Časopis pro pěstování matematiky

Jiří Vaníček

Aproximující posloupnosti v Banachově prostoru

Časopis pro pěstování matematiky, Vol. 87 (1962), No. 1, 52--62

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/117413

Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

APROXIMUJÍCÍ POSLOUPNOSTI V BANACHOVĚ PROSTORU

JIŘÍ VANÍČEK, Praha

(Došlo dne 14. října 1960)

Vyšetřují se takové Schauderovy base $\{x_n\}$ Banachova prostoru B, pro které rozvoj $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, x_n$ v určitém smyslu nejlépe aproximuje prvek x.

Buď $\{x_n\}$ posloupnost prvků Banachova prostoru B. Označme lineární obal prvních n prvků symbolem $[\{x_i\}_{i=1}^{n}] = I_n$ a uzávěr lineárního obalu ostatních znakem $\overline{[\{x_i\}_{i=n+1}^{\infty}]} = I^n$. Nechť $\mu_n(x) = \sup_{y \in I_n} \|x - y\|$ značí vzdálenost prvku x od I_n a $\nu_n(x) = \sup_{y \in I^n} \|x - y\|$ vzdálenost prvku x od I^n.

Posloupnost $\{x_n\}$ se nazývá minimální v B, jestliže každý její prvek má od lineárního obalu ostatních kladnou vzdálenost, tj. $x_j \notin \overline{[\{x_n\}_{n \neq j}]}$ pro $j = 1, 2, \ldots$ Posloupnost $\{x_n\}$ se nazývá fundamentální v B, jestliže lineární obal $[\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]$ je hustý v B. Buď $x_n \in B$, $n = 1, 2, \ldots$ a $f_n \in B^*$, $n = 1, 2, \ldots$, posloupnost spojitých lineárních forem na B. Říkáme, že $\{x_n, f_n\}$ je biortogonální systém v B, jestliže $f_n(x_n) = 1$ pro $n = 1, 2, \ldots$ a $f_i(x_j) = 0$ pro $i \neq j$. Je známo, že k posloupnosti $\{x_n\}$ prvků z B existuje posloupnost $\{f_n\}$ spojitých lineárních forem na B tvořících s ní biortogonální systém, právě když $\{x_n\}$ je minimální v B. Taková posloupnost je určena jednoznačně, právě když $\{x_n\}$ je fundamentální v B.

Posloupnost $\{x_n\}$ se nazývá basí B,[1]) jestliže ke každému $x \in B$ existuje právě jedna číselná posloupnost $f_n(x)$ taková, že $\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, x_i\| = 0$ (zkráceně $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, x_n = x$). Lze ukázat, že f_n, $n = 1, 2, \ldots$, jsou pak spojité lineární formy na B, tvořící s $\{x_n\}$ biortogonální systém, a tedy posloupnost $\{x_n\}$ je minimální v B ([1], str. 69).

Následující věta udává nutnou a postačující podmínku pro to, aby posloupnost prvků Banachova prostoru byla jeho basí.

[1]) V literatuře se užívá obvykle označení „Schauderova base" na rozdíl od algebraické base Hamelovy. V tomto článku se pojem Hamelovy base nevyskytuje a proto budeme říkat zkráceně „base".

Věta 1. ([2], str. 189). *Posloupnost $\{x_n\}$ prvků Banachova prostoru B je jeho basí, právě když platí*

a) *$\{x_n\}$ je fundamentální v B,*

b) *$\{x_n\}$ je minimální v B,*

c) *existuje $K > 0$ tak, že je-li $\{f_n\}$ posloupnost prvků z B^*, tvořící s $\{x_n\}$ biortogonální systém, $x \in B$ takový prvek, že $\|x\| \leqq 1$ a p libovolné přirozené číslo, je* $\|\sum_{n=1}^{p} f_n(x)\, x_n\| \leqq K$ (tedy při označení $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, x_i$ požadujeme $\|s_n\| \leqq K$).

Je-li $\{x_n, f_n\}$ biortogonální systém v B, budeme v dalším stále užívat označení $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\, x_i$, $q_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(x)\, x_i$.

Uvažujeme-li přirozenou basi $\{x_n\} = \{\{\delta_n^i\}_{i=1}^{\infty}\}$ prostoru c_0,[2]) vidíme, že částečný součet $s_n(x)$ je nejlepší aproximací prvku x prvky z I_n a zbytek $x - s_n(x)$ nejlepší aproximací x prvky z I^n.

Podobná situace je u téže base prostoru l_1, s tím rozdílem, že $s_n(x)$ a $x - s_n(x)$ jsou zde dokonce jediné prvky uvedených vlastností.

