра многогранника типа (S) одинаковой длины (следует непосредственно из замечаний 1 и 4).

Замечание 6. Выпуклый многогранник Π_n является правильным (Многогранник правильный, если его грани и вершинные фигуры правильны.[4]) При помощи математической индукции нетрудно доказать, что многогранник будет правильным, если и только если он вписан в $(n-1)$-шар и все его грани правильны и конгруэнтны одна другой.), если и только если существуют $(n-1)$-шары $K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}$, причем все они концентричны.

Необходимость условий очевидна. Достаточность их докажем по методу математической индукции: Для $n = 2$ и $n = 3$ утверждение справедливо (замечание 2). Пусть $n \geqq 4$ — какое-либо натуральное число и пусть утверждение справедливо для размерности $n - 1$. Так как указанное свойство наследственно (т. е. все грани многогранника Π_n имеют это свойство), грани многогранника Π_n — правильные многогранники. Так как для многогранника существует $(n-1)$-шар K_{n-1}, концентричный с $(n-1)$-шаром K_0, радиусы всех $(n-2)$-шаров, описанных вокруг граней многогранника Π_n равны. Отсюда уже следует, что все грани

[4]) См., напр., [2], стр. 128.

являются конгруэнтными правильными многогранниками и что, следовательно, Π_n — правильный многогранник.

Лемма 4. *Пусть Π_n, Π'_n — два многогранника типа* (S), *изоморфные друг другу, и пусть длина ребер первого равна длине ребер второго. Тогда эти многогранники конгруэнтны.*

Доказательство проведем по методу математической индукции по n. Пусть $n = 3$. По замечанию 1 соответственные грани многогранников Π_3 и Π'_3 конгруэнтны. Согласно (1) конгруэнтны и сами многогранники. Итак, лемма справедлива для размерности 3. Пусть теперь $n \geqq 4$; наше утверждение справедливо для размерности $n - 1$, а Π_n, Π'_n — многогранники со свойствами, указанными в лемме. По предположению индукции и по замечанию 4 соответственные грани конгруэнтны, и в силу (1), конгруэнтны и Π_n, Π'_n, ч. т. д.

Определение 3. Пусть Π_n — многогранник типа (S), A — любая из его вершин, $\mathscr{V}$ — множество концевых точек всех исходящих из точки A ребер (не считая точки A). Из замечания 5 следует, что множество $\mathscr{V}$ лежит на $(n - 1)$-шаре с центром в A. Этот $(n - 1)$-шар пересекает $(n - 1)$-шар K_0 по $(n - 2)$-шару, на котором лежит и множество $\mathscr{V}$. Итак, это множество лежит в некоторой гиперплоскости. Отсюда следует, тчо множество центров всех ребер, исходящих из A, лежит в некоторой гиперплоскости, пересечение которой с многогранником Π_n является $(n - 1)$-мерным выпуклым многогранником $\Theta(A)$, который мы называем *вершинной фигурой* многогранника Π_n при вершине A.[5]) Этот многогранник, очевидно, вписан в $(n - 2)$-шар и каждая его грань является вершинной фигурой при вершине A некоторой грани многогранника Π_n, для которой точка A служит вершиной.

Лемма 5. *Пусть Π_n — многогранник типа* (S). *Тогда существует число $N(\Pi_n)$ так, что в каждой вершине каждого многогранника Π_{n+1} типа* (S) *существует не более $N(\Pi_n)$ граней, изоморфных многограннику Π_n.*

Это утверждение непосредственно вытекает из того факта, что при каждой вершине выпуклого n-мерного многогранника сумма сферических $(n - 2)$-мерных площадей всех прилегающих к этой вершине $(n - 1)$-мерных граней меньше $(n - 2)$-мерной площади поверхности единичного $(n - 2)$-шара.[6])

Дадим самостоятельное доказательство. Построим множество вершинных фигур всех $(n + 1)$-мерных многогранников типа (S), обладающих ребрами единичной длины. Определим для каждой вершинной фигуры сумму $(n - 1)$-мерных объемов всех ее граней. Множество этих чисел ограничено сверху. (Каждая из вершинных фигур вписана в $(n - 1)$-шар, радиус которого меньше единицы. Отсюда уже при помощи (3) нетрудно построить указанное ограничение сверху.) Некоторые грани указанных вершинных фигур изоморфны с вершинными фигурами многогранника Π_n. Многогранник Π_n обладает лишь ко-

---

[5]) См. [2], стр. 128. [6]) См. [3], стр. 121.

