Časopis pro pěstování matematiky, roč. 87 (1962), Praha

ZPRÁVY

BERNARD BOLZANO

(5. 10. 1781 – 18. 12. 1848)

Dne 5. října 1961 uplynulo 180 let od narození pražského rodáka BERNARDA BOLZANA. Československá vědecká veřejnost vzpomněla toho dne jeho památky na slavnostním zasedání, které uspořádala Československá akademie věd (její matematicko-fysikální sekce, historická sekce a komise pro dějiny přírodních, lékařských a technických věd) a Jednota československých matematiků a fysiků.

Světové matematické veřejnosti je Bernard Bolzano znám především jako jeden z průkopníků onoho směru matematického bádání devatenáctého století, který si postavil za cíl kritickou revisi základních pojmů matematické analysy. Bolzanovo dílo má v této své části mnoho styčných bodů s těmi pracemi jeho velkého současníka, A. CAUCHYHO, které se zabývají základními větami analysy. Přesto však je mezi pracemi obou matematiků v tomto oboru podstatný rozdíl. Bolzano nebyl jen matematikem, nýbrž také filosofem a logikem. Sám o sobě praví, že matematika ho zajímala především jako odvětví filosofie a prostředek k výcviku správného myšlení. Proto je Bolzanovo dílo, pokud se týká matematické analysy, věnováno téměř výhradně lepšímu fundování jejích nejzákladnějších partií a nedá se srovnávat s obrovitou šíří díla Cauchyova; s touto jistou jednostranností patrně také souvisí nedostatek odborné technické zručnosti, s kterým se u Bolzana často setkáváme. Naproti tomu ve studiu rozsahu základních pojmů matematické analysy a jejich vzájemných vztahů jde Bolzano mnohem dále a hlouběji než kterýkoliv z jeho vrstevníků. Charakter Bolzanových prací ze základů matematické analysy poznáme snad nejlépe z dvou jeho prací, o nichž se nyní zmíníme.

První z nich je pojednání „*Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*", vydané r. 1817. Práce podává důkaz věty, že funkce[1]) $f(x)$, spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, nabývá uvnitř tohoto intervalu všech hodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$ (u Bolzana je formulace trochu jiná). V úvodu ukazuje Bolzano, proč tato „názorně evidentní" věta potřebuje důkazu, a kritisuje některá nesprávná „odvození". Jeho pojem spojitosti (v intervalu) je totožný s dnešním pojmem a je týž, kterého užívá Cauchy ve svém díle *Cours d'Analyse* (1821). Důkaz věty spočívá u Bolzana na větě o existenci suprema omezené neprázdné množiny čísel. Věta o supremu je pak odvozena z tzv. *Bolzanovy-Cauchyovy podmínky* pro konvergenci posloupnosti reál-

[1]) V dalším jde stále o reálné funkce jedné reálné proměnné.

ných čísel (u Cauchyho se vyskytuje tato podmínka o 4 leta později). Bolzano se také pokouší postačitelnost této podmínky dokázat; zde je ovšem u něho mezera v důkazu, neboť neměl k disposici teorii reálných čísel.

Již tato práce ukazuje Bolzanovo hluboké pochopení pro základní otázky analysy. Touž problematikou, ale na vyšší úrovni a ve větší šíři se zabývá jeho práce, objevená v Bolzanově rukopisné pozůstalosti M. JAŠKEM okolo r. 1920 a vydaná v r. 1930 pod názvem „*Functionenlehre*" Královskou českou společností nauk. Tento spis měl tvořit součást velkého díla „*Grössenlehre*".

Functionenlehre, která vznikla asi v první polovině třicátých let, se skládá z předmluvy a dvou oddílů; první se týká spojitosti, druhý derivace. Hloubkou pojetí i systematičností a zdařilostí podání vyniká hlavně oddíl o spojitosti funkcí jedné proměnné. Na rozdíl od dřívějších formulací u Bolzana i Cauchyho zavádí zde Bolzano nejenom spojitost v intervalu, nýbrž i spojitost v bodě, a to i spojitost zprava a zleva. Že si byl plně vědom významu této lokalisace spojitosti, je patrno z toho, že udává příklad funkce, která je nespojitá v každém bodě, i příklad funkce, která je spojitá právě v jednom bodě. Bolzano dokazuje pak řadu vět o spojitých funkcích v tomto pořadí (píšeme je v moderní symbolice a terminologii):