Base těchto vlastností zachytíme v následující definici:

Definice. *Buď $\{x_n\}$ fundamentální posloupnost v Banachově prostoru B a nechť se skládá výhradně z nenulových prvků. Řekneme, že*

1) *$\{x_n\}$ je zprava aproximující, je-li pro libovolná čísla $t_1, t_2, \ldots, t_{p+1}$*

$$\|\sum_{n=1}^{p} t_n x_n\| \leqq \|\sum_{n=1}^{p+1} t_n x_n\| ;$$

2) *$\{x_n\}$ je zprava dobře aproximující, je-li pro libovolná čísla $t_1, \ldots, t_p$ a $t_{p+1} \neq 0$*

$$\|\sum_{n=1}^{p} t_n x_n\| < \|\sum_{n=1}^{p+1} t_n x_n\| ;$$

3) *$\{x_n\}$ je zleva aproximující, je-li pro všechna čísla $t_r, \ldots, t_s$*

$$\|\sum_{n=r+1}^{s} t_n x_n\| \leqq \|\sum_{n=r}^{s} t_n x_n\| ;$$

4) *$\{x_n\}$ je zleva dobře aproximující, je-li pro všechna čísla $t_{r+1}, \ldots, t_s$, $r < s$, a $t_r \neq 0$*

$$\|\sum_{n=r+1}^{s} t_n x_n\| < \|\sum_{n=r}^{s} t_n x_n\| ;$$

5) *$\{x_n\}$ je aproximující, je-li současně zprava aproximující i zleva aproximující;*

6) *$\{x_n\}$ je dobře aproximující, je-li současně zprava i zleva dobře aproximující.*

Tedy přirozená base c_0, $x_n = \{\{\delta_n^i\}_{i=1}^{\infty}\}$ je aproximující posloupnost v c_0 a tatáž posloupnost jako base l_1 dokonce dobře aproximující.

---

[2]) Prvky prostoru c_0 jsou posloupnosti $\{x_n\}$ reálných čísel konvergentní k 0, $\|\{x_n\}\| = \sup |x_n|$.

Posloupnost

$$
\begin{array}{l}
x_1 = (1, \quad 0,\ 0, \quad \ldots), \\
x_2 = (-1, \quad 1,\ 0, \quad \ldots), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n = ((-1)^{n+1}, \ldots, (-1)^{2n}, 0, \ldots) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

je basí l_1, ale není zprava aproximující ani zleva aproximující v prostoru l_1, protože $\|x_n\| = n$, ale $\|x_n + x_{n-1}\| = 1$. Tatáž posloupnost jako base v prostoru c_0 není zprava aproximující, protože $\|x_1 + \frac{1}{2}x_2\| = \frac{1}{2} < \|x_1\|$. Z definice normy v c_0 snadno plyne, že je zleva aproximující v c_0.

Známé Schauderovy funkce sestrojené např. v [3], tvoří zprava aproximující basi prostoru $C\langle a, b\rangle$. Tato base není zleva aproximující, protože, jak dokážeme později, v $C\langle a, b\rangle$ neexistuje žádná zleva aproximující base.

V dalším odvodíme některé vlastnosti zleva aproximujících a zprava aproximujících posloupností.

Věta 2. *Každá zprava aproximující resp. zleva aproximující posloupnost prvků Banachova prostoru B je složena z lineárně nezávislých elementů.*

Důkaz provedeme pouze pro zprava aproximující posloupnosti. Nechť $\sum_{i=1}^{r} t_i x_i = 0$. Protože $\{x_n\}$ je zprava aproximující, je

$$\|t_1 x_1\| \leqq \|\sum_{i=1}^{r} t_i x_i\| = 0 .$$

Odtud plyne, že $t_1 = 0$. Nechť již $t_i = 0$ pro $i = 1, \ldots, s-1$, $s \leqq r$. Pak dostáváme,

$$\|t_s x_s\| \leqq \|\sum_{i=s}^{r} t_i x_i\| = \|\sum_{i=1}^{r} t_i x_i\| = 0$$

a tedy $t_s = 0$.

Je-li $\{x_n\}$ zprava aproximující, resp. zleva aproximující posloupnost prvků Banachova prostoru B, lze podle právě dokázané věty každý prvek $x \in [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]$ psát právě jedním způsobem ve tvaru

$$x = \sum_{i=1}^{k(x)} t_i x_i . \tag{1}$$

Označme opět

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i , \quad q_n(x) = \sum_{i=n+1}^{k(x)} t_i x_i$$

pro $n = 1, 2, \ldots$

Dokážeme nyní větu, ze které je patrno opodstatnění zavedeného názvosloví.

