Zdeněk Hustý

O některých vlastnostech diferenciální rovnice pátého řádu

*Časopis pro pěstování matematiky*, Vol. 87 (1962), No. 2, 229--232

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/117417`

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

# REFERÁTY

## O NĚKTERÝCH VLASTNOSTECH DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PÁTÉHO ŘÁDU

(Vlastní referát Z. HUSTÉHO o přednášce proslovené v rámci „Diskusí o nových pracích brněnských matematiků“ dne 6. března 1961 v Brně)

Lineární homogenní diferenciální rovnici pátého řádu

$$W^{(5)}(x) + \sum_{i=1}^{5} \binom{5}{i} a_i(x) \, W^{(5-i)}(x) = 0,$$

kde koeficienty $a_i^{(5-i)}$, $i = 1, 2, \ldots, 5$ jsou spojité funkce proměnné $x$ v intervalu $J \equiv \langle \xi, \infty)$, můžeme transformací $W = \exp\left(-\int a_1 \, dx\right) . y$ převést na první kanonický tvar

$$I_5(y, A) + \sum_{i=3}^{5} \binom{5}{i} \omega_i y^{(5-i)} = 0 . \tag{1}$$

Rovnice

$$I_5(y, A) = y^{(5)} + [5Ay']'' + [5Ay'']' + [2(4A^2 + A'')\, y]' + 2(4A^2 + A'')\, y' = 0 \tag{2}$$

je iterovaná rovnice pátého řádu, jejíž fundamentální systém řešení tvoří funkce

$$u^{5-i} . v^{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, 5, \tag{3}$$

kde $u$, $v$ jsou nezávislé integrály rovnice

$$u'' + \tfrac{1}{2}Au = 0 . \tag{4}$$

V případě $\omega_3 = 0$, $2\omega_5 = \omega_4'$ je rovnice (1) samoadjungovaná.

Pomocí (3) a známých vlastností integrálů rovnice (4) se snadno odůvodní některé oscilační vlastnosti integrálů rovnice (2), např.:

a) Má-li některý integrál čtyřnásobný kořen, pak má všechny kořeny čtyřnásobné.

b) Má-li některý integrál trojnásobný kořen, pak může mít pouze trojnásobné a jednoduché kořeny, které se navzájem oddělují.

c) Má-li některý integrál dvojnásobný kořen, pak má buď všechny kořeny dvojnásobné nebo mezi dvěma dvojnásobnými kořeny leží právě dva jednoduché kořeny.

d) Nechť $v_i(x)$, $i = 1, 2, 3, 4$ jsou zcela libovolné integrály rovnice (4). Pak funkce $y(x) = \prod_{i=1}^{4} v_i(x)$ je vždy řešením rovnice (2).

A) Nechť v rovnici (1) jsou splněny tyto předpoklady:

$$\omega_3 \leqq 0\,, \quad \tfrac{1}{2}(\omega_4' - \omega_3'') \leqq \omega_5 \tag{5}$$

(obě rovnosti neplatí současně v žádném částečném intervalu).

Libovolný integrál $y(x)$ rovnice (1) má následující vlastnosti:

$a_1$) Má nejvýše jeden trojnásobný kořen.

$a_2$) Napravo od trojnásobného kořene nemá žádný dvojnásobný kořen.

$A_1$) Nechť mimo (5) platí $A \leqq 0$ [$A \geqq 0$]:

$a_3$) Napravo [nalevo] od trojnásobného kořene nemůže v žádném bodě $x$ splňovat počáteční podmínku $y(x) = y'''(x) = 0$ [$y(x) = y''(x) = y'''(x) = 0$].

$a_4$) Napravo od trojnásobného kořene nemůže v žádném bodě $x$ splňovat počáteční podmínku $y(x) = 0$, $y'(x) \,.\, y'''(x) \leqq 0$.

Jestliže v (5) předpokládáme, že platí současně obě nerovnosti opačné, pak jsou správná tvrzení $a_1$), $a_2$), $a_3$), $a_4$), jenom v nich musíme slovo „napravo" [nalevo] nahradit slovem „nalevo" [napravo].

Násobíme-li samoadjungovanou rovnici (1) $y$ a integrujeme-li ji v intervalu $\langle a, x\rangle \subset J$, obdržíme po úpravě identitu

$$L\,[y(x)] = y^{(4)}y - y'''y' + \tfrac{1}{2}y''^2 + [5Ay']'\,y - 5Ay'^2 + 5Ay''y + \\ + (8A^2 + 2A'' + \tfrac{1}{2}\omega_4)\,y^2 = \text{konst}\,.$$

B) Samoadjungovaná rovnice (1) má tyto vlastnosti.