нечным числом вершин, а, следовательно, и конечным числом неизоморфных фигур.

Пусть рассматриваемый многогранник Π_n обладает ребрами единичной длины. Так как ребра многогранников Π_{n+1} также имеют единичную длину, из замечания 5 и из леммы 4 следует, что каждая грань многогранника Π_{n+1}, изоморфная с Π_n, будет конгруэнтной с Π_n. Так как $(n-1)$-мерные объемы всех вершинных фигур многогранника Π_n ограничены снизу положительным числом (хотя бы $(n-1)$-мерным объемом вершинной фигуры с наименьшим $(n-1)$-мерым объемом), а множество сумм $(n-1)$-мерных объемов всех граней любой вершинной фигуры из Π_{n+1} ограничено сверху, следует уже отсюда существование числа $N(\Pi_n)$, ч. т. д.

Доказательство теоремы 2 проведем по методу математической индукции. Для $n = 3$ теорема справедлива (теорема 1). Пусть $n \geqq 4$ — какое-либо натуральное число, и теорема справедлива для размерности $n-1$. Без нарушения общности можно ограничиться исследованием лишь тех n-мерных многогранников типа (S), которые вписаны в единичный $(n-1)$-шар. Согласно замечанию 4 и по условиям индукции среди граней этих многогранников имеется лишь конечное число неизоморфных типов. Отсюда и из леммы 5 следует, что и среди вершин имеется лишь конечное число неизоморфных типов. Так как многогранники Π_n вписаны в единичный $(n-1)$-шар, две изоморфные вершины конгруэнтны. (Ребра каждой из рассматриваемых вершин имеют одинаковую длину. Если ребра одной вершины одинаковой длины с ребрами второй вершины, то по лемме 4 соответствующие друг другу грани этих вершин конгруэнтны и, следовательно, согласно (2) эти вершины конгруэнтны. Пусть ребра первой вершины короче ребер второй вершины. Преобразуем с помощью гомотетии первую вершину в вершину с той же длиной ребер, как ребра второй вершины. По доказанному выше, эти две вершины конгруэнтны, но первая вписана в $(n-1)$-шар с радиусом >1, а вторая — в $(n-1)$- шар единичного радиуса; получаем противоречие.) Отсюда следует, что имеется лишь конечное число всех возможных длин ребер у рассматриваемых многогранников Π_n. Отсюда с использованием леммы 4 выведем, что среди граней рассматриваемых многогранников имеется лишь конечное число неконгруэнтных граней. Отсюда следует существование числа N так, что каждый рассматриваемый многогранник Π_n может иметь не более N конгруэнтных граней. (Так как все рассматриваемые многогранники вписаны в единичный $(n-1)$-шар, нетрудно построить выпуклый многогранник, содержащий этот $(n-1)$-шар, откуда уже в силу (3) вытекает существование числа N.) Итак, среди рассматриваемых многогранников существует лишь конечное число неизоморфных типов и, следовательно, (по лемме 4) среди рассматриваемых многогранников существует лишь конечное число неконгруэнтных многогранников. Теорема 2 доказана.

Проблема. Отыскать все многогранники типа (S).

Добавление. Докажем утверждения (1), (2). Рассмотрим n-мерный выпуклый многогранник Π_n. Две из его граней Π_{n-1}, Π'_{n-1} мы назовем соседними, если эти два $(n-1)$-мерных многогранника имеют общую грань Π_{n-2}. Так как каждая грань многогранника Π_n лежит в одной и только одной из ограничивающих гиперплоскостей, а две различные грани лежат в двух различных гиперплоскостях, то каждая $(n-2)$-мерная грань Π_{n-2} многогранника Π_n лежит в двух и только в двух гранях Π_{n-1}, Π'_{n-1} многогранника Π_n (эти грани — соседние).

Докажем теперь справедливость следующего утверждения:

(4) *Пусть Π_n $(n \geqq 3)$ — выпуклый n-мерный многогранник, Π_{n-3} — какая-либо из его $(n-3)$-мерных граней. Тогда все грани многогранника Π_n, содержащие Π_{n-3}, можно упорядочить в виде цикла*

$$(c_1) \qquad \Pi^{(1)}_{n-1}, \quad \Pi^{(2)}_{n-1}, \quad \ldots, \quad \Pi^{(k)}_{n-1}$$

так, что любые две следующие одна за другой грани $\Pi^{(i)}_{n-1}$, $\Pi^{(i+1)}_{n-1}$ $(i \bmod k)$ являются соседними.