Věta 3. *Buď $\{x_n\}$ fundamentální posloupnost prvků Banachova prostoru B.*

a) *$\{x_n\}$ je zprava aproximující, právě když pro každé $x \in [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]$ je vyjádření (1) jednoznačné a $v_n(x) = \|x - q_n(x)\| = \|s_n(x)\|$;*

$\{x_n\}$ *je zprava dobře aproximující, právě když je kromě toho*

$$\|x - \sum_{i=n+1}^{k(x)} \alpha_i x_i\| > \nu_n(x)\,,$$

jakmile existuje index j tak, že $n + 1 \leqq j \leqq k(x)$ *a* $\alpha_j \neq t_j$.

b) $\{x_n\}$ *je zleva aproximující, právě když pro každé* $x \in [\{x_n\}_{n+1}^{\infty}]$ *je vyjádření* (1) *jednoznačné a* $\mu_n(x) = \|x - s_n(x)\| = \|q_n(x)\|$;

$\{x_n\}$ *je zleva dobře aproximující, právě když*

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\| > \mu_n(x)\,,$$

jakmile existuje j takové, že $1 \leqq j \leqq n$ *a* $\alpha_j \neq t_j$.

Důkaz provedeme například pro tvrzení b).

Nutná podmínka. Jednoznačnost je důsledkem věty 2. Buď $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in I_n$. Podle předpokladu je

$$\|\sum_{i=1}^{n} (t_i - \alpha_i)\, x_i + \sum_{i=n+1}^{k(x)} t_i x_i\| \geqq \|\sum_{i=n+1}^{k(x)} t_i x_i\|$$

a tedy $\|x - y\| \geqq \|x - s_n(x)\|$ pro $y \in I_n$. Odtud plyne, že $\|x - s_n(x)\| = \mu_n(x)$. Tvrzení pro dobře aproximující posloupnost je zřejmé.

Postačující podmínka. Je $\sum_{i=1}^{n-1} t_i x_i = s_{n-1}(x) \in I_n$, a tedy $\|s_{n-1}(x) - x\| \geqq$ $\geqq \|s_n(x) - x\|$. Odtud plyne, že posloupnost je zleva aproximující. Druhá část je opět zřejmá. Nyní zesílíme větu 2.

Věta 4. *Zprava aproximující resp. zleva aproximující posloupnost prvků Banachova prostoru B je minimální.*

Důkaz. Buď $p_n = \sum_{i=1}^{n} c_i^{(n)} x_i$ a $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$. Je-li $\{x_n\}$ zleva aproximující, je pro každé $y \in I^n$ a $k = 1, 2, \ldots$ $\|q_k(p_n)\| \leqq \|p_n - y\|$. Protože je $0 \in I^n$, je $\lim_{n\to\infty} q_k(p_n) = 0$ pro každé $k = 1, 2, \ldots$ Ale platí $\|c_i^{(n)} x_i\| \leqq \|q_i(p_n)\| - \|q_{i-1}(p_n)\|$. Protože je $x_i \neq 0$, plyne odtud, že $\lim_{n\to\infty} c_i^{(n)} = 0$ pro $i = 1, 2, \ldots$ To však znamená, že $\{x_n\}$ je minimální v B. Pro zprava aproximující posloupnost plyne tvrzení stejně, z toho, že $\lim_{n\to\infty} s_k(p_n) = 0$ pro $k = 1, 2, \ldots$ a je $\|c_i^{(n)} x_i\| \leqq \|s_i(p_n)\| + \|s_{i-1}(p_n)\|$.

K zprava resp. zleva aproximující posloupnosti $\{x_n\}$ existuje tedy posloupnost spojitých lineárních forem $\{f_n\}$ tvořící s ní biortogonální systém. Přitom při našem označení je $s_n(x) \in I_n$, $q_n(x) \in I^n$ pro $x \in B$, $n = 1, 2, \ldots$

Následující tvrzení je zobecněním věty 3 z prostoru $[\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]$ na jeho uzávěr.

Věta 5. *Buď $\{x_n\}$ fundamentální posloupnost prvků Banachova prostoru B.*

a) *$\{x_n\}$ je zprava aproximující, právě když je minimální a pro každé $x \in B$ platí $\|s_n(x)\| = \nu_n(x)$;*

b) *$\{x_n\}$ je zleva aproximující, právě když je minimální a pro každé $x \in B$ je $\|q_n(x)\| = \mu_n(x)$.*

Důkaz. Že podmínky jsou postačující, plyne z věty 3 a nutnost minimality z věty 4. Zvolme pevně přirozené číslo n. Buď $x \in B$ a $\varepsilon > 0$. Pak existuje $y \in [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]$ tak, že $\|y - x\| < \frac{1}{3}\varepsilon$ a $\|s_n(x) - s_n(y)\| < \frac{1}{3}\varepsilon$.