$b_1$) Jestliže některý integrál $y(x)$ splňuje v bodě $a \in J$ počáteční podmínku $L[y(a)] < 0$ [$>0$] {$=0$} pak má nejvýše jednoduché [dvojnásobné] kořeny {pak nemá ani jeden právě dvojnásobný kořen}.

$b_2$) Nechť jsou splněny tyto předpoklady:

$$-\,M \leqq A \leqq -\,m \;\; (M, m = \text{konst} > 0)\,, \quad A' \leqq 0\,, \quad 16A^2 + 9A'' + \omega_4 \geqq 0\,.$$

Potom libovolný integrál $y(x)$, který v nějakém bodě $x_0 \in J$ splňuje počáteční podmínku $L[y(x_0)] = -\,k^2$, $k = \text{konst} > 0$, má tyto vlastnosti:

$\beta_1$) Jestliže neosciluje a je ohraničený, pak monotonně konverguje k nule.

$\beta_2$) Jestliže osciluje, pak má pouze jednoduché kořeny. Je-li $\{x_n\}$ posloupnost kořenů integrálu $y(x)$, pak $\int^\infty [y'^2 + y^2]\,dx$ diverguje, $\lim_{n\to\infty} y'^2(x_n) = \infty$, $y'(x_n)\,.$ $.\, y''(x_n) > 0$, $y'(x_n)\,y'''(x_n) > 0$, $y''(x_n)\,y'''(x_n) > 0$ pro $n$ dosti velké.

$b_3$) Nechť jsou splněny tyto předpoklady:

$$A \geqq 0\,, \quad A' \geqq 0\,, \quad 16A^2 + 9A'' + \omega_4 \leqq 0\,.$$

Potom každý integrál $y(x)$, který v nějakém bodě $x_0 \in J$ splňuje počáteční podmínku $L[y(x_0)] = k^2$, $k = \text{konst} > 0$, při čemž $|y''(x)| \leqq (k\sqrt{10})/5 - \varepsilon$ pro dosti velké $x$, kde $\varepsilon > 0$, má v intervalu $J$ konečný počet kořenů.

C) Rovnice (1) má tyto asymptotické vlastnosti:

$c_1$) Nechť existují nezávislé integrály $u, v$ rovnice (4), které mají tyto vlastnosti

$$u(x) \neq 0\,, \quad J \ni a \leqq x\,; \quad \int^{\infty} \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}x = \infty\,, \quad \int^{\infty} \frac{1}{v^2}\,\mathrm{d}x = \infty\,, \quad uv = O(1)\,, \quad u'v = O(1)\,.$$

Jestliže funkce $A$ je ohraničená a integrály $\int^{\infty} |\omega_i|\,\mathrm{d}x$, $i = 3, 4, 5$ konvergují, pak rovnice (1) má fundamentální systém $y_i = u^{5-i}v^{i-1}[1 + o(1)]\,, \quad i = 1, 2, \ldots, 5\,.$

$c_2$) Nechť

$$\lim_{x\to\infty} A(x) = -\,a^2\,, \quad a = \text{konst} > 0\,, \quad \int^{\infty} |A'|\,\mathrm{d}x < \infty\,, \quad \int^{\infty} |\omega_i|\,\mathrm{d}x < \infty\,, \quad i = 3, 4, 5\,.$$

Potom rovnice (1) má fundamentální systém

$$y_{1,2} = \exp\left\{\pm 4 \int_a^x \left(-\frac{1}{2}A\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t\right\} [1 + o(1)]\,,$$

$$y_{3,4} = \exp\left\{\pm 2 \int_a^x \left(-\frac{1}{2}A\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t\right\} [1 + o(1)]\,, \quad y_5 = [1 + o(1)]\,.$$

$c_3$) Nechť

$$\lim_{x\to\infty} A(x) = -\,2a^2\,, \quad a = \text{konst} > 0\,, \quad \int^{\infty} |A + 2a^2|\,\mathrm{d}x < \infty\,,$$

$$\int^{\infty} |\omega_i|\,\mathrm{d}x < \infty\,, \quad i = 3, 4, 5\,.$$

Pak rovnice (1) má fundamentální systém

$y_{1,2} = \exp\{\pm 4ax\}\,[1 + o(1)]\,, \quad y_{3,4} = \exp\{\pm 2ax\}\,[1 + o(1)]\,, \quad y_5 = [1 + o(1)]\,.$