I. *Je-li* $\limsup_{x \to c} |f(x)| = \infty$, *není f spojitá v bodě c.*

II. *Funkce spojitá v uzavřeném intervalu* $\langle a, b \rangle$ *je v něm omezená.*

III. *Je-li f spojitá v uzavřeném intervalu* $\langle a, b \rangle$ *a existuje-li posloupnost čísel* $x_n \in \langle a, b \rangle$ *tak, že* $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = C$, *nabývá f v* $\langle a, b \rangle$ *hodnoty C.*

IV. *Každá funkce v uzavřeném intervalu* $\langle a, b \rangle$ *nabývá v něm své největší a nejmenší hodnoty (snad je zajímavé, jak pečlivě se Bolzano vyjadřuje: „největší v tom smyslu, že žádná jiná není větší").*

V. *Funkce f, spojitá v intervalu J, má tuto vlastnost:*

(A) *Je-li* $\alpha \in J$, $\beta \in J$, $f(\alpha) \neq f(\beta)$, *nabývá f v otevřeném intervalu* (α, β) *všech hodnot mezi* $f(\alpha)$ *a* $f(\beta)$. *(To je ovšem věta z „Rein analytischer Beweis".)*

Důkazy vět jsou vybudovány systematicky na větě o supremu a na tzv. *větě Bolzanově-Weierstrassově*: Každá omezená posloupnost čísel má hromadný bod. Bolzano si byl dobře vědom významu kompaktnosti uzavřeného intervalu: ukazuje, že věty III, IV neplatí pro otevřené intervaly. Zdůrazňuje také, že vlastnost (A) není postačující k tomu, aby funkce byla spojitá v *J* — avšak jeho argumentace zde není uspokojivá.

Věty, které jsme dosud uvedli, mají jeden společný charakter. Ukazují, že všechny funkce spojité mají kromě vlastnosti vyslovené v definici spojitosti ještě řadu dalších vlastností, které jsou v souhlase s naivní představou „spojitosti". Bolzanovo zkoumání pojmu spojitosti jde však také ještě v druhém, téměř v opačném směru. Bolzano konstruuje příklady funkcí, které jsou spojité a přesto mají některé vlastnosti, které jsou v nesouhlasu s naivní představou spojitosti a jevily se proto v jeho době paradoxními. Z nich je nejzávažnější a nejznámější tzv. *Bolzanova funkce.*

Tato funkce F je definována v intervalu $\langle a, b\rangle$ jako limita posloupnosti funkcí $y_1, y_2, \ldots$ po částech lineárních, jejichž grafy se dostanou z úsečky postupným opakováním jisté jednoduché geometrické konstrukce. Bolzano ukazuje, že funkce F, ač je spojitá v $\langle a, b\rangle$, není monotonní v žádném intervalu a nemá konečnou derivaci v žádném bodě jisté množiny, která je hustá v $\langle a, b\rangle$. Dnes víme, že F nemá konečnou ani nekonečnou derivaci v žádném bodě intervalu (a, b), ale Bolzano to nikde nedokazuje a také netvrdí. Bolzanův důkaz obsahuje jednu závažnou mezeru: spojitost funkce F dedukuje prostě z toho, že je limitou spojitých funkcí y_n. K pojmu stejnoměrnosti a k poznání jeho významu se tedy Bolzano nedostal; tím se dostalo do jeho díla několik závažných omylů. To je tím podivuhodnější, že na jiných místech důrazně a bystře před omyly tohoto druhu varuje.

Hluboké studium obecných vlastností spojitých funkcí a především konstrukce funkcí s „paradoxními" vlastnostmi nám ukazuje Bolzana jako bezprostředního předchůdce moderní teorie reálných funkcí. Je škoda, že jeho Functionenlehre nebyla publikována dříve, v době, kdy mohla ještě ovlivnit a urychlit vývoj této větve matematiky.