a) Nechť je $\{x_n\}$ zprava aproximující a $\|s_n(x)\| > \nu_n(x)$. Pak existuje $h \in I^n$ a $\varepsilon > 0$ tak, že $\|s_n(x)\| > \|x - h\| + \varepsilon$. Potom pro y z počátku našeho důkazu je $\|s_n(y)\| > \|y - h\|$, $y \in [\{x_n\}_{n=1}^{\infty}]$, což je spor s větou 3.

b) Je-li $\{x_n\}$ zleva aproximující a $\|x - s_n(x)\| > \mu_n(x)$, existuje opět $h \in I_n$ tak, že $\|x - s_n(x)\| > \|x - h\| + \varepsilon$, a tedy $\|y - s_n(y)\| > \|y - h\|$, což je opět spor s větou 3.

Věta 6. *Buď $\{x_n\}$ fundamentální posloupnost nenulových prvků Banachova prostoru B. Budiž I identické zobrazení B na sebe. Pak*

a) *$\{x_n\}$ je zprava aproximující, právě když existuje posloupnost $\{f_n\}$ spojitých lineárních forem na B tvořící s $\{x_n\}$ biortogonální systém a přitom platí $\|s_n\| = 1$ pro $n = 1, 2, \ldots$*

b) *$\{x_n\}$ je zleva aproximující, právě když k ní existuje posloupnost $\{f_n\}$ spojitých lineárních forem na B tvořící s ní biortogonální systém a platí $\|I - s_n\| = \|q_n\| = 1$ pro $n = 1, 2, \ldots$*

Důkaz provedeme například pro a).

Nutná podmínka. Existence posloupnosti $\{f_n\}$ plyne z věty 4. Protože je $s_n(x_1) = x_1$, je $\|s_n\| \geqq 1$. Existuje-li $x \in B$ tak, že $\|x\| < \|s_n(x)\|$, plyne z toho, že $0 \in I^n$, nerovnost $\nu_n(x) \leqq \|x\|$ a to je spor s větou 5.

Postačující podmínka. Kdyby existovala čísla $t_1, \ldots, t_p, t_{p+1}$ tak, že platí

$$\|\sum_{i=1}^{p} t_i x_i\| > \|\sum_{i=1}^{p+1} t_i x_i\|,$$

pak je

$$\|s_p(\sum_{i=1}^{p+1} t_i x_i)\| > \|\sum_{i=1}^{p+1} t_i x_i\|$$

a tedy $\|s_p\| > 1$, což je spor.

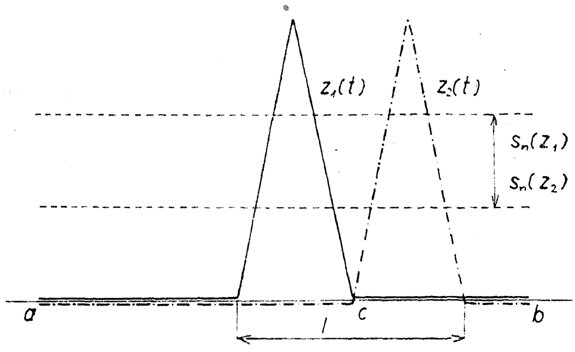
Z věty 6 a věty 1 plyne ihned tento důležitý důsledek:

Věta 7. *Každá zprava aproximující resp. zleva aproximující posloupnost prvků Banachova prostoru B je jeho basí.*

Pro otázky aproximace prvku částí jeho rozvoje jsou zřejmě důležitější base zleva aproximující, protože zde prvek nahrazujeme konečným součtem. Vyvstává otázka, existuje-li zleva dobře aproximující base v každém Banachově prostoru s basí. Ukazuje se, že odpověď na tuto otázku je již pro prostor $C\langle a, b\rangle$ záporná. V $C\langle a, b\rangle$ neexistuje žádná base taková, aby částečné součty splňovaly tvrzení o nejlepší aproximaci.

Dokážeme nyní silnější tvrzení:

Věta 8. *Buď $\{x_n\}$ base prostoru $C\langle a, b\rangle$ a n přirozené číslo. Pak existují prvky $h \in C\langle a, b\rangle$, $h' \in I_n$ tak, že $\|h - s_n(h)\| > \|h - h'\|$.*



Obr. 1.