$c_4$) Nechť

$$\int^{\infty} |\omega_3'' - 2\omega_3 A - \omega_4' + \omega_5|\,\mathrm{d}x < \infty\,, \quad \int^{\infty} |2\omega_3' - \omega_4|\,\mathrm{d}x < \infty\,, \quad \int^{\infty} |\omega_3|\,\mathrm{d}x < \infty\,.$$

Jestliže integrály rovnice (4) a jejich první derivace jsou ohraničené, pak je ohraničený každý integrál rovnice (1).

$c_5$) Nechť

$$\int^{\infty} |(\omega_3'' - 2\omega_3 A - \omega_4' + \omega_5)\, u_1 u_2 u_3 u_4|\,\mathrm{d}x < \infty\,,$$

$$\int^{\infty} |(2\omega_3' - \omega_4)\, u_1 u_2 u_3|\,\mathrm{d}x < \infty\,, \quad \int^{\infty} |\omega_3 u_1 u_2|\,\mathrm{d}x < \infty$$

pro libovolné integrály $u_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) rovnice (4). Jestliže každý integrál rovnice (4) konverguje k nule a má ohraničenou první derivaci, pak každý integrál rovnice (1) konverguje k nule.

$c_6$) Nechť $A \geqq$ konst $> 0$, $A^{-\frac{1}{4}}$ je konvexní pro $x \in J$. Jestliže

$$\int^{\infty} \frac{|\omega_3'' - 2\omega_3 A - \omega_4' + \omega_5|}{A^2} \, dx < \infty , \quad \int^{\infty} \frac{|2\omega_3' - \omega_4|}{A\sqrt{A}} \, dx < \infty , \quad \int^{\infty} \frac{|\omega_3|}{A} \, dx < \infty ,$$

pak každý integrál rovnice (1) je ohraničený a tutéž vlastnost má i jeho první a druhá derivace.

$c_7$) Jestliže platí předpoklady odst. $c_6$) a $\lim_{x \to \infty} A(x) = \infty$, pak každý integrál rovnice (1) konverguje k nule a tutéž vlastnost má i jeho první derivace.

*Zdeněk Hustý*, Brno

## NOVÝ DŮKAZ BEZESPORNOSTI AXIOMU VÝBĚRU A ZOBECNĚNÉ HYPOTÉZY KONTINUA

(Referát o přednášce LADISLAVA RIEGRA, přednesené v matematické obci pražské dne 5. června 1961)

Jednalo se o dosti podstatné zjednodušení a přepracování proslulého a značně složitého Gödelova (relativního) důkazu bezespornosti axiomu výběru a zobecněné hypotézy kontinua (z r. 1940).

Především byl Gödelův složitý axiom konstruktivity nahrazen poměrně jednoduchým ekvivalentním axiomem $K$, který rovněž říká, že každá množina je konstruovatelná, ale ve značně prostším a (zdánlivě) obecnějším smyslu než tomu je původně u Gödela.

Za druhé byla bezespornost axiomu výběru ukázána jako bezprostřední důsledek axiomu $K$ a sestrojení příslušného, tento axiom splňujícího modelu (tzv. $K$-konstruktovních tříd), axiomatické teorie množin v. Neumann-Bernays-Gödelovy; tento model je v podstatě Gödelův $\Delta$-model.

Za třetí bylo ukázáno, jak v tomto modelu lze verifikovat zobecněnou hypotezu kontinua $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Na rozdíl od jisté složité a hluboké Gödelovy pomocné věty 12.3 (viz K. GÖDEL: The consistence of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory, Princeton 1940) se tu používá tak zvaných *pseudoprvomodelů* axiomatické teorie množin (analogických k prvomodelům algebraických axiomatických systémů, např. k prvotělesům teorie těles) a jejich vlastností. Důležitou roli při tom hraje názorný pojem tzv. *rodokmenů* $K$-konstruktivní množiny.

*Poznámka.* Celá práce má vyjít v r. 1962 v anglickém jazyce v Polsku jako zvláštní číslo řady „Rozprawy matematyczne", vydávané PAN.

*Ladislav Rieger*, Praha