K dovršení Bolzanovy teorie funkcí jedné reálné proměnné bylo zapotřebí vyplnit jednu mezeru, totiž vytvořit teorii reálných čísel. Jak známo, bylo několik takových teorií podáno okolo r. 1870 (CANTOR, DEDEKIND, MÉRAY, WEIERSTRASS). Jak referuje K. RYCHLÍK (*Theorie der reellen Zahlen in Bolzano's handschriftlichem Nachlasse*, Чехосл. мат. журнал *7* (*82*), pp. 553—567, 1957), je v Bolzanově pozůstalosti rukopis obsahující pokus o systematickou teorii reálných čísel; jejím vrcholem je důkaz postačitelnosti Bolzanova-Cauchyova kritéria pro konvergenci posloupnosti, důkaz věty o supremu a důkaz Dedekindovy věty. Bolzanův pokus je na svou dobu velmi pozoruhodný, ne však plně zdařilý. Závada je v tom, že se Bolzano snaží zahrnout do své teorie všechny „výrazy", obsahující nekonečně mnoho aritmetických operací s racionálními čísly („*unendliche Zahlenausdrücke*"); kdybychom se místo toho omezili např. na řady s racionálními členy, dal by se asi Bolzanův pokus dovésti se zdarem až do konce.

Právě tak jako se Bolzanův zájem o filosofii a logiku obráží v jeho matematickém díle, jeví se jeho matematické založení v jeho velkém logickém spise „*Wissenschaftslehre*" (1837); význam Bolzanův jako předchůdce matematické logiky je všeobecně uznáván. Také v tomto směru je možno očekávat nové nálezy v Bolzanově pozůstalosti, jak o tom svědčí zpráva K. Rychlíka „*Betrachtungen aus der Logik in Bolzano's handschriftlichem Nachlasse*" (Чехосл. мат. журнал *8* (*83*), pp. 197—202, 1958).

Velká rukopisná pozůstalost Bolzanova není ještě plně probádána; mnohé náčrtky a koncepty zůstanou asi navždy nerozluštitelné. Dá se však očekávat, že pečlivé studium této pozůstalosti přinese ještě nové poznatky o díle tohoto hlubokého a originálního myslitele.

*

Bolzano nebyl jen matematik, logik a filosof, nýbrž i význačný společenský myslitel. V dusném ovzduší rakouské absolutní monarchie, v níž reakce po francozské revoluci ještě zesílila, se stal z prvých hlasatelů nových idejí v české společnosti a doplatil na tuto činnost i sesazením z místa profesora. Ale ani pak jeho snažení v tomto směru neustalo a začátkem třicátých let 19. století vytvořil první a vlastně jedinou ucelenou *socialistickou utopii*, která vznikla v naší zemi.

Vycházeje z kritiky současného státu, za jehož nejvyšší nedostatek pokládá nerovnost stavů a majetku, vytváří Bolzano představu *ideálního státu*. Jeho stát je republikou, kde funkce parlamentu je nahrazena lidovým hlasováním. Stát je řídícím orgánem i v hospodářství, je vlastníkem půdy, výrobních prostředků i části spotřebních prostředků. Rozvoj výroby a strojová výroba zvláště nabudou tím netušených možností. Obchod a peněžnictví je v rukou státu. Výchova a výživa dětí se děje na státní útraty. Stát poskytuje také lékařskou péči občanům a zaopatření všem práce neschopným. Slabost pokrokových složek společnosti se obráží u Bolzana v nedůvěře v možnost uskutečnění jeho utopie, v zásadním odmítání revolučních metod, ve víře ve vyřešení třídních rozporů cestou přesvědčování. Zaostalost hospodářských poměrů vede u Bolzana k nevíře v možnost hojného uspokojování potřeb všeho obyvatelstva, proto hlásá nutnost asketického omezení a vyrovnání spotřeby. Vcelku lze říci, že Bolzanova utopie patří svým obsahem a formou do okruhu socialistických utopií 18. století; nejblíže stojí asi MABLYMU.