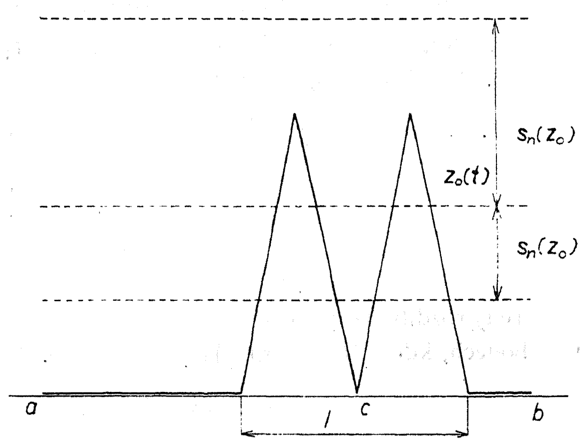
Důkaz. Protože $\{x_n\}$ je base $C\langle a, b\rangle$, pro každé $x \in C\langle a, b\rangle$ je $x = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(x)\, x_j$. Ze spojitosti f_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ plyne existence čísla K takového, že $|f_j(x)| \leqq K$ pro $\|x\| = 1$, $j = 1, \ldots, n$. Protože $x_1, \ldots, x_n$ jsou stejnoměrně spojité, existuje $\delta > 0$ tak, že pro $|t_1 - t_2| < \delta$, $t_1, t_2 \in \langle a, b\rangle$ a $j = 1, \ldots, n$ platí

(2)
$$|x_j(t_1) - x_j(t_2)| < \min\left(\frac{1}{12nK}, \frac{1}{12}\right).$$

Nechť neplatí tvrzení věty; pak operátor s_n přiřazuje každému $x \in C\langle a, b\rangle$ jeho nejlepší přiblížení prvky z I_n, tj. $\|x - s_n x\| = \mu_n(x)$.

Zvolme uzavřený interval $I \subset \langle a, b\rangle$, délky δ tak, aby

$$\sup_{t \in I} |x_1(t)| = \sup_{t \in \langle a,b\rangle} |x_1(t)|\,.$$



Obr. 2.

Označme c střed intervalu I. Položme

$$z_1(t) = 0 \quad \text{pro} \quad t \in \langle a, c - \tfrac{1}{2}\delta) \cup (c, b\rangle\,,$$

$$z_1(t) = \frac{4}{\delta}(t - c + \tfrac{1}{2}\delta) \quad \text{pro} \quad t \in \langle c - \tfrac{1}{2}\delta, c - \tfrac{1}{4}\delta\rangle\,,$$

$$z_1(t) = -\frac{4}{\delta}(t - c) \quad \text{pro} \ t \in \langle c - \tfrac{1}{4}\delta, c\rangle\,,$$

$$z_2(t) = z_1(t - \tfrac{1}{2}\delta) \quad \text{pro} \quad t \in \langle c, c + \tfrac{1}{2}\delta\rangle\,,$$

$$z_2(t) = 0 \quad \text{jinde v} \ \langle a, b\rangle\,, \quad z_0(t) = z_1(t) + z_2(t)\,.$$

Zřejmě je $z_j \in C\langle a, b\rangle$ a $\|z_j\| = 1$ pro $j = 0, 1, 2$. Z (2) plyne, že pro $t_1, t_2 \in I$ a $j = 0, 1, 2$, platí

$$(3) \qquad \|s_n(z_j)(t_1) - s_n(z_j)(t_2)\| \leqq \sum_{i=1}^{n} |f_i(z_j)| \, |x_i(t_1) - x_i(t_2)| < Kn \frac{1}{12Kn} = \frac{1}{12}.$$

Dokážeme, že $s_n(z_j)(t) \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ pro $t \in I$:

a) Nechť pro $t_1 \in I$ je $s_n(z_j)(t_1) \geqq \frac{2}{3}$. Z (3) plyne, že $s_n(z_j)(t) > \frac{1}{2}$ pro $t \in I$. Existuje tedy $\varepsilon < 1$ tak, že $\varepsilon\, s_n(z_j)(t) > \frac{1}{2}$ pro $t \in I$. Je-li $z_j(t) > s_n(z_j)(t)$, $t \in I$, je $|z_j(t) - s_n(z_j)(t)| < \frac{1}{2}$. Ale $|s_n(z_j)(c) - z_j(c)| > \frac{1}{2}$. Totéž platí pro funkce z_j a $s_n(z_j)$. Funkce $|s_n(z_j) - z_j|$ a $|\varepsilon\, s_n(z_j) - z_j|$ tedy nabývají svého supréma v I v takových bodech, pro které je $\varepsilon\, s_n(z_j)(t) > z_j(t)$. Tedy

$$\sup_I |\varepsilon\, s_n(z_j)(t) - z_j(t)| < \sup_I |s_n(z_j)(t) - z_j(t)|.$$

Protože na $\langle a, b\rangle \dot{-} I$ je $z_j(t) = 0$, je i

$$\sup_{\langle a,b\rangle} |\varepsilon\, s_n(z_j)(t) - z_j(t)| < \sup_{\langle a,b\rangle} |s_n(z_j)(t) - z_j(t)|,$$

což je spor s tím, že $s_n(z_j)$ je nejlepší aproximací.