Для $n = 3$ утверждение 4 справедливо, так как исходящие из одной и той же вершины грани выпуклого многогранника можно упорядочить в виде требуемого цикла. Пусть $n \geqq 4$ — какое-либо натуральное число и пусть утверждение (4) справедливо для $(n-1)$-мерных многогранников. Пусть Π_n, Π_{n-3} — многогранники, упомянутые в утверждении. Пусть A — какая-либо вершина многогранника Π_{n-3} (а, значит, и многогранника Π_n). Очевидно, существует гиперплоскость ϱ так, что она пересекает все ребра многогранника Π_n, исходящие из вершины A, в их внутренних точках (гиперплоскость ϱ „отрежет" вершину A). Очевидно, гиперплоскость ϱ пересечет многогранник Π_n в $(n-1)$-мерном многограннике Γ_{n-1}. Каждая k-мерная грань Π_k из Π_n, исходящая из вершины A, пересекается с гиперплоскостью ϱ в $(k-1)$-мерной грани Γ_{k-1} многогранника Γ_{n-1}. Отображение $f, \Pi_k \leftrightarrow \Gamma_{k-1}$ сохраняет инцидентность. Отсюда уже легко следует утверждение.

Из (4) следует, что и все $(n-2)$-мерные грани из Π_n, содержащие данную Π_{n-3}, можно точно так же упорядочить в виде цикла

$$(c_2) \qquad \Pi^{(1)}_{n-2}, \quad \Pi^{(2)}_{n-2}, \quad \ldots, \quad \Pi^{(k)}_{n-2}$$

так, что любые следующие одна за другой $(n-2)$-мерные грани

$$\Pi^{(i)}_{n-2}, \quad \Pi^{(i+1)}_{n-2} \quad (i \bmod k)$$

являются соседними гранями многогранника $\Pi^{(i)}_{n-1}$ из цикла (c_1).

Справедливо следующее утверждение:

(5) *Пусть Π_n $(n \geqq 3)$ — выпуклый n-мерный многогранник. Некоторым его $(n-2)$-мерным граням припишем знак $+$ или $-$. Это нельзя сделать так, чтобы у циклов (c_2), у которых наблюдается хоть одна перемена знака, были по крайней мере четыре перемены знака.*

При доказательстве воспользуемся математической индукцией. Для $n = 3$ утверждение справедливо. (Лемма называется леммой Коши.)[7]) Пусть утверждение справедливо для $(n-1)$-мерных многогранников $(n \geqq 4)$ и пусть Π_n — выпуклый многогранник, приведенный в утверждении. Пусть некоторые его $(n-2)$-мерные грани обозначены знаком $+$ или $-$, причем так, что в каждом (c_2), в котором имеется хоть одна перемена знака (при прохождении цикла в указанном порядке), имеется по крайней мере четыре перемены знака. Пусть (c_2) — какой-либо цикл, содержащий ненулевое число перемен знака, и пусть A — одна из вершин многогранника Π_{n-3}, который определяет цикл (c_2). Отрежем вершину A гиперплоскостью ϱ. (Гиперплоскость ϱ построим так же, как и в конце доказательства утверждения (4) — она пересекает все ребра многогранника Π_n, исходящие из A, в их внутренних точках.) Обозначим $(n-3)$-мерные грани многогранника пересечения Γ_{n-1} при помощи отображения f знаками $+$ или $-$. По предположению индукции произвести такие обозначения в многограннике Γ_{n-1} невозможно; ч. т. д.