Mnoho z učení velkého humanisty Bolzana patří jistě historii. Přesto v době dnešních zjitřených mezinárodních poměrů celé partie jeho díla promlouvají k nám s velkou naléhavostí. V době, kdy neuvážané rozhodnutí může přinésti záhubu velké části lidstva a vážné ohrožení civilisace, stává se velmi aktuálním Bolzanovo přesvědčení o moci lidského rozumu, o možnosti dohody mezi lidmi a o rozumném a všem stranám prospěšném uspořádání světa. Tento názor nebyl u Bolzana výsledkem pouze racionální úvahy, nýbrž i bolestných osobních zkušeností. Desetiletí trvající, Evropu pustošící napoleonské války vypukly již v době Bolzanova dětství a poznamenaly jistě převážnou část jeho učitelské činnosti. Proto ve svých promluvách tak plasticky líčí hrůzy vojny, v níž na jedné straně tisíce lidí umírají mečem, na druhé tisíce hynou hladem, mrazem a morem. V údobí nejhoršího temna však Bolzano věří v kladný vývoj společnosti, ve vítězství lidského rozumu, zdravého cítění a volá (r. 1811) prorocky: „*Es wird — ich sage es mit aller Zuversicht — es wird eine Zeit erscheinen, wo man den Krieg, diess widersinnige Bestreben, sein Recht durchs Schwert zu beweisen, eben so allgemein verabscheuen wird, wie man den Zweikampf jetzt schon verabscheuet!*“ Je symbolické, že dnes právě přesně po 150 letech vystupuje tato otázka výrazně do popředí, že ještě ne všechny složky lidské společnosti došly k přesvědčení, že válka je nepřípustný způsob řešení sporných otázek mezi státy. Za této situace přebírají odpovědnost za vývoj světa především ti, kteří si zachovávají Bolzanem tolik vyzdvihovaný zdravý rozum, zvětšuje se úloha inteligence, k jejímuž svědomí se Bolzano především obracel. Jen při dohodě a spojení všech lidí dobré vůle, jen v míru může se uskutečnit Bolzanovo životní heslo: „*Fortschreiten soll man*“.

Jen za těchto podmínek rozprostře se na zemi ono pravé štěstí, jak je líčí Bolzano:

„*Unser Geschlecht wird endlich auch immer weiter schreiten in wahrer Glückseligkeit, das ist, das Heer der Leiden, welche uns drücken, wird in der Folge der Zeiten sich immer mehr und mehr verringen; je länger, je wirksamer werden die Mittel sein, die man zu ihrer Abhilfe erfunden haben wird, die Zahl derjenigen aus uns, die sich unglücklich fühlen, wird immer kleiner werden, und immer grösser die Anzahl jener, die eine naturgemässe Befriedigung ihrer menschlichen Bedürfnisse auf Erden finden, die ruhig und vergnügt ihr Dasein zubringen, und alt und lebenssatt dem Tode ohne Murren in die Arme sinken, weil auch sie sagen können: das sie gelebt, und dieser Erde Glück genossen haben*“ (1811).

Vojtěch Jarník, Praha

VZPOMÍNKA NA PROFESORA MILOŠE KÖSSLERA

František Nožička, Praha

Dne 8. února 1961 zemřel prof. dr. Miloš Kössler, profesor Karlovy university a člen-korespondent ČSAV. Profesor Kössler se mnohostranně zasloužil... Ne, milý čtenáři, takto oznamovaná fakta nejsou jádrem mých vzpomínek na mého milého učitele profesora Kösslera, na učitele mnoha dnešních učitelů matematiky na školách středních a vysokých. Datum 8. února 1961 mi připomíná smuteční zástavu na budově naší fakulty a nečekanou její souvislost s profesorem Kösslerem, připomíná mi strohé „Víš to už?“ z řídkých rozhovorů toho dne na našem pracovišti. Každý, ať mladý či starý učitel, sám pro sebe se zamyslel nad smutnou událostí tohoto dne, nad člověkem, který byl nejen vynikajícím vědcem a učitelem, ale též člověkem s nesmírnou dobrotou srdce, který neznal jakkoli ublížit. Vždyť pomáhal každému a všude, kde toho bylo třeba; přitom jeho ochota nepramenila z vědomí povinností nebo z životní filosofie. Byl prostě ušlechtilý v pravém slova smyslu. Vzpomínka na profesora Kösslera je milá tak, jak milý byl on sám, vzpomínka na něho vede a pomáhá.

Často si v rozhovorech s našimi studenty uvědomuji, jaké příznivé podmínky dnes mají pro své studium i pro pozdější své uplatnění na rozdíl od okolností, za kterých studovali mnozí z těch, kteří dosáhli ve svém oboru velkých úspěchů a byli nebo jsou našimi předními vědeckými pracovníky. Pro tyto lidi to byla především láska k oboru a nadšení, vytrvalost a svědomitost, které je zařadily na místa zodpovědná za vědeckou a kulturní úroveň národa. Profesor Kössler byl z chudé rodiny a v letech 1903 až 1908 jako student filosofické fakulty Karlovy university se probíjel kondicemi. Studium matematiky, fysiky a astronomie poskytovalo tehdy jen skromné možnosti uplatnění. Prakticky to bylo jen učitelství na středních školách, přičemž bylo málo škol a učitelů matematiky nadbytek. Tři léta nezaměstnanosti po ukončení studia, vyplněná honbou za kondicemi a starostmi s dluhy, nezměnila nic na nadšení a