b) Nechť pro nějaké $t_1 \in I$ je $0 < s_n(z_j)(t_1) \leqq \frac{1}{3}$. Pak je opět $s_n(z_j)(t) < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$ v I. Rozlišujme dva případy:

1. Nechť $s_n(z_j)(t) < \frac{1}{2}$ v $\langle a, b\rangle$. Pak existuje $\varepsilon > 1$ tak, že $\varepsilon\, s_n(z_j)(t) < \frac{1}{2}$ v $\langle a, b\rangle$. Pak ale je

$$\sup_{\langle a,b\rangle \dot{-} I} |\varepsilon\, s_n(z_j)(t) - z_j(t)| < \tfrac{1}{2} < |\varepsilon s_n\, z_j(c) - z_j(c)|,$$

$$\sup_{\langle a,b\rangle \dot{-} I} |s_n(z_j)(t) - z_j(t)| < \tfrac{1}{2} < |s_n(z_j)(c) - z_j(c)|.$$

Tedy rozdíly nabývají svého supréma pouze v intervalu I a to zřejmě opět v takových bodech, kde $z_j(t) > \varepsilon\, s_n(z_j)(t) > s_n(z_j)(t)$. Tedy je opět

$$\|\varepsilon\, s_n(z_j) - z_j\| < \|s_n(z_j) - z_j\|.$$

2. Nechť existuje bod $t_2 \in \langle a, b\rangle$ tak, že $s_n(z_j)(t_2) \geqq \frac{1}{2}$. Zvolme prvek

$$x_1' = x_1 \frac{\operatorname{sgn} x_1(c)}{2\|x_1\|}.$$

Protože $\|x_1'\| = \frac{1}{2} < 1$, je $x_1'(t) > \frac{5}{12}$ pro $t \in I$ a $x_1'(t) \leqq \frac{1}{2}$ pro $t \in \langle a, b\rangle$. Označme $y_j = \frac{1}{2}(s_n(z_j) + x_1')$. Protože $s_n(z_j)(t) < \frac{5}{12}$ v I, je

$$\tfrac{1}{2} > y_j(t) > s_n(z_j)(t) \quad \text{pro} \quad t \in I,$$

$$|y_j(t)| \leqq \sup_{\langle a,b\rangle \dot{-} I} |s_n(z_j)(t)| \quad \text{pro} \quad t \in \langle a, b\rangle \dot{-} I.$$

Protože $|y_j(t) - z_j(t)|$ a $|s_n(z_j)(t) - z_j(t)|$ nabývají svého supréma v I opět v takových bodech t, pro které je $s_n(z_j)(t) < y_j(t) < z_j(t)$, platí

$$\tfrac{1}{2} < \sup_I |y_j(t) - z_j(t)| < \sup_I |s_n(z_j)(t) - z_j(t)|$$

a dále je buď

$$\sup_{\langle a,b\rangle \doteq I} |s_n(z_j)(t)| = \tfrac{1}{2}$$

nebo

$$\sup_{\langle a,b\rangle \doteq I} |y_j(t) - z_j(t)| = \sup_{\langle a,b\rangle \doteq I} |y_j(t)| < \sup_{\langle a,b\rangle \doteq I} |s_n(z_j)(t)| = \sup_{\langle a,b\rangle \doteq I} |s_n(z_j)(t) - z_j(t)| .$$

Tedy $\|y_j - z_j\| < \|s_n(z_j) - z_j\|$, $y_j \in I_n$, což je opět spor.

c) Je-li v nějakém bodě $t \in I$ $s_n(z_j)(t) \leqq 0$, je $\|s_n(z_j) - z_j\| \geqq \frac{5}{6}$, ale $\|x'_1 - z_j\| < \frac{2}{3}$, což je opět spor.

Máme tedy

$$\tfrac{1}{3} < s_n(z_0)(t) < \tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{1}{3} < s_n(z_1)(t) < \tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{1}{3} < s_n(z_2)(t) < \tfrac{2}{3}$$

pro $t \in I$. Sečteme-li druhou a třetí nerovnost a uvážíme-li, že $s_n(z_0) = s_n(z_1) + s_n(z_2)$, dostáváme $\frac{2}{3} < s_n(z_0)(t)$, což je spor s první nerovností.