Доказательство утверждения (1) проведем следующим образом. Пусть Π_n, Π_n' — два изоморфных многогранника, упомянутых в утверждении (1). Если двугранные углы равны друг другу, то эти многогранники конгруэнтны. Пусть это не имеет места и пусть $\Pi_{n-1}^{(1)}, \Pi_{n-1}^{(2)}, \Pi_{n-1}^{(1)\prime}, \Pi_{n-1}^{(2)\prime}$ — грани многогранников Π_n, Π_n' такие, что для их двугранных углов α_1, α_1' имеет место $\alpha_1 < \alpha_1'$. Пара граней $\Pi_{n-1}^{(1)}, \Pi_{n-1}^{(2)}$ принадлежит, очевидно, хоть одному цилку (c_1). Обозначим изоморфный ему цикл в Π_n' через (c_1'). Пусть Π_{n-3}, Π_{n-3}' суть $(n-3)$-мерные грани, определяющие циклы $(c_1), (c_1')$. Возьмем внутри Π_{n-3}, соотв. Π_{n-3}' какую-либо точку X, соотв. X'. Пусть E_3, соотв. E_3' есть трехмерное пространство, проходящее через точку X, соотв. X', и тотально перпендикулярное к Π_{n-3}, соотв. Π_{n-3}'. Пространство E_3, соотв. E_3', пересечет многогранник Π_n, соотв. Π_n', в выпуклом многограннике, который мы обозначим через Γ_3, соотв. Γ_3'. Точка X, соотв. X', является вершиной Γ_3, соотв. Γ_3'. Отдельные грани многогранника Γ_3, исходящие из вершины X, высекаются из простанства E_3 теми гранями многогранника Π_n, которые принадлежат циклу (c_1). Двугранные углы при вершине X многогранника Γ_3 являются двугранными углами между соответственными гранями цикла (c_1). Угол между соседними ребрами той грани вершины X, которая соответствует грани $\Pi_{n-1}^{(i)}$ цикла (c_1), является двугранным углом тех двух соседних граней многогранника $\Pi_{n-1}^{(i)}$, которые содержат многогранник Π_{n-3}. Отсюда следует, что вершины X, X' многогранников Γ_3, Γ_3' изоморфны, соответственные грани конгруэнтны, а соответствующие друг другу двугранные углы не все одинаковы $(\alpha_1 < \alpha_1')$. По известной теореме о выпуклых многогранных углах[8]) в цикле чисел $(\alpha_1 - \alpha_1', \alpha_2 - \alpha_2', \ldots, \alpha_k - \alpha_k')$ имеются по крайней мере четыре перемены знака. Числа α_i и α_i' имеют значение двугранных углов многогранников Π_n и Π_n'. Сопоставим теперь знак $+$ такой $(n-2)$-мерной грани

[7]) См. [1], стр. 85.

[8]) См. [1], стр. 151.

Π_{n-2} многогранника Π_n, для которой $\alpha - \alpha' > 0$ (угол α — двугранный угол между содержащими Π_{n-2} гранями, α' — угол, соответствующий углу α при данном изоморфизме). Аналогично обозначим некоторые $(n - 2)$-мерные грани знаком $-$. Но согласно (5) произвести такие обозначения невозможно — получаем противоречие; ч. т. д.

Утверждение (2) следует из (5) так: Отрежем вершину A подходящей гиперплоскостью ϱ и построим многогранник пересечения Γ_{n-1}. Все $(n - 2)$-мерные грани многогранника Π_n, исходящие из вершины A, обозначим знаком $+$, если $\alpha - \alpha' > 0$ (аналогично обозначим некоторые $(n - 2)$-мерные грани знаком $-$). Эти обозначения перенесем на $(n - 3)$-мерные грани Γ_{n-3} многогранника Γ_{n-1}. Для многогранника Γ_{n-1} из (5) и из[8]) следует, что всегда $\alpha = \alpha'$ для соответствующих друг другу двугранных углов многогранников Π_n, Π_n' при вершинах A, A'. Доказательство закончено.

Литература

[1] *А. Д. Александров:* Выпуклые многогранники. Гос. из. тех.-теор. лит., Москва-Ленинград 1950.

[2] *H. S. M. Coxeter*: Regular polytopes. London 1948.

[3] Encyklopädie der math. Wissenschaften, III AB 12, Polyeder u. Raumeinteilungen, Leipzig 1914—1931.

Výtah

JEDEN PROBLÉM O KONVEXNÍCH MNOHOSTĚNECH

VÁCLAV POLÁK, Brno

Konvexní mnohostěn v E_n se nazývá *význačný trojstředový*,[9]) jestliže existují jeho $(n - 1)$-koule K_0, K_1, K_2 (K_m se dotýká všech jeho m-rozměrných stran) a prvé dvě jsou soustředné. V práci je dokázáno, že pro každou dimensi $n \geqq 3$ existuje pouze konečně mnoho význačných trojstředových mnohostěnů (až na podobnost). Problémem je nalézt všechny tyto mnohostěny.

Summary

ON A PROBLEM CONCERNING CONVEX POLYTOPES

VÁCLAV POLÁK, Brno

A convex polytope in E_n is termed *distinguished tricentric* if there exist three $(n - 1)$-dimensional spheres K_0, K_1, K_2 (K_m touches all m-dimensional sides) such that K_0, K_1 are concentric. It is proved that (up to similarity) for every dimension $n \geqq 3$ there exists only a finite number of distinguished tricentric polytopes. The problem of finding all such polytopes is posed.

[9]) Název navrhl V. HAVEL.