Přestože v každém Banachově prostoru s basí neexistuje aproximající base, lze toho vždy dosáhnout ekvivalentní změnou normy, jak ukazuje následující věta:

Věta 9. *Buď $\{x_n\}$ base Banachova prostoru $B = (B, \|\ \|)$. Pak existuje na množině B taková norma $|||\ |||$, že $B' = (B, |||\ |||)$ je Banachův prostor isomorfní s B a $\{x_n\}$ je dobře aproximující base B'.*

Důkaz. Pro každé $x \in B$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, x_n$ konverguje. Odtud plyne, že tato řada splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku; speciálně

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x)\, x_n\| = 0\,, \quad \text{a tedy} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|f_n(x)\, x_n\|}{2^n}$$

konverguje.

Položme nyní pro $x \in B$

$$|||x||| = \sup_{k,l=1}^{\infty} \Big\| \sum_{i=k+1}^{l} f_i(x)\, x_i \Big\| + \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{f_n(x)\, x_n}{2^n} \right\| .$$

Podle věty 1 je

$$\sup_{k,l=1}^{\infty} \Big\| \sum_{i=k+1}^{l} f_i(x)\, x_i \Big\| = \sup_{k,l=1}^{\infty} \Big\| \sum_{i=1}^{l} f_i(x)\, x_i - \sum_{i=1}^{k} f_i(x)\, x_i \Big\| \leqq 2K \|x\| .$$

Číslo $|||x|||$ je tedy pro každé $x \in B$ konečné a B' je normovaný lineární prostor.

Nechť $\lim \|y_n\| = 0$. Potom je podle věty 1 také

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{k,l=1}^{\infty} \Big\| \sum_{i=k+1}^{l} f_i(y_n)\, x_i \Big\| \leqq 2K \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = 0 .$$

Dále f_n jsou spojité lineární formy na B. Tedy $\lim_{n\to\infty} f_m(y_n) = 0$ pro každé $m = 1, 2, \ldots$

Protože je podle věty 1

$$\|f_m(y_n)\, x_m\| \leqq \|s_m(y_n)\| + \|s_{m-1}(y_n)\| \leqq 2K\, \|y_n\| \quad \text{pro} \quad n = 1, 2, \ldots,$$

posloupnost $\|y_n\|$ je ohraničená a dále řada $\sum_{n=1}^{\infty} c/2^n$ konverguje, lze užít věty o limitování řady člen po členu a dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\|f_i(y_n)\, x_i\|}{2^i} = 0\,.$$

Je tedy $\lim |||y_n||| = 0$ a zobrazení U prostoru B na B' definované vztahem $U(x) = x$ pro $x \in B$ je spojité a zřejmě lineární. Protože $|||x||| \geqq \|x\|$, je i inversní zobrazení spojité, oba prostory jsou isomorfní a B' je Banachův prostor.

Že $\{x_n\}$ je dobře aproximující base B' je zřejmé.

Literatura

[1] *M. M. Day*: Normed linear spaces. Berlin-Göttingen-Heidelburg 1958.

[2] *B. R. Gelbaum*: Expansion in Banach spaces. Duke Math. J. *17*, 1950, 187.

[3] *J. Schauder*: Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktional-Räumen. Math. Z. *26*, 1927, 47–65.

Резюме

АППРОКСИМИРУЮЩИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА

И. ВАНИЧЕК, (J. Vaníček), Прага

Пусть B – пространство Банаха, $\{x_n\}$ – последовательность ненулевых элементов B такая, что $\overline{[x_n]} = B$.

Мы говорим, что

1. $\{x_n\}$ является аппроксимирующей с правой стороны, если для всех чисел $t_1, \ldots, t_{p+1}$ справедливо

$$\|\sum_{i=1}^{p} t_i x_i\| \leqq \|\sum_{i=1}^{p+1} t_i x_i\|\,,$$

2. $\{x_n\}$ – хорошо аппроксимирoюшая с правой стороны, если для всех чисел $t_1, \ldots, t_p$ и $t_{p+1} \neq 0$ справедливо

$$\|\sum_{i=1}^{p} t_i x_i\| < \|\sum_{i=1}^{p+1} t_i x_i\|\,,$$

3. $\{x_n\}$ – аппроксимирующая с левой стороны, если для всех чисел $t_r, \ldots, t_s$ справедливо

$$\|\sum_{i=r+1}^{s} t_i x_i\| \leqq \|\sum_{i=r}^{s} t_i x_i\| ,$$

4. $\{x_n\}$ – хорошо аппроксимирующая с левой стороны, если для всех чисел $t_{r+1}, \ldots, t_s (r < s)$ и $t_r \neq 0$ справедливо

$$\|\sum_{i=r+1}^{s} t_i x_i\| < \|\sum_{i=r}^{s} t_i x_i\| .$$

Во всех этих случаях существует последовательность $\{f_n\} \subset B$ такая, что $f_i(x_j) = 0$ для $i \neq j$ и $f_i(x_i) = 1$ для $i = 1, 2, \ldots$

Обозначим

$$\mu_n(x) = \varrho(x, [\{x_j\}_{j=1}^{n}]) , \quad \nu_n(x) = \varrho(x, [\{x_j\}_{j=n+1}^{\infty}]) , \quad s_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)\, x_j .$$

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 5. а) $\{x_n\}$ *является аппроксимирующей с правой стороны тогда и только тогда, когда* $\|s_n(x)\| = \nu_n(x)$ *для всех* $x \in B$,

б) $\{x_n\}$ *является аппроксимирующей с левой стороны тогда и только тогда, когда* $\|x - s_n(x)\| = \mu_n(x)$ *для всех* $x \in B$.

Теорема 6. а) $\{x_n\}$ *является аппроксимирующей с правой стороны тогда и только тогда, когда* $\|s_n\| = 1$, *для* $n = 1, 2, \ldots$,

б) $\{x_n\}$ *является аппроксимирующей с левой стороны тогда и только тогда, когда* $\|I - s_n\| = 1$ *для* $n = 1, 2, \ldots$, *где* I *– тождественное преобразование пространства* B.

Теорема 7. *Всякая последовательность, аппроксимирующая с правой или левой стороны, является базисом* B.

В дальнейшем доказано, что в пространстве $C\langle 0, 1\rangle$ не существует базис, аппроксимирующий с левой стороны (теорема 8), но во всяком пространстве Банаха с базисом $\{x_n\}$ существует такая эквивалентная норма $|||\ |||$, что $\{x_n\}$ является базисом $(B, |||\ |||)$, хорошо аппроксимирующим одновременно с правой и левой стороны (Теорема 9).

Summary

APPROXIMATING SEQUENCES IN BANACH SPACES

JIŘÍ VANÍČEK, Praha

Let B be a Banach space, $\{x_n\}$ a sequence of non-zero elements in B, such that $\overline{[x_n]} = B$. We shall say that

1) $\{x_n\}$ approximates from the right, if for any numbers $t_1, \ldots, t_{p+1}$ there holds $\|\sum_{i=1}^{p} t_i x_i\| \leqq \|\sum_{i=1}^{p+1} t_i x_i\|$,

2) $\{x_n\}$ well approximates from the right, if for any numbers $t_1, \ldots, t_p$ and $t_{p+1} \neq 0$ there holds $\|\sum_{i=1}^{p} t_i x_i\| < \|\sum_{i=1}^{p+1} t_i x_i\|$,

3) $\{x_n\}$ approximates from the left, if for any numbers $t_r, \ldots, t_s$ there holds $\|\sum_{i=r+1}^{s} t_i x_i\| \leqq \|\sum_{i=r}^{s} t_i x_i\|$,

4) $\{x_n\}$ well approximates from the left, if for any numbers $t_{r+1}, \ldots, t_s$ $(r < s)$ and $t_r \neq 0$ there holds $\|\sum_{i=r+1}^{s} t_i x_i\| < \|\sum_{i=r}^{s} t_i x_i\|$.

In all these cases there exists a sequence $\{f_n\} \subset B$, such that $f_i(x_j) = 0$ for $i \neq j$ and $f_i(x_i) = 1$ for $i = 1, 2, \ldots$

Let us denote

$$\mu_n(x) = \varrho(x, [\{x_j\}_{j=1}^{n}]), \quad \nu_n(x) = \varrho(x, [\{x_j\}_{j=n+1}^{\infty}]), \quad s_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)\, x_j \,.$$

The following theorems are proved:

Theorem 5. a) $\{x_n\}$ approximates from the right if and only if $\|s_n(x)\| = \nu_n(x)$, for each $x \in B$,

b) $\{x_n\}$ approximates from the left if and only if $\|x - s_n(x)\| = \mu_n(x)$ for each $x \in B$.

Theorem 6. a) $\{x_n\}$ approximates from the right if and only if $\|s_n\| = 1$ for $n = 1, 2, \ldots$,

b) $\{x_n\}$ approximates from the left if and only if $\|I - s_n\| = 1$ for $n = 1, 2, \ldots$, where I is the identical mapping of B.

Theorem 7. Every sequence approximating from the right or left is a base of B.

Further it is proved that in the space $C\langle 0, 1\rangle$ there exists no base approximating from the left (Theorem 8), but for every Banach space with base $\{x_n\}$ there exists an equivalent norm $|||\ |||$ such that $\{x_n\}$ is a base of $(B, |||\ |||)$ well approximating simultaneously from right and left (Theorem